ランダムポテンシャル中のGPモデルを用いた超流動の解析

大阪市立大　理
小林　未知数・坪田　誠

1、研究内容

- VycorやAerogel中のHeで代表されるような、ランダム（制限）ボース系の超流動のモデル化→ボース・ハバードモデルなどを含めても、ほとんど行われていない。
- ２次元ランダムポテンシャル中でのボース系（特にポテンシャルの空間変化がコヒーレンス長と同じオーダーの場合）をGross-Pitaevskii（GP）方程式を用いて記述し、その空間的変化や超流動の特性などを直接計算した。

GP方程式:凝縮からの揺らぎを無視したときに、ボース系の巨視的波動関数が従う方程式

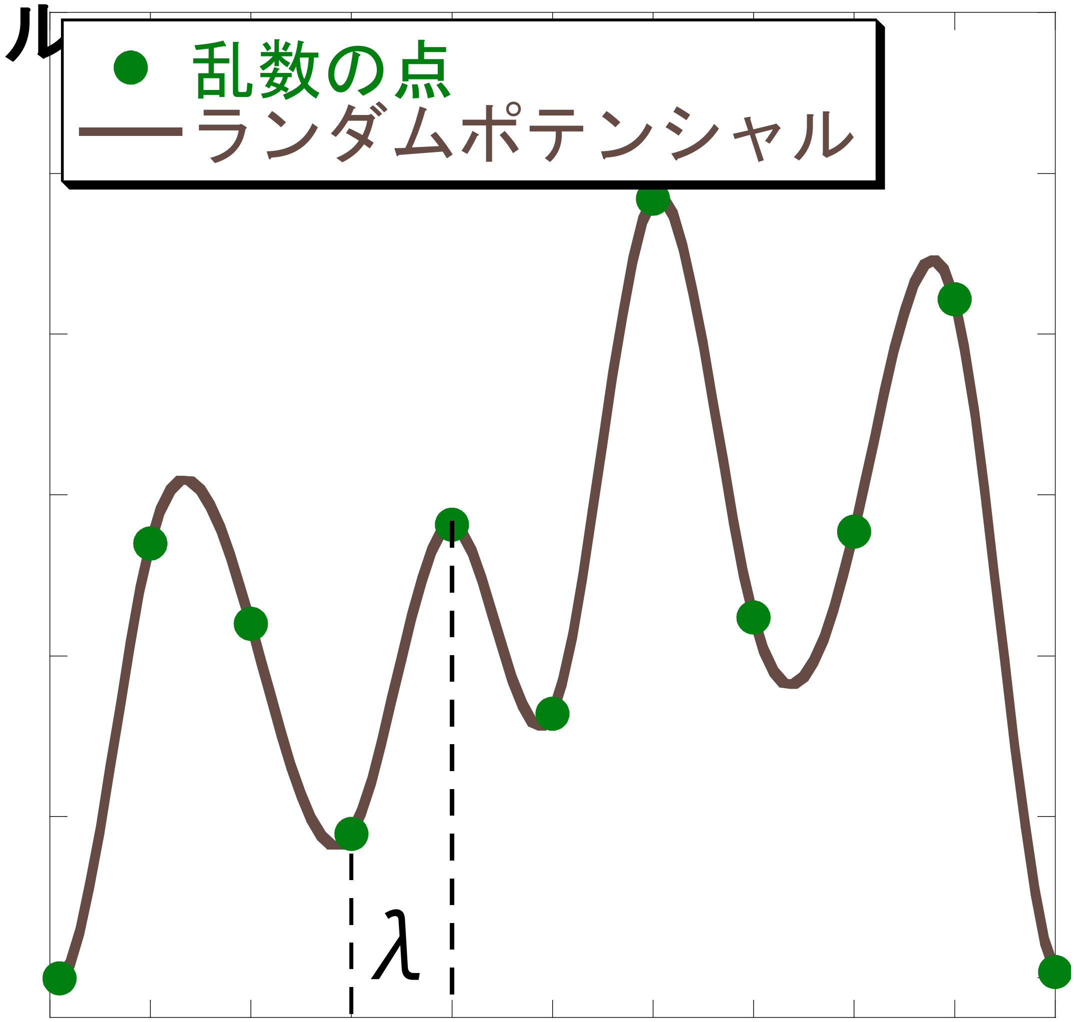
$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x)}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + V(\vec{x}) + g|\Psi(\vec{x})|^2]\Psi(\vec{x})$$

$\Psi(x)$:巨視的波動関数
μ:化学ポテンシャル
g:粒子間相互作用の強さを表す結合定数
$V(x)$:外部から与えるポテンシャル
$\rightarrow$ランダムポテンシャル

V(x):ランダムポテンシャル

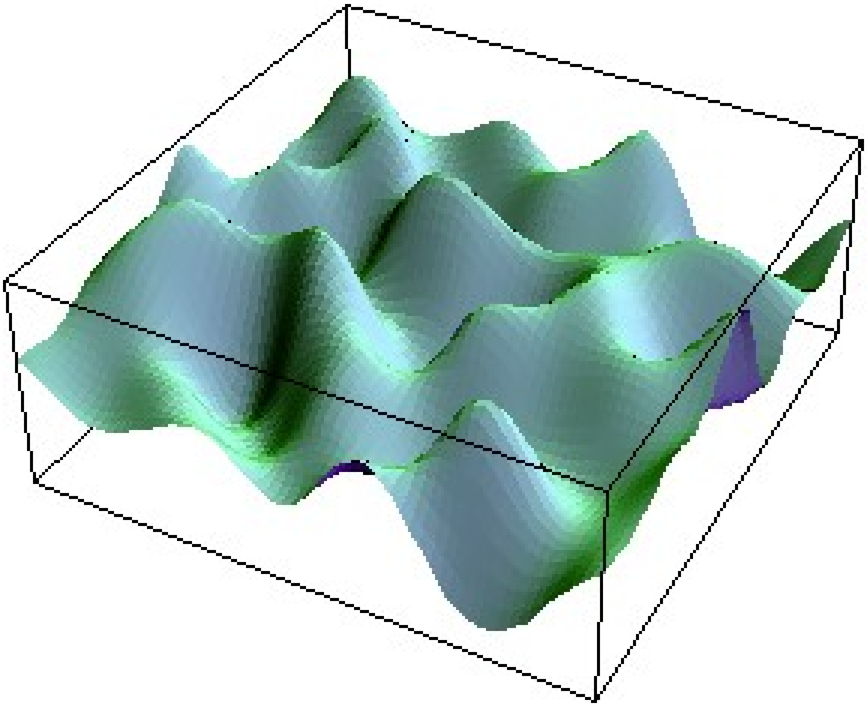
→空間に乱数を振り、(３次双スプライン)補間することで作る

·一次元ランダムポテンシャル

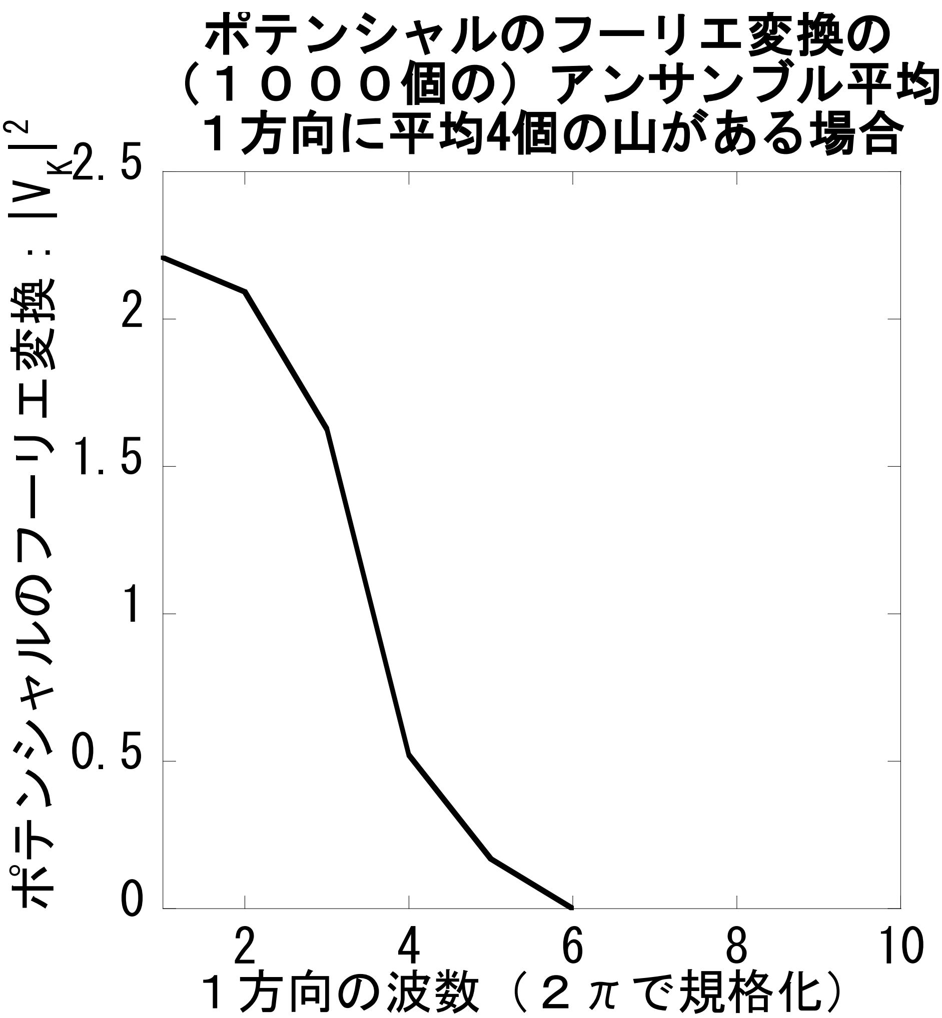


振る乱数の間隔がそのままポテンシャルの特徴的なサイズλとなる(今回λ～500Åとする)

