

# 周期ポテンシャル中におけるBEC の超流動-Mott絶縁体転移とそれ に伴う凝縮体の干渉

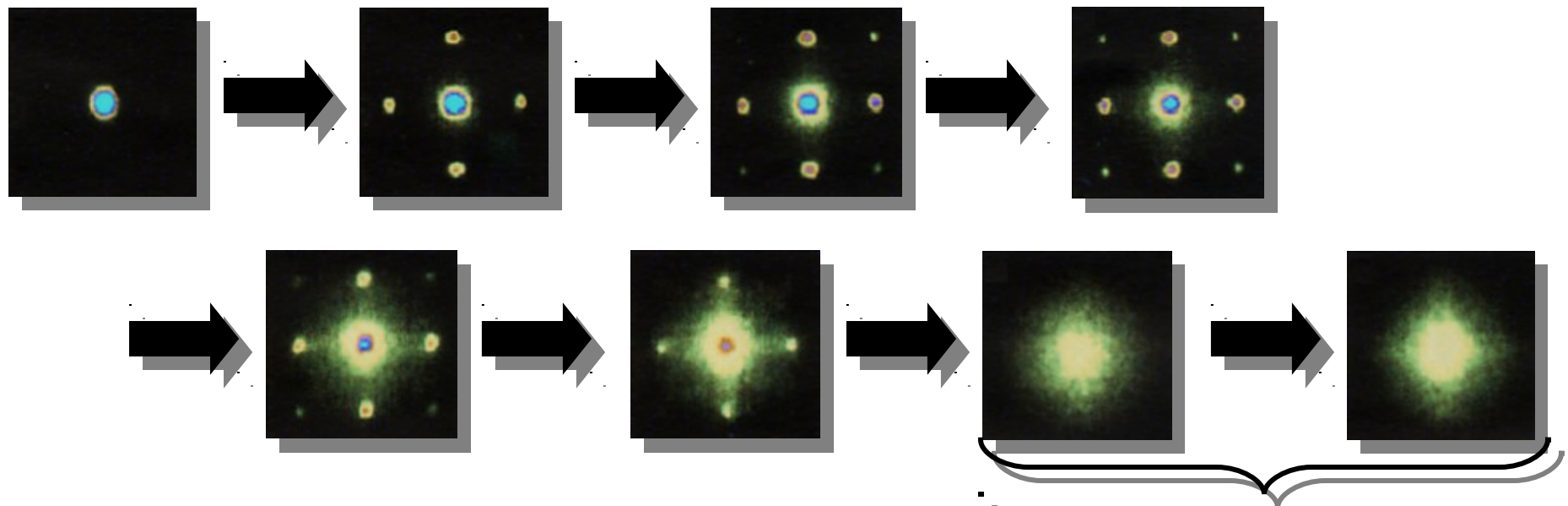
大阪市立大・理 小林未知数 坪田誠

- 研究目的
- 計算結果
- 基底状態
- 周期ポテンシャル中のダイナミクス
- 周期+トラップポテンシャル中のダイナミクス
- まとめと今後の課題

# 1、研究目的

Optical lattice 中でのアルカリ原子気体のBECの超流動-Mott絶縁体量子相転移の成功

Optical lattice の強度を大きくしてゆくとそれまで見えていた凝縮体の干渉模様が消失する⇒超流動-Mott絶縁体量子相転移



# 実験結果を二次元Gross-Pitaevskii方程式の数値シミュレーションを用いることによって考察する

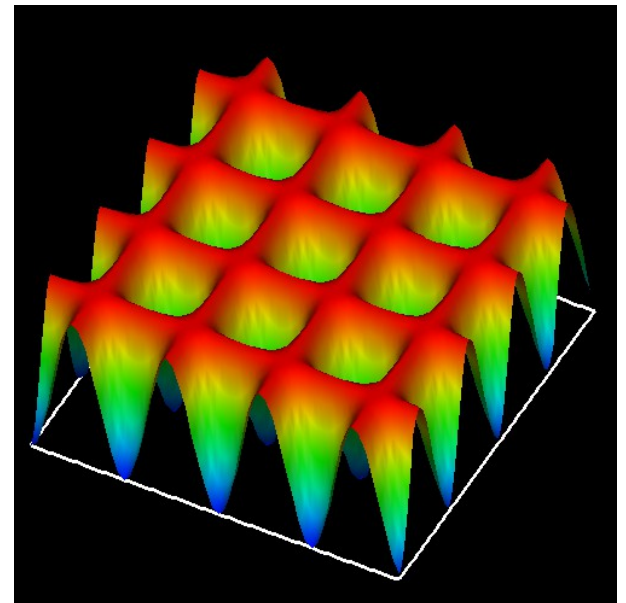
BECの巨視的波動関数の時間発展を記述する方程式  
⇒ (数値計算用に無次元化した) Gross-Pitaevskii方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[ -\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t)$$