·二次元ランダムポテンシャ



物理量の計算においてはポテンシャルの高さ、幅を固定した、多数のアンサンブルについて平均をとる



2、計算結果

1、基底状態

GP方程式にエネルギー散逸を入れて時間発展させることで基底状態を求められる

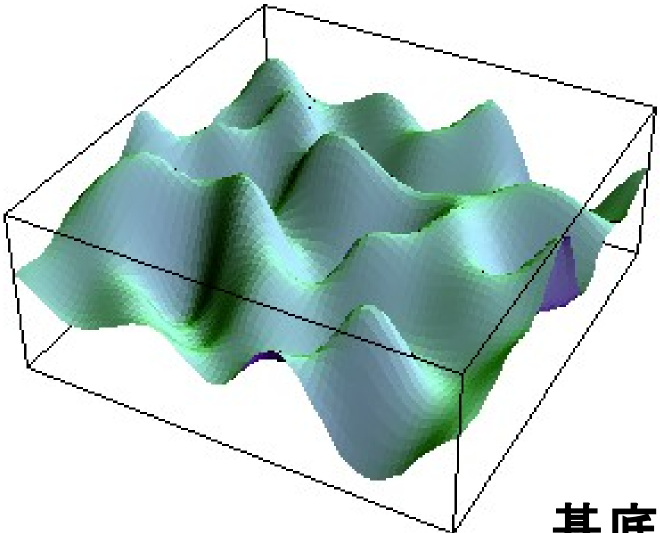
$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\Psi(x)}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + V(\vec{x}) + g|\Psi(\vec{x})|^2]\Psi(\vec{x})$$

γ:**エネルギー散逸項**

ポテンシャルの大きさ、波動関数の回復長、平均粒子密度を変えることで基底状態の形がどう変わるかを調べ、さらに超流動密度を計算する。

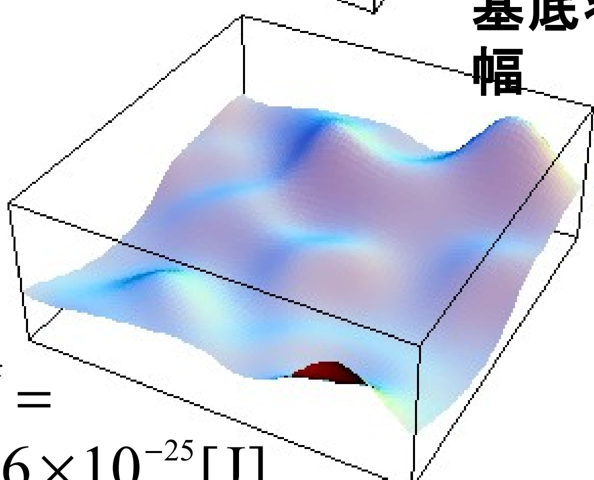
- 形状一定でのポテンシャルの大きさ依存性

ポテンシャル

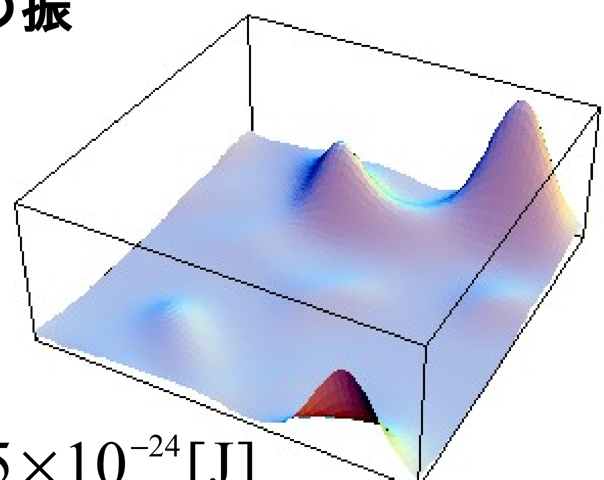


ξ:回復長
$=\lambda$:ポテンシャルの空間変化
$=500$Å
$\overline{\mathrm{N}}$:平均粒子密度
$=4\times10^{14}[/\mathrm{m}^2]$
$\overline{\mathrm{V}}$:平均のポテンシャル強度

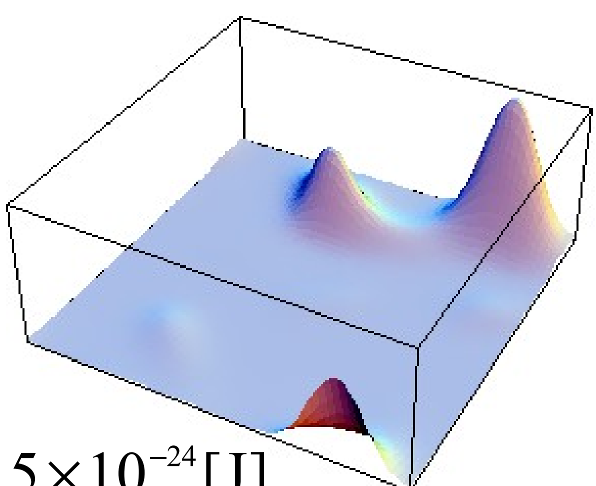
基底状態の振幅



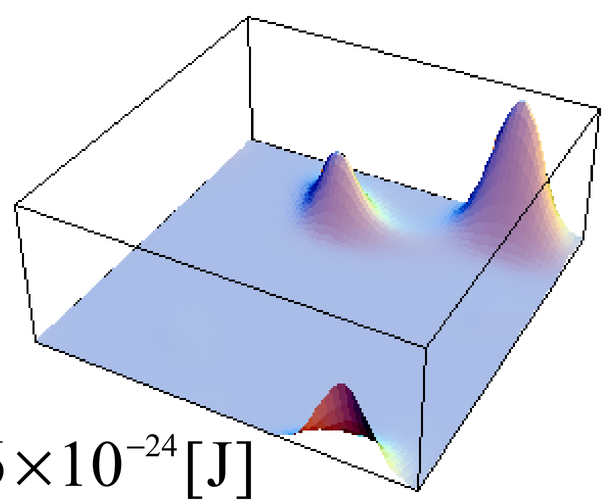
$\overline{\mathrm{V}}=$
$3.6\times10^{-25}[\mathrm{J}]$



$1.5\times10^{-24}[\mathrm{J}]$



$2.5\times10^{-24}[\mathrm{J}]$

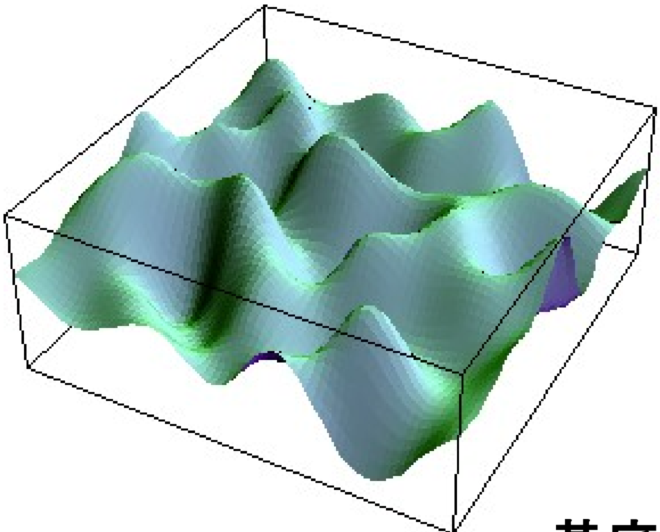


$3.6\times10^{-24}[\mathrm{J}]$

ポテンシャルが大きいほど基底状態は局在する

- **回復長依存性**

ポテンシャル



ξ: **回復長**

λ: **ポテンシャルの空間変化**

$= 500\text{Å}$

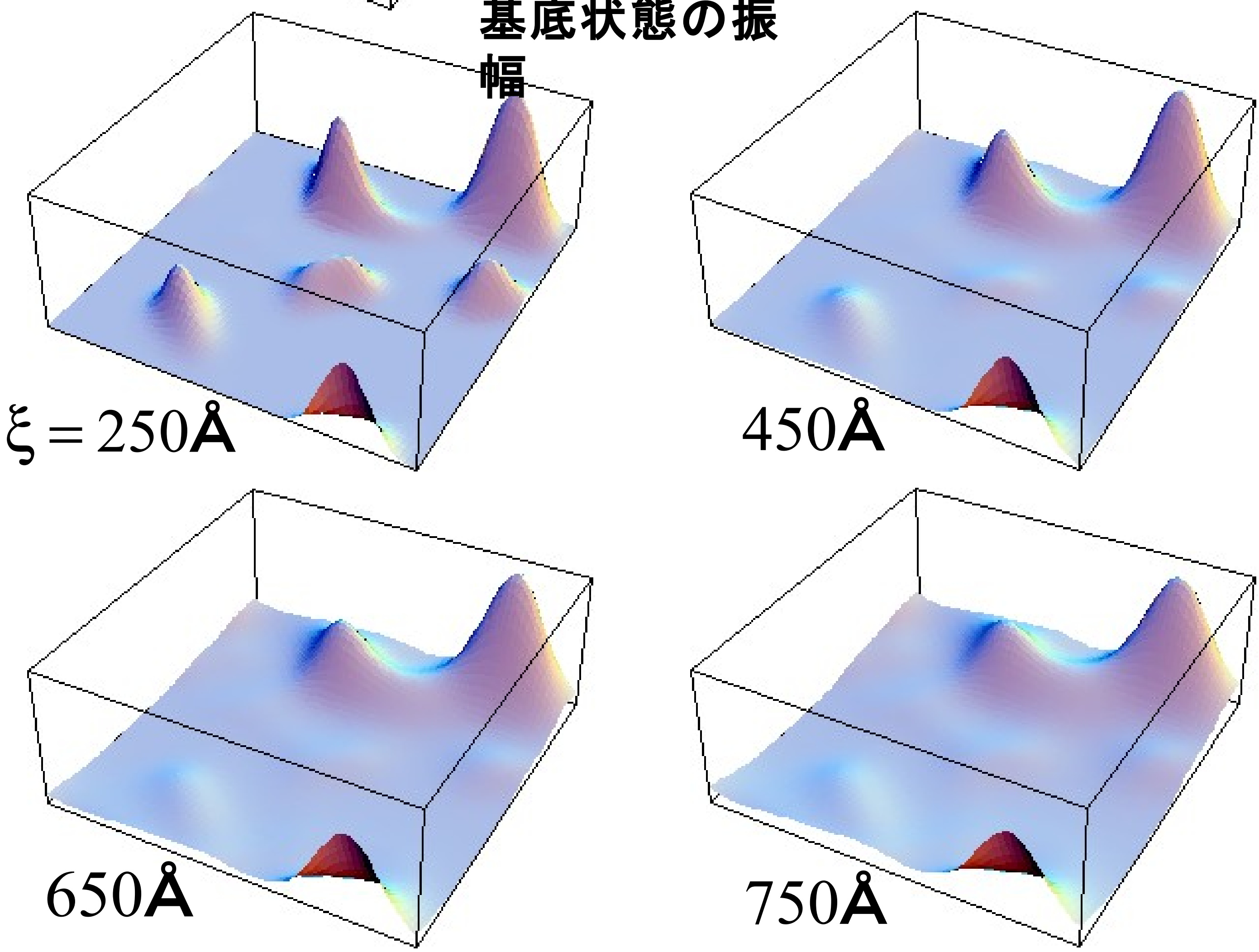
$\overline{\mathrm{N}}$: **平均粒子密度**

$= 4\times10^{14}[/\mathrm{m}^2]$

$\overline{\mathrm{V}}$: **平均のポテンシャル強度**

$= 1.8\times10^{-24}[\mathrm{J}]$

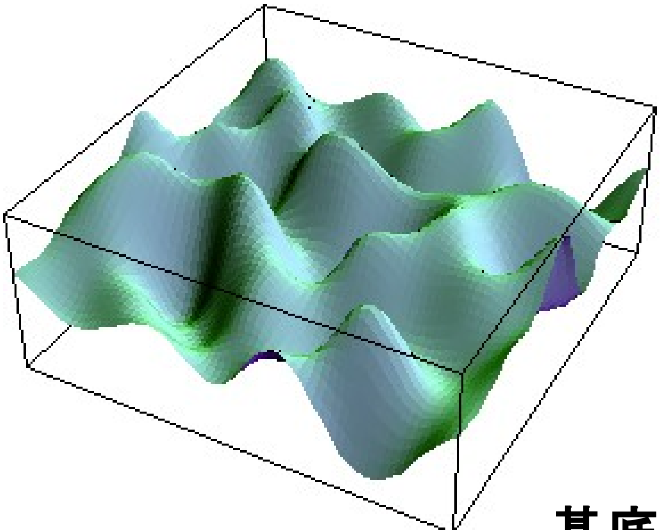
基底状態の振幅



回復長が短いほどほど基底状態は局在する

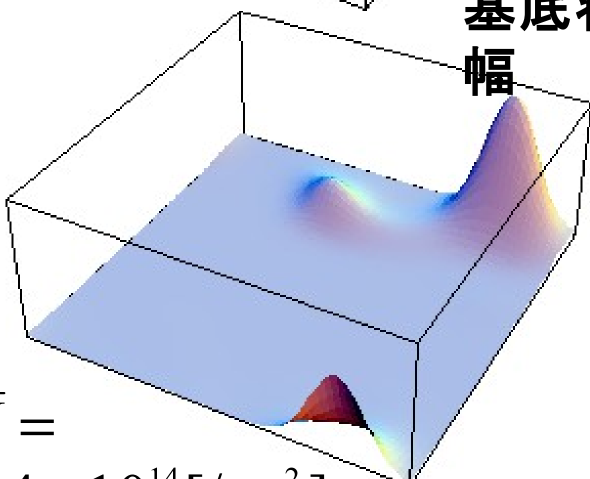
- 密度依存性

ポテンシャル

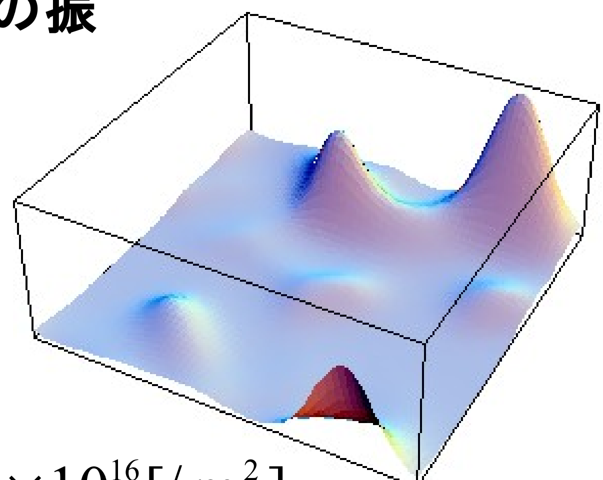


ξ: 回復長
$=\lambda$: ポテンシャルの空間変化
$= 500$Å
$\overline{\mathrm{N}}$: 平均粒子密度
$\overline{\mathrm{V}}$: 平均のポテンシャル強度
$= 1.8\times10^{-24}[\mathrm{J}]$

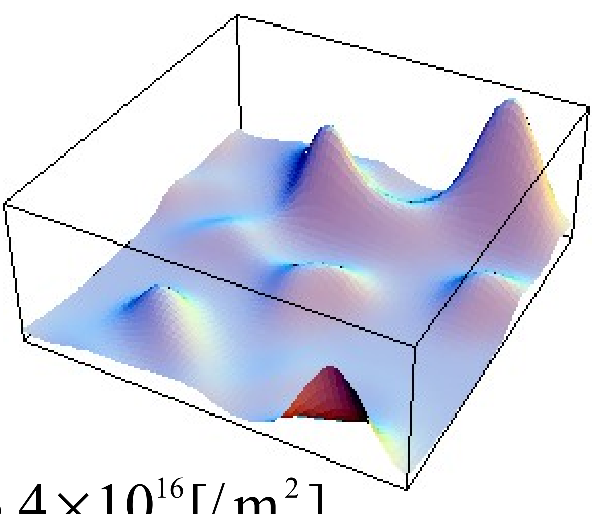
基底状態の振幅



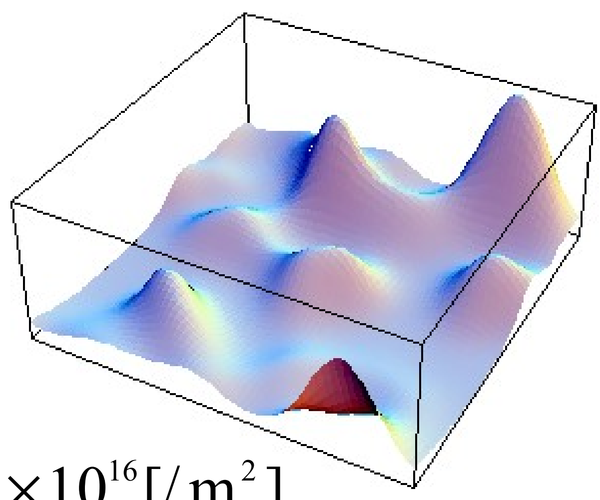
$\overline{\mathrm{N}} = 2.4\times10^{14}[/\mathrm{m}^2]$



$4.8\times10^{16}[/\mathrm{m}^2]$



$6.4\times10^{16}[/\mathrm{m}^2]$

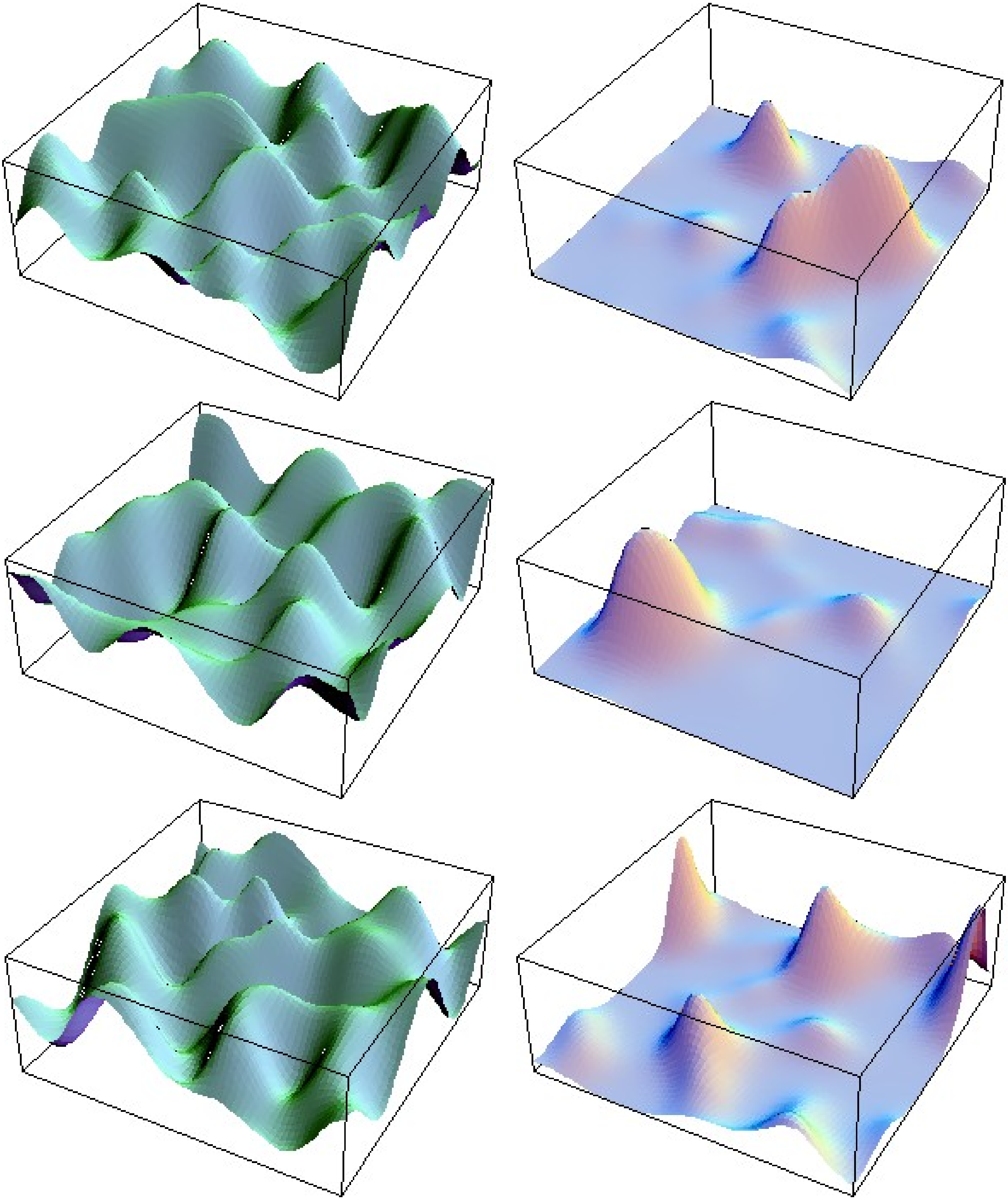


$8.0\times10^{16}[/\mathrm{m}^2]$

密度が小さいほど基底状態は局在する

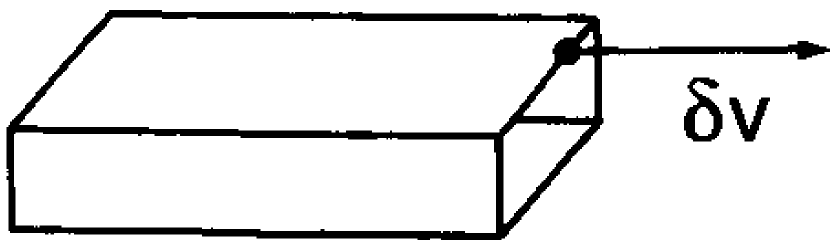
- **ポテンシャルの形状依存性**

ポテンシャル **基底状態の振幅**



超流動密度の計算は線形応答理論を用いる

P.C.Hohenberg and P.C.Martin,Ann.Phys(NY) 34,291(1965)