Optical latticeを周期ポテンシャルで記述する

$$V(\mathbf{x}) = -V_0 \cos^2(kx) \cos^2(ky) \\ (k = \pi)$$

$V_0$ : 周期ポテンシャルの特徴的な強さ



# 研究内容

- 周期ポテンシャル中での基底状態におけるBECの性質⇒線形応答による超流動密度とHFB方程式による励起スペクトル
- 周期ポテンシャル中での基底状態からポテンシャルをはずした時のダイナミクス
- 周期ポテンシャル＋二次のトラップポテンシャル中（実験条件との対応）で、二次のトラップポテンシャルをはずした時のダイナミクス

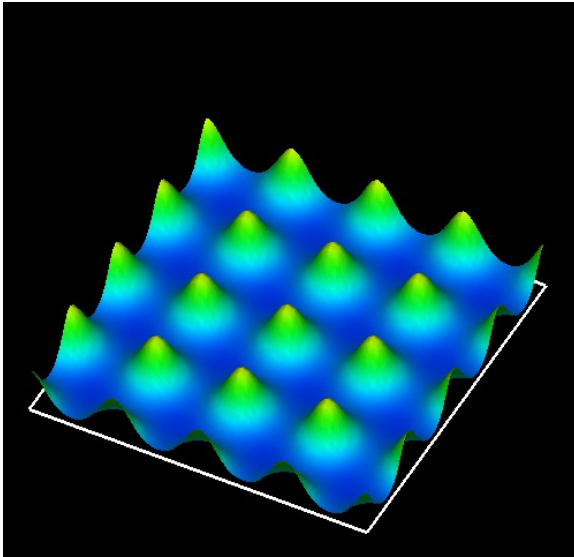
以上にどのような周期ポテンシャルの強度依存性が現れるかを調べる。

## 2、計算結果

### I、基底状態

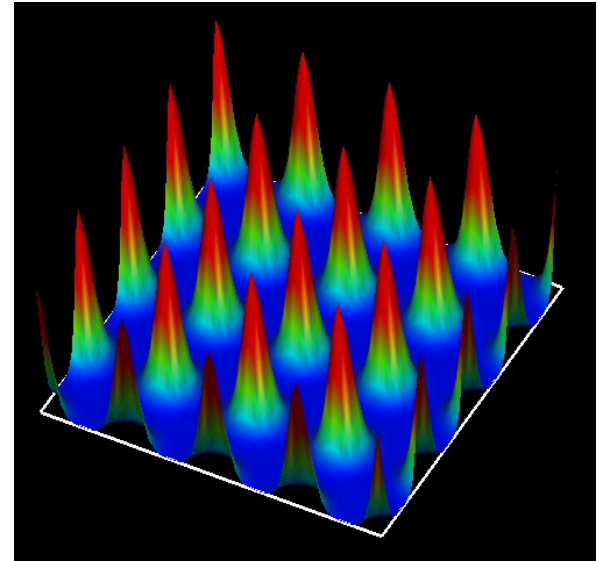
Gross-Pitaevskii方程式に適切な散逸を導入し、時間発展の定常状態を求めることで得られる