管を引っ張ることにより作られる横方向の速度場は常流体によるものと考える。

系に速度場$v(\vec{r})$をかけたときの運動量の応答を$j(\vec{r})$としたとき線形応答理論では

$$j_i(\vec{r}) = \chi_{i,j}(\vec{r})v_j(\vec{r})$$

感受率χのフーリエ変換が縦と横に分解され、

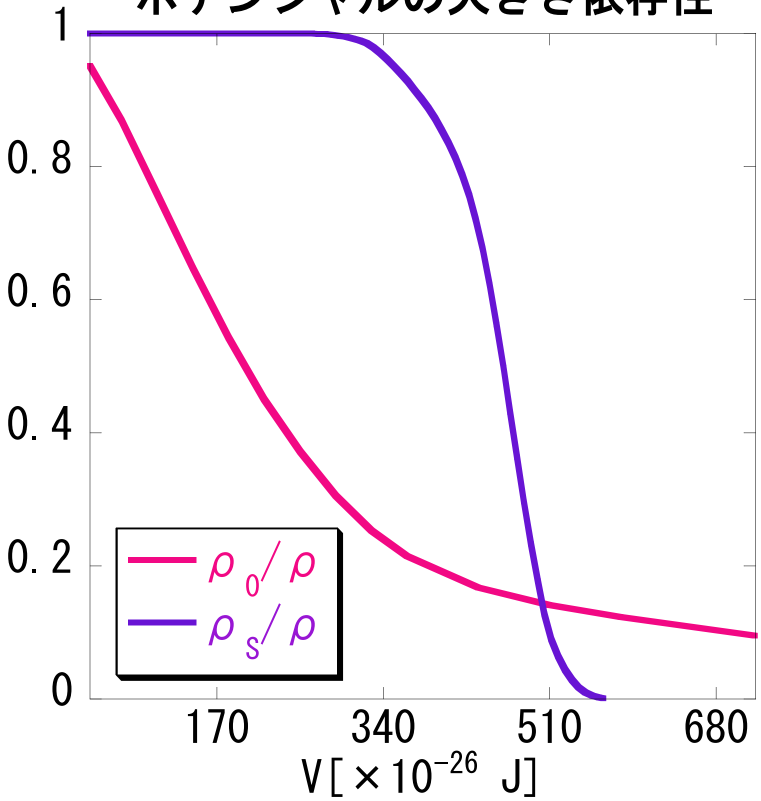
$$\chi_{i,j}(\vec{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}A(\vec{k}) + (\delta_{i,j} - \frac{k_i k_j}{k^2})B(\vec{k})$$

その横成分が常流体となる。

$$B(\vec{k}) \xrightarrow{k \to 0} \rho_n$$

基底状態の超流動密度とフーリエ0成分

ポテンシャルの大きさ依存性

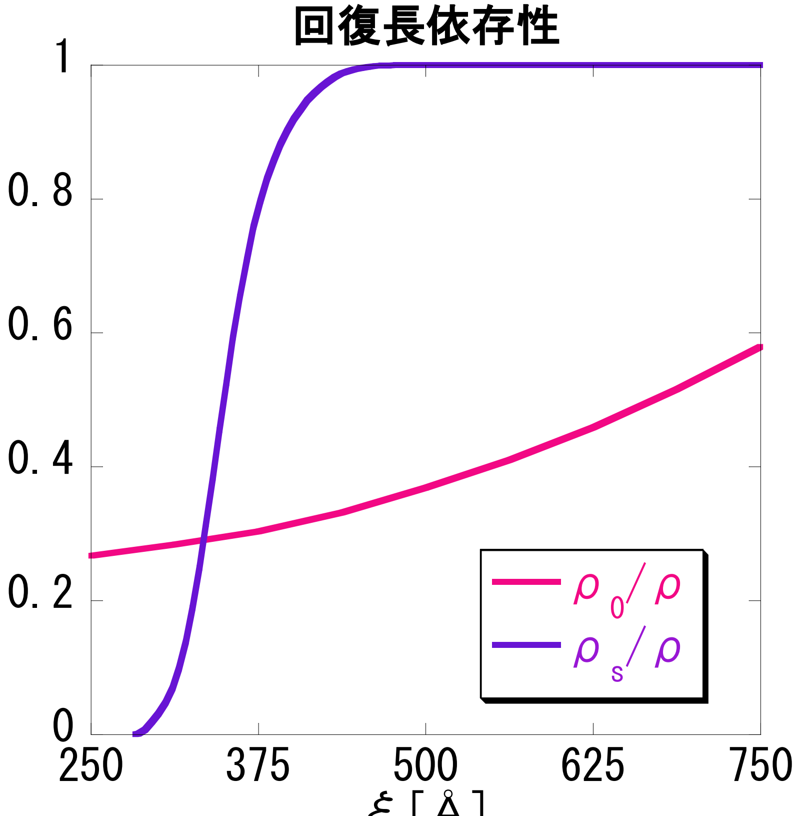


全て1000個のアンサンブル平均

$$\xi = \lambda = 500\text{Å}$$
$$\overline{N} = 4\times10^{16}[/m^2]$$

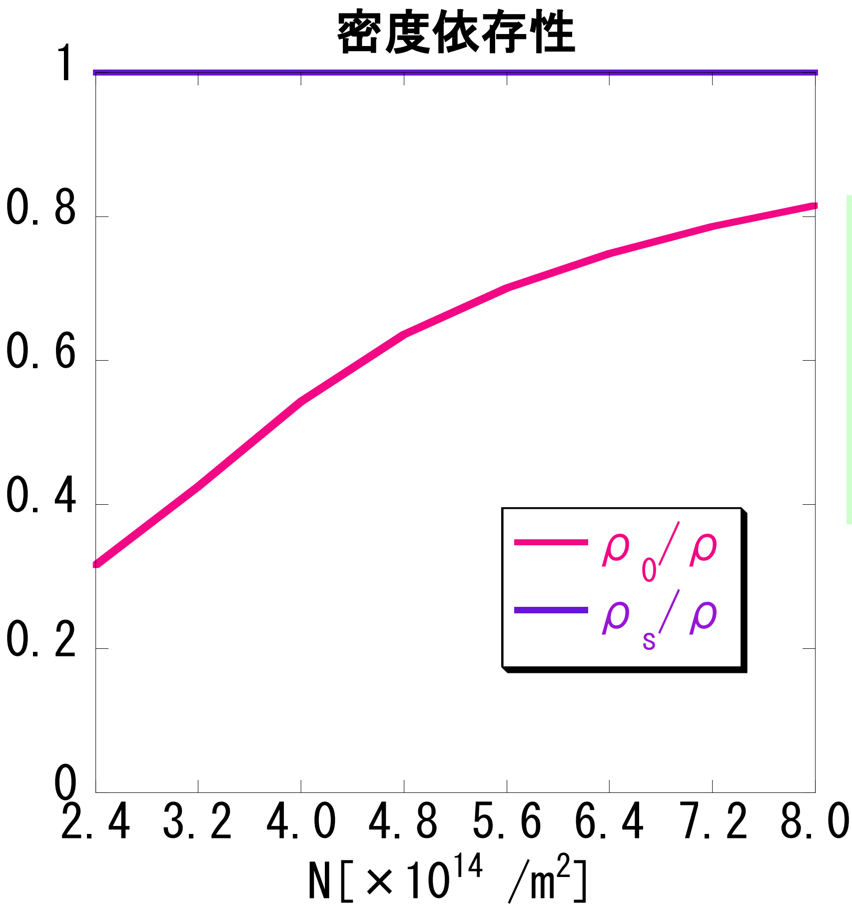
ξ:回復長
λ:ポテンシャルの空間変化
$\overline{N}$:平均粒子密度
$\overline{V}$:平均のポテンシャル強度
ρ_0 :フーリエ0成分
ρ_s :超流動密度

回復長依存性



局在している状態(ポテンシャルが大きい、回復長が短い)で超流動密度が抑えられている

$$\overline{V} = 1.8\times10^{-24}[J]$$
$$\overline{N} = 4\times10^{14}[/m^2]$$



ξ: 回復長
λ: ポテンシャルの空間変化
$\overline{N}$: 平均粒子密度
$\overline{V}$: 平均のポテンシャル強度
ρ_0: フーリエ0成分
ρ_s: 超流動密度

$\overline{V}/\mu = 50 \qquad \xi = \lambda$

密度依存性において、超流動密度の大きな変化はみられなかった→より広範囲での計算が必要

２、流れのある状態

GP方程式をガリレイ変換することで系に流れをかけることができる

$$
i\hbar\frac{\partial\Psi(x)}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + V(\vec{x}) + g\left|\Psi(\vec{x})\right|^2 + i\hbar\vec{v}\cdot\vec{\nabla}]\Psi(\vec{x})
$$

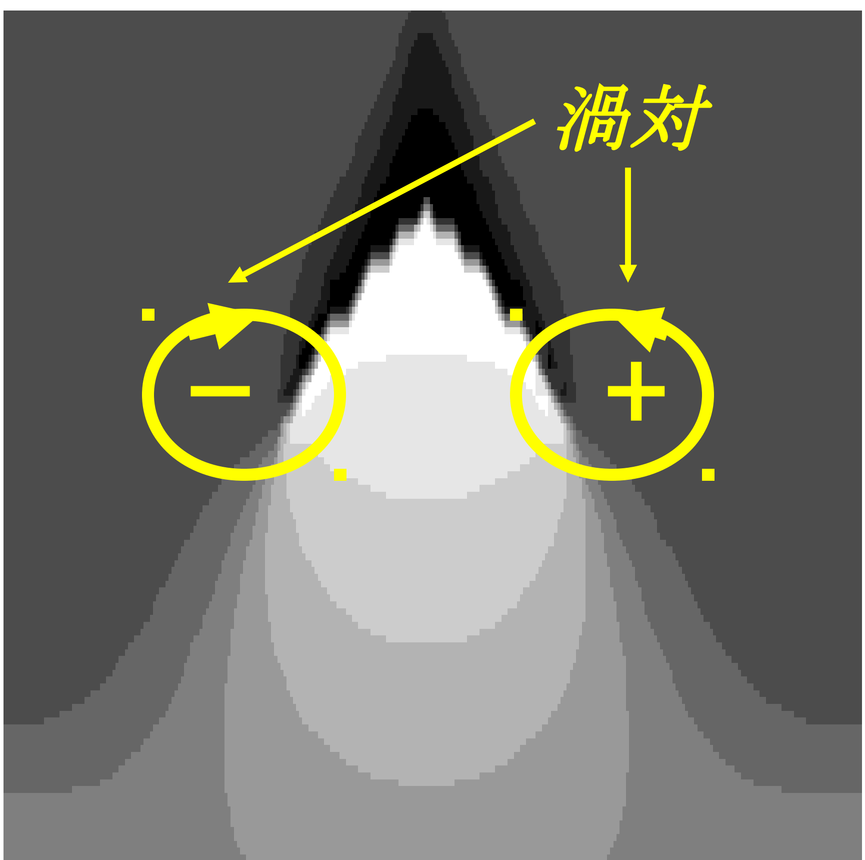
v : **流速**

求まった基底状態に実際に流れをかけ、その応答を見る

音速C_s(～$10[m/s]$)のおよそ0.1倍で渦対の生成・消滅！
$(\xi=\lambda=500\text{Å}, \overline{V}=1.8\times10^{-24}[J],$
$\overline{N}=4\times10^{14}[/m^2])$

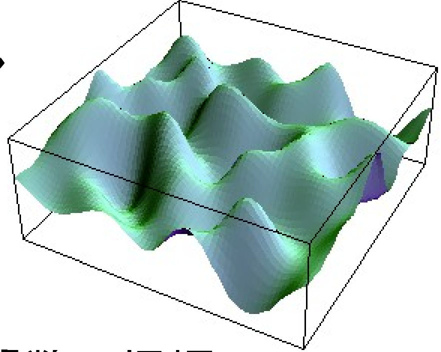
ξ: **回復長**
λ: **ポテンシャルの空間変化**
$\overline{N}$: **平均粒子密度**
$\overline{V}$: **平均のポテンシャル強度**

渦対のあるときの波動関数の位相(白→0、黒→2π)

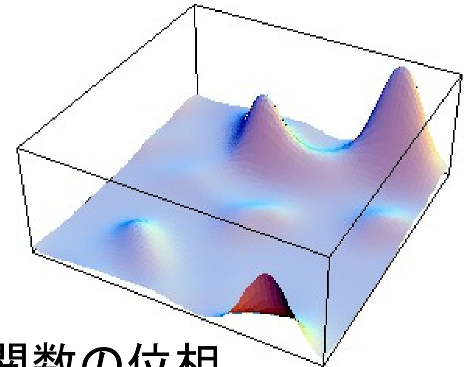


位相が一周すると2πずれる(運動量の回転→渦)

ポテンシャル

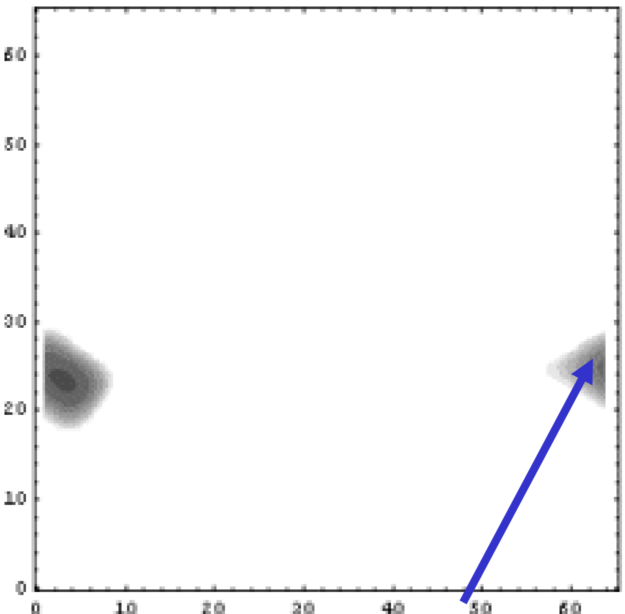


基底状態

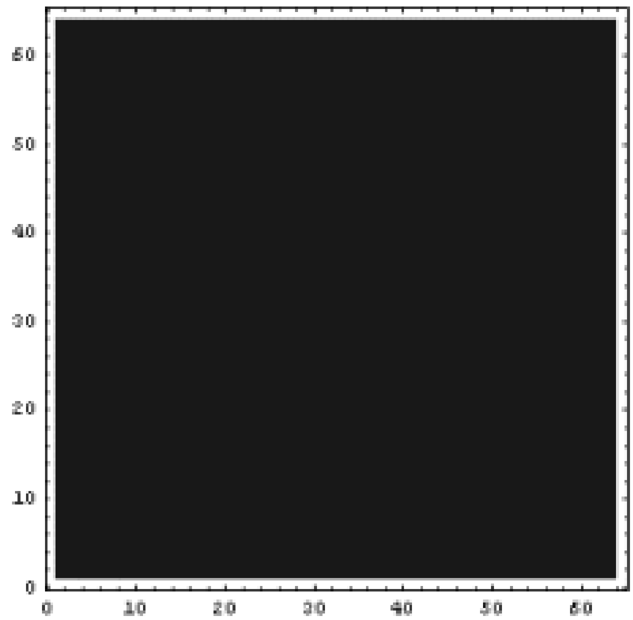


波動関数の振幅

波動関数の位相

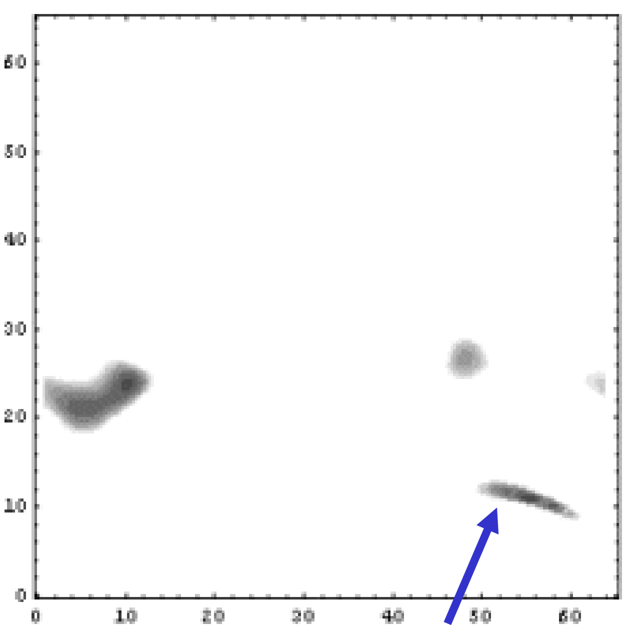


ポテンシャルの大きい部分が薄い

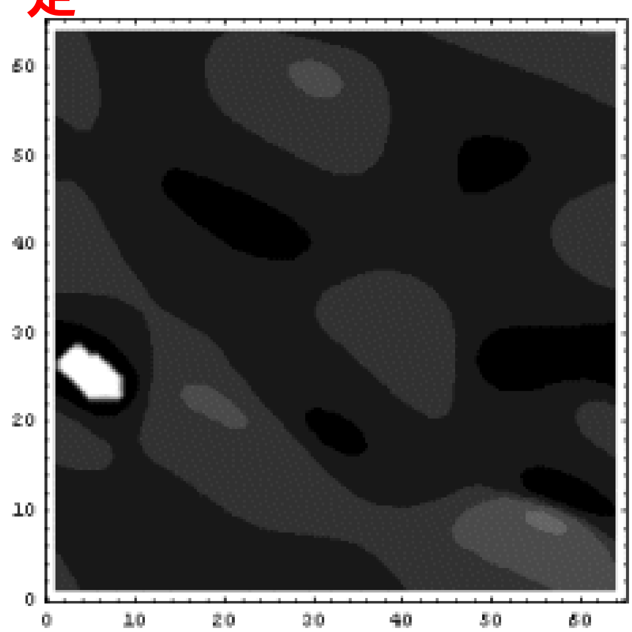


始めは位相が一定

t = 0[s]

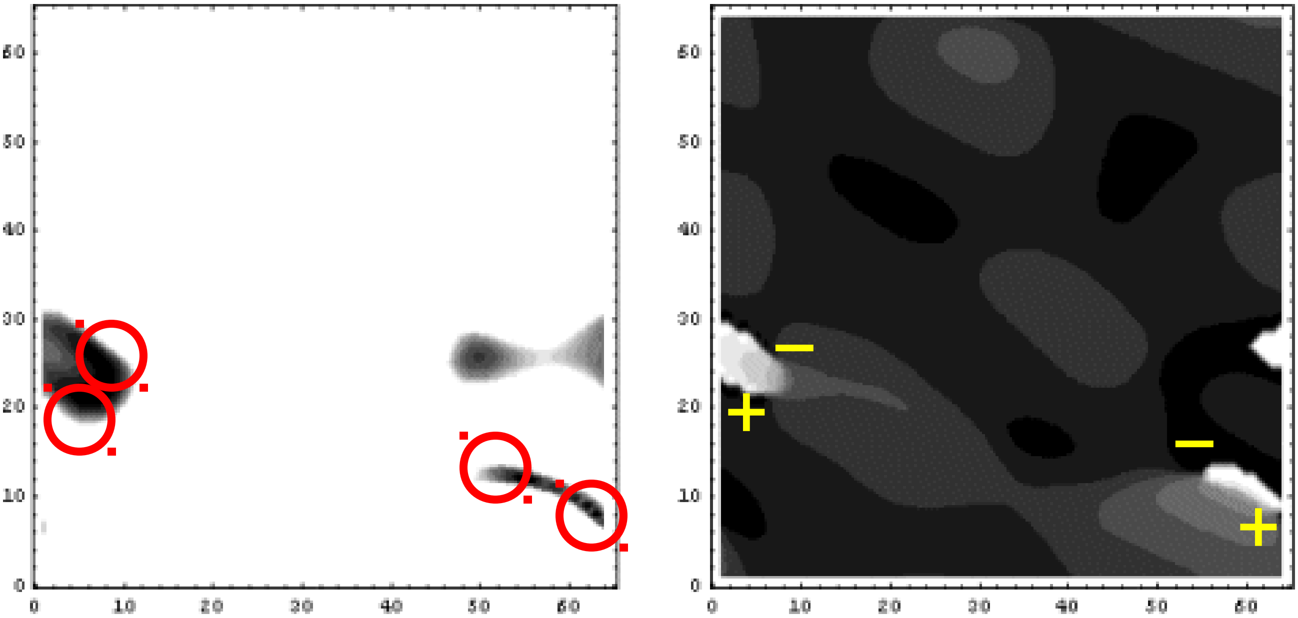


渦対のできる部分が薄くなる



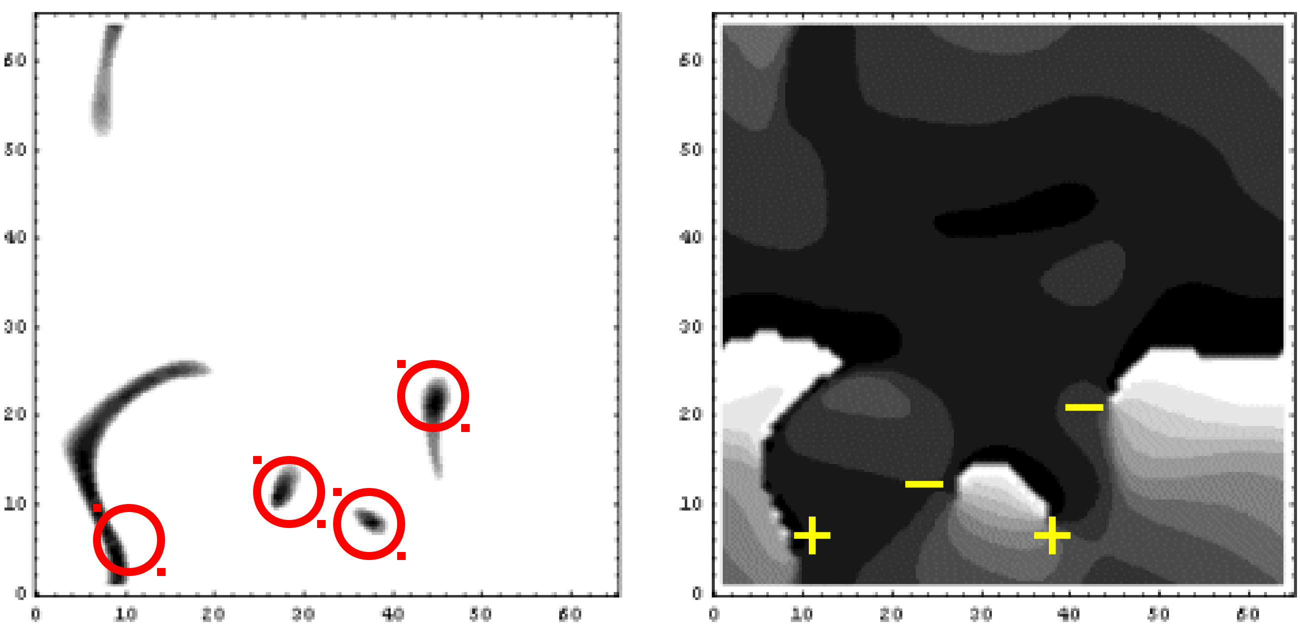
位相が乱れ始める

0.19[ns]



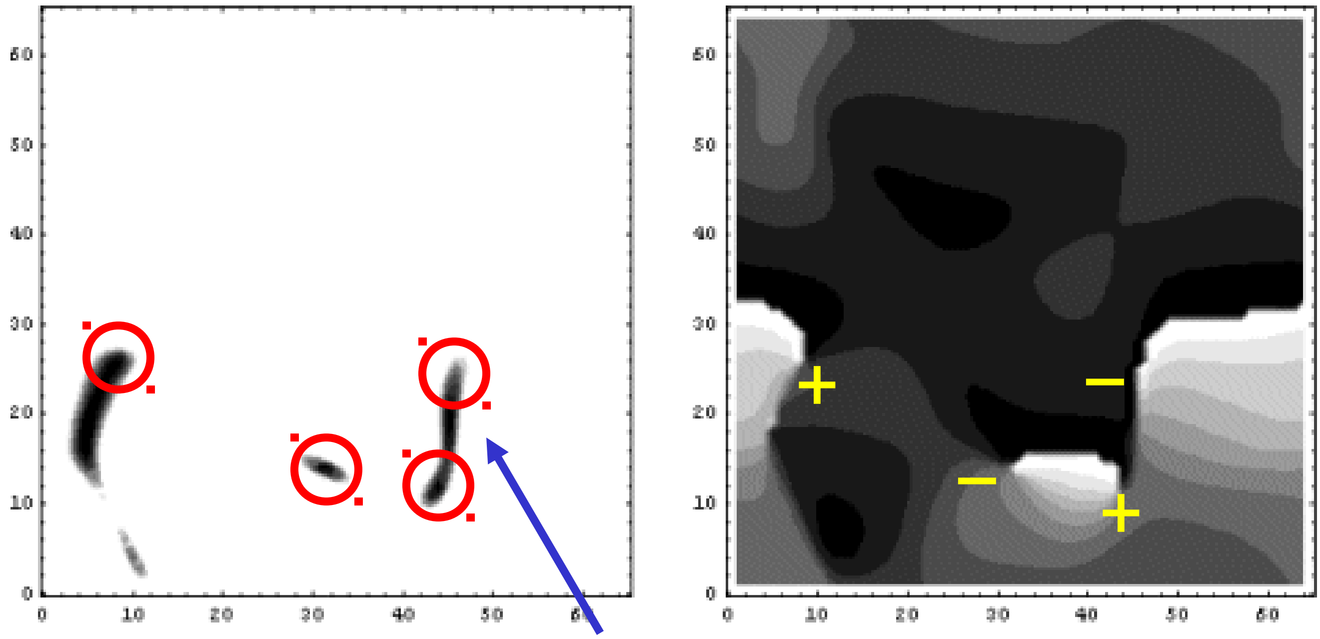
t = 0.23[ns]

渦対生成！！



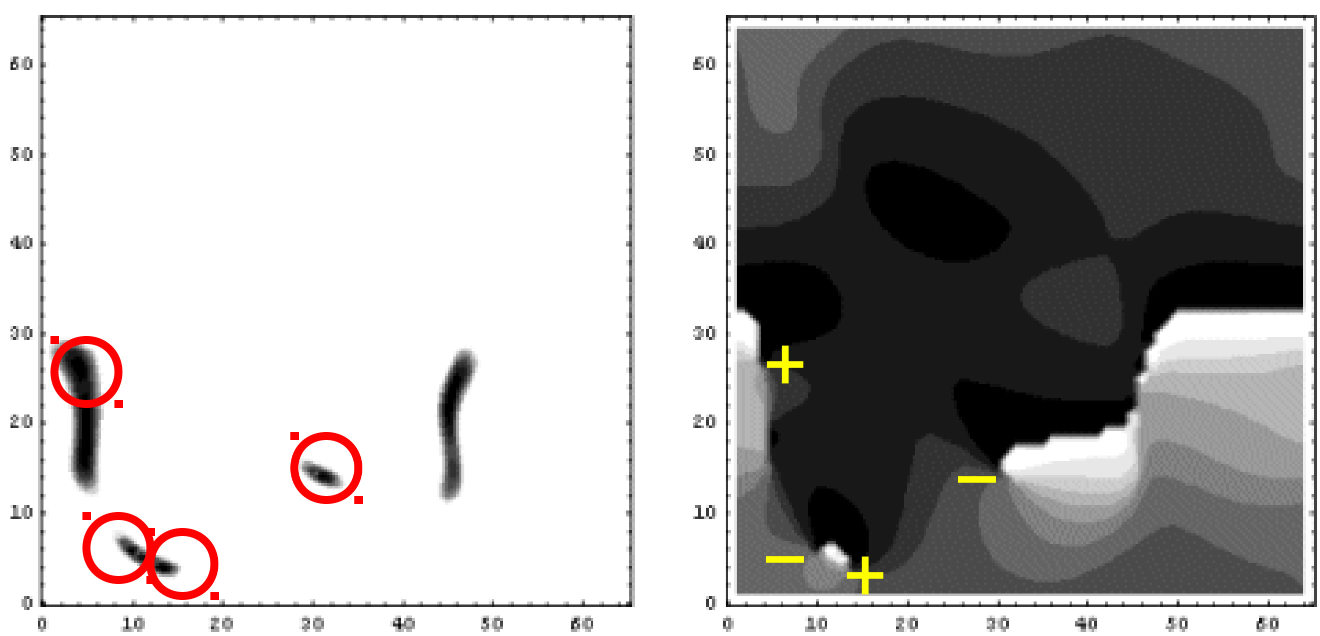
渦対の移動

0.40[ns]



2つの渦の接近

t = 0.49[ns]



渦対の消滅と新たな渦対の生成！！

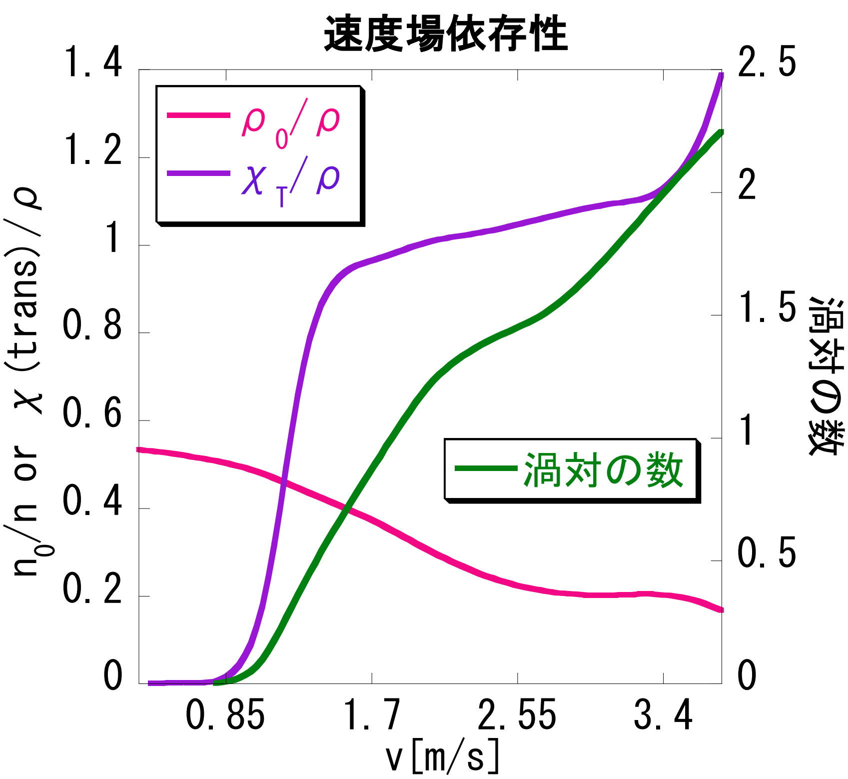
0.58[ns]

フーリエ0成分、感受率、渦対の数

流れをかけたときの波動関数のフーリエ0成分、速度場に対する運動量の横応答、渦対の数における流れの大きさ依存性、時間依存性を調べる。

運動量の速度場に対する応答

$j_i(r) = \chi_{ij}(r, v) v_j$ （もはや線形ではない）



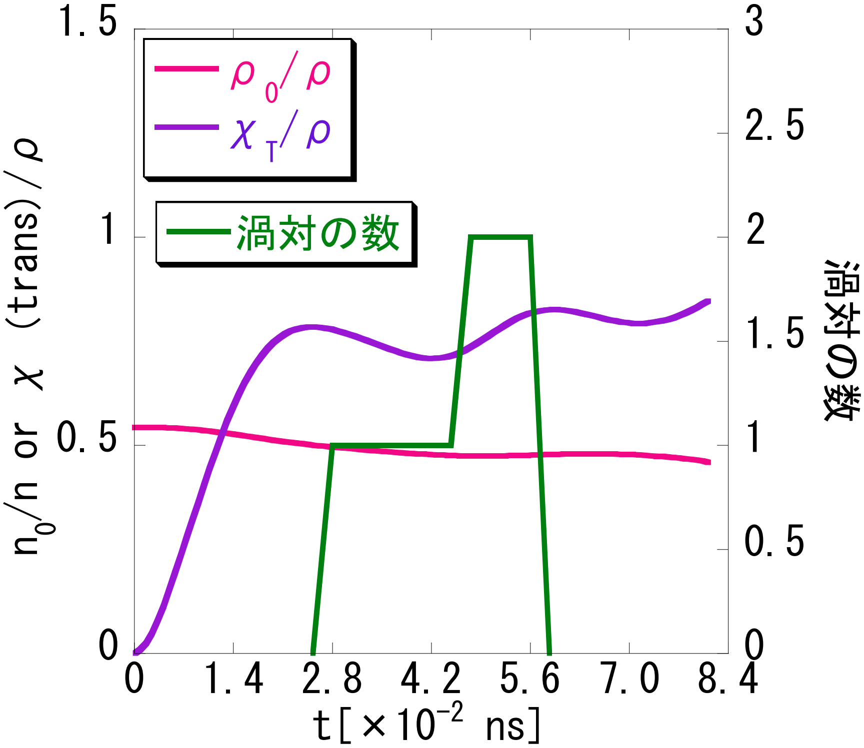
ξ：回復長
λ：ポテンシャルの空間変化
$\overline{N}$：平均粒子密度
$\overline{V}$：平均のポテンシャル強度
ρ_0：フーリエ0成分
χ_T：χ_{ij}の横成分

1000個のアンサンブル平均（1つのアンサンブルについて時間平均）

$$\overline{V} = 1.8 \times 10^{-24} [J]$$
$$\xi = \lambda = 500 [\text{Å}]$$
$$\overline{N} = 4 \times 10^{14} [/m^2]$$

ある臨界速度を超えると渦ができ、渦ができることによって運動量の応答が大きくなる

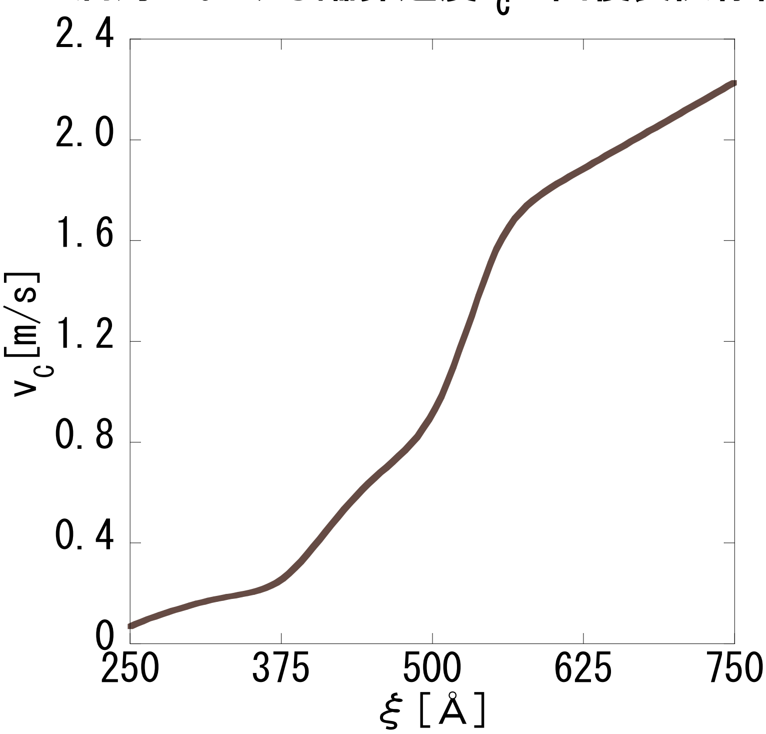
一つのアンサンブルについての時間変化



$\overline{V} = 1.8\times10^{-24}[J]$
$\xi = \lambda = 500Å$
$\overline{N} = 4\times10^{14}[/m^2]$
$v = 1.3[m/s]$

応答が大きくなってから渦ができる

渦対における臨界速度v_cの回復長依存性



ξ:回復長
λ:ポテンシャルの空間変化
$\overline{N}$:平均粒子密度
$\overline{V}$:平均のポテンシャル強度
ρ_0 :フーリエ0成分
χ_T :χ_{ij}の横成分

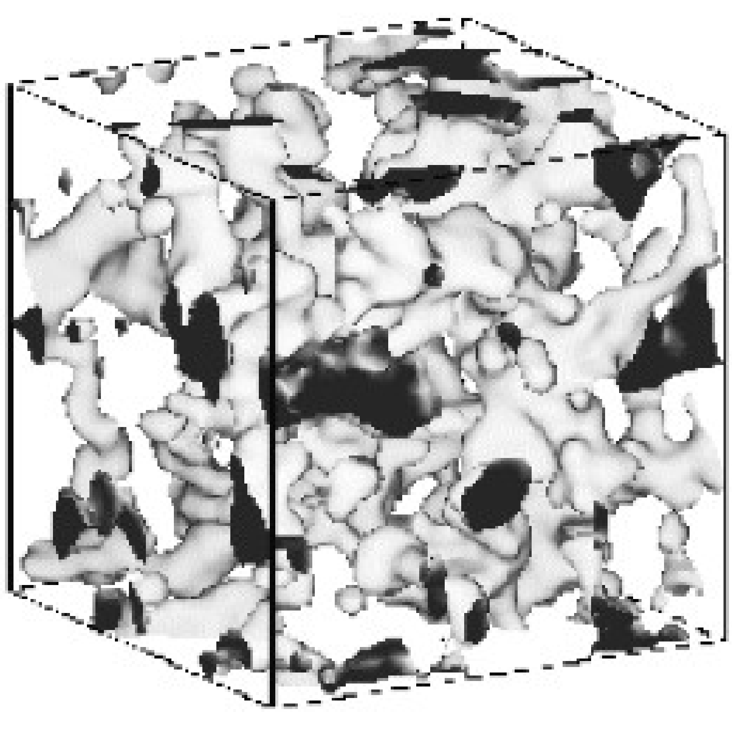
10個のアンサンブル平均

$\overline{V} = 1.8\times10^{-24}[J]$
$\overline{N} = 4\times10^{14}[/m^2]$

回復長が短いと臨界速度が小さい(ρ_Sのときと同じ)

3、まとめと課題

- 二次元ランダムボース系の超流動の特性を**GP**方程式を用いて記述した。
- 基底状態を求め、超流動密度を計算した。
- 基底状態に流れを加えることにより、渦対の生成・消滅を観測した。
- 非凝縮体の効果の取り入れ
- 3次元への拡張（**Vycor**、**Aerogel**中の**He**）



３次元ランダムポテンシャル

円対称なポテンシャルの場合、線形安定性から、臨界速度が近似的に

$$1=\frac{m}{8\pi^2\hbar^2}\int d^2r\left|\min[0, mv_C{}^2\{(\frac{R}{r})^2(2\cos\theta-1)\}+gf(r)\right|$$

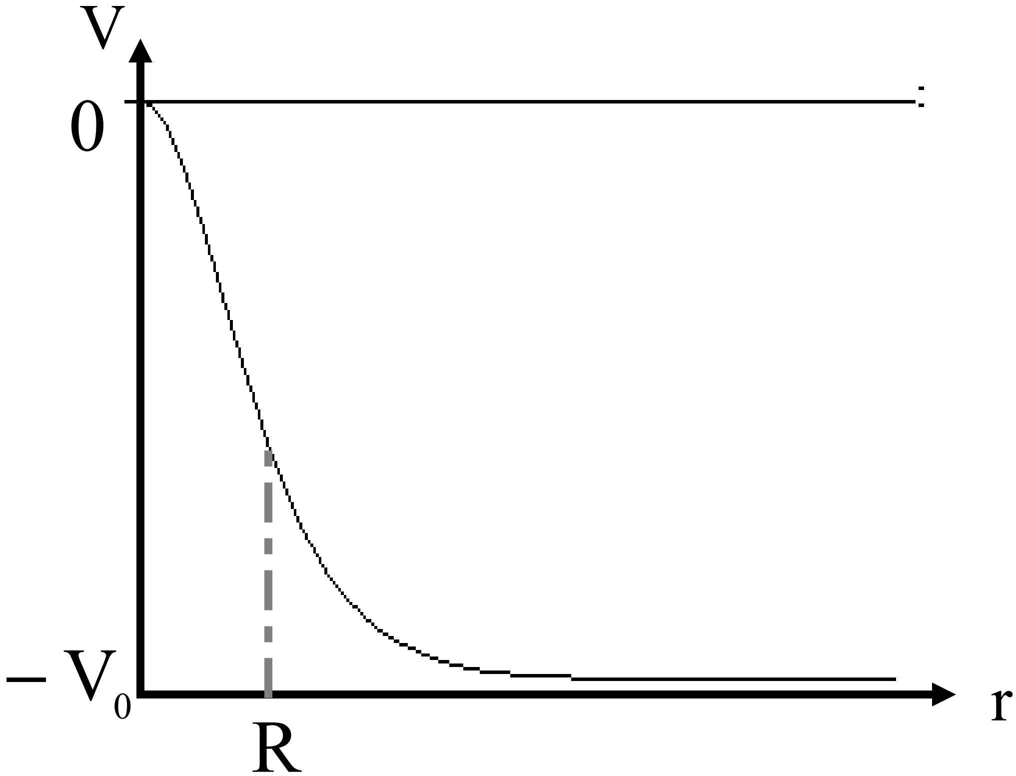
で与えられることが知られている。（f：基底状態の波動関数）

J.S.Stießberger and W.Zwerger Phys. Rev.A,62(2000)061601

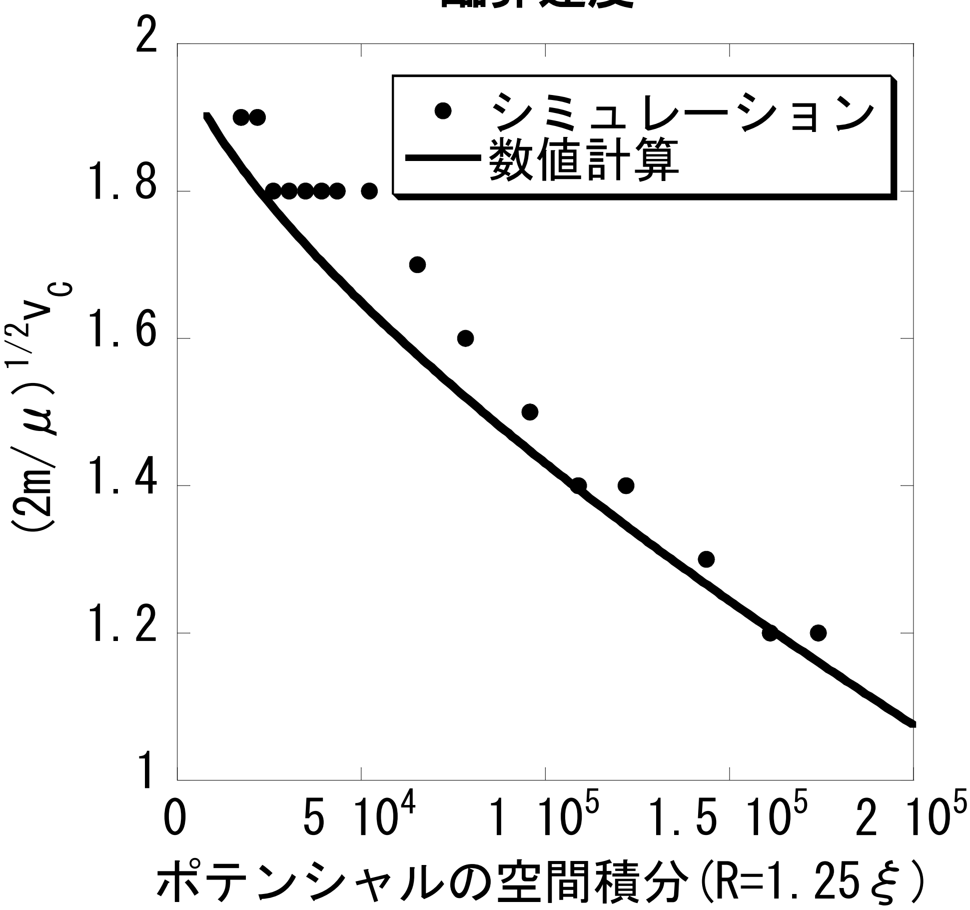
例えば

$$V=-V_0\tanh^2\frac{r}{R}$$

のポテンシャルを考えた場合、臨界速度をシミュレーションまたは上式から数値的に計算すると、



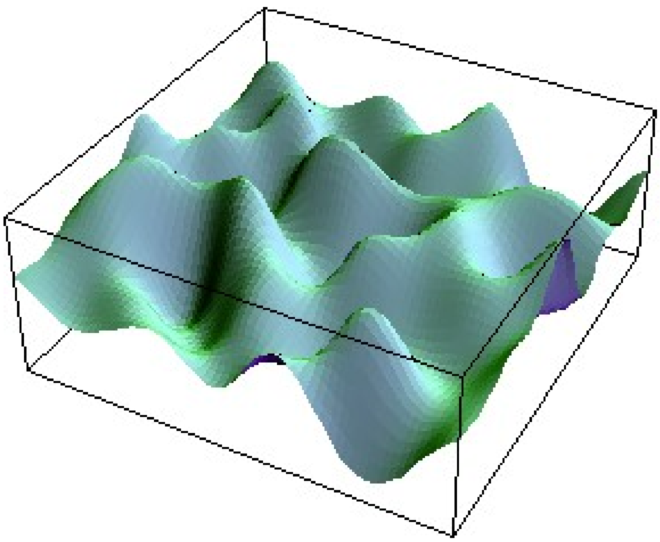
$V=-V_0\tanh^2 r/R$のポテンシャルのときの臨界速度



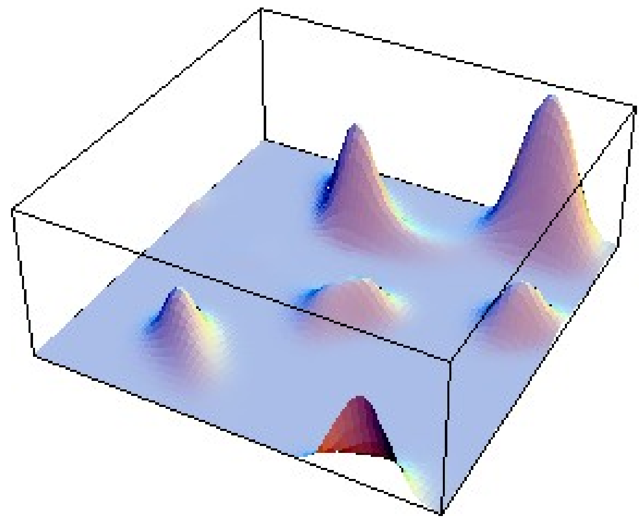
回復長が短い場合

基底状態の近く

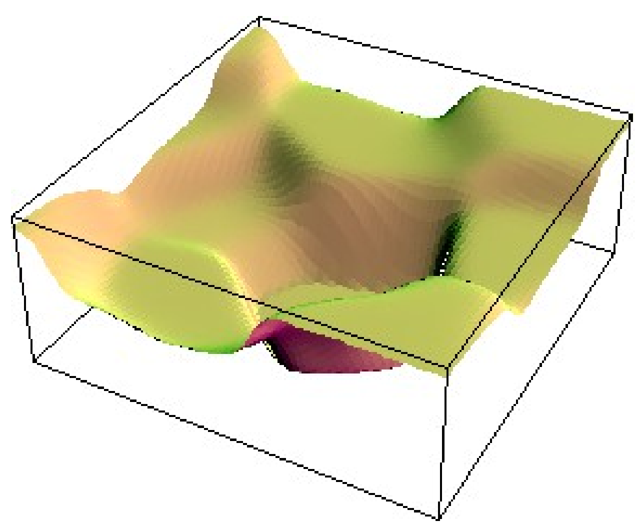
ポテンシャル



基底状態付近の振幅

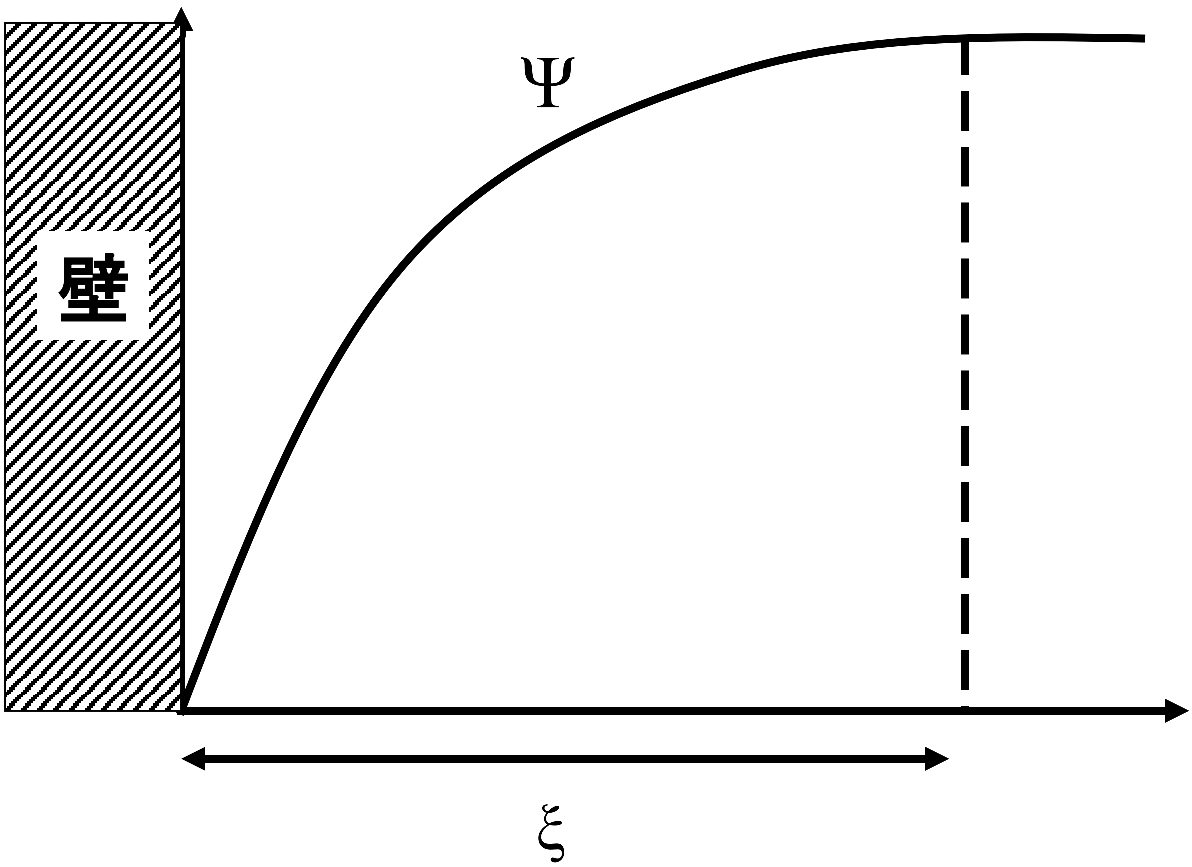


基底状態付近の位相



各振幅の大きい領域ごとに位相の異なる状況

GP方程式のコヒーレンス長：回復長ξ



ξ：壁があったときに波動関数が回復するまでの長さ

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m\mu}$$

バルクの^{4}Heでは数Å程度