$$V_0 = 50$$



$$|\Phi(x, y)|^2$$

$$V_0 = 200$$

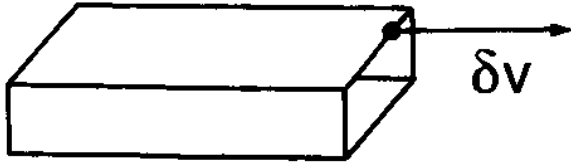


ポテンシャルが強いほど基底状態は局在する⇒超流動にどのような影響を与えるだろうか？

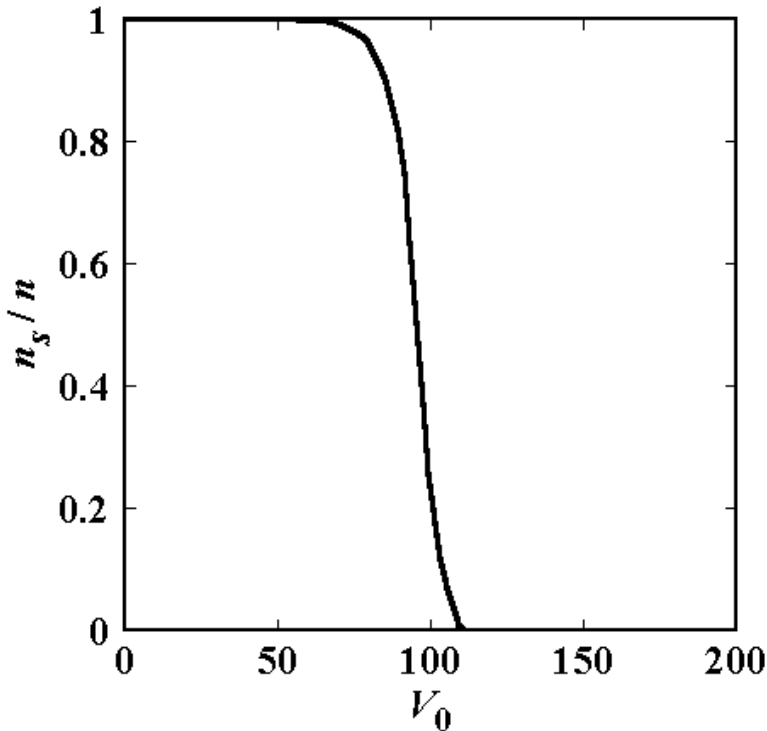
# II、超流動密度の計算

## 超流動密度の計算：線形応答理

論 P.C.Hohenberg and P.C.Martin, Ann.Phys(NY) 34,291(1965)



管を引っ張ることにより作られる横方向の速度場は常流体によるもの  
と考える。



$$j_i(\mathbf{x}, t) = D_{ij}(\mathbf{x}, t)v_j$$

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} A(\mathbf{k}) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) B(\mathbf{k})$$

$$B(\mathbf{k}) \xrightarrow{k \rightarrow 0} n_n$$

$$n_s = n - n_n$$

$v_j$  : 系に加える微小流れ場

$j_i(\mathbf{x}, t)$  : 系の運動量の応答

$D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  : 応答感受率

$B(\mathbf{k})$  : 応答感受率のフーリエ変換の横成分

$n_n$  : (粘性を持つ) 常流動密度

$n_s$  : (粘性を持たない) 超流動密度

$n$  : 粒子数密度

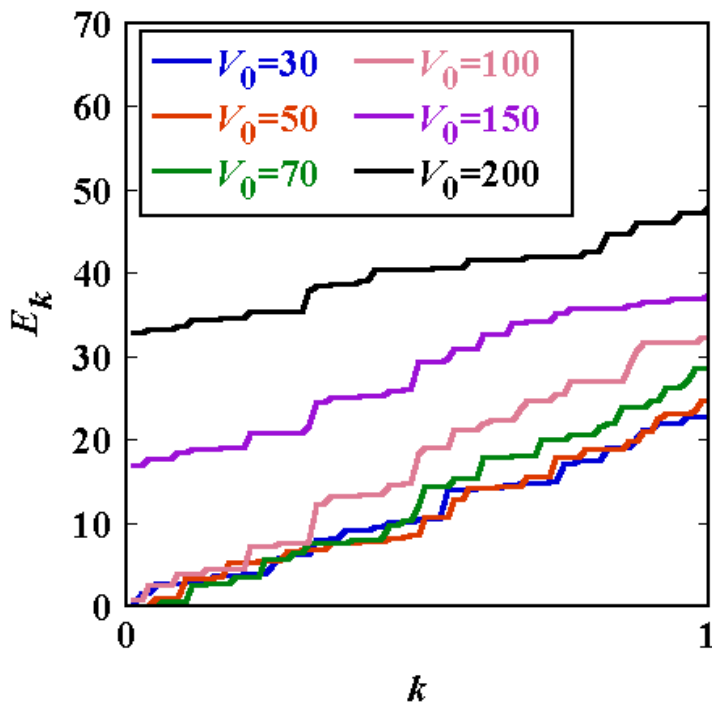
超流動があるポテンシャルの強さ以上で急激に減少⇒絶縁体

# III、Hartree-Fock-Bogoliubov方程式を用いて基底状態に対する揺らぎへの励起スペクトルを計算する

励起スペクトル⇒揺らぎの低次の項を取り込んだHartree-Fock-Bogoliubov方程式

$$\begin{bmatrix} -\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + 2n(\mathbf{x}) & -m(\mathbf{x}) \\ m(\mathbf{x})^* & \nabla^2 - V(\mathbf{x}) - 2n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k(\mathbf{x}) \\ v_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = E_k \begin{bmatrix} u_k(\mathbf{x}) \\ v_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$u_k(\mathbf{x}), v_k(\mathbf{x})$  : 揺らぎに対する Bogoliubov 変換の係数  
 $E_k$  : 揺らぎへの励起スペクトル  
 $n(\mathbf{x}) = |\Phi(\mathbf{x})|^2, m(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})^2$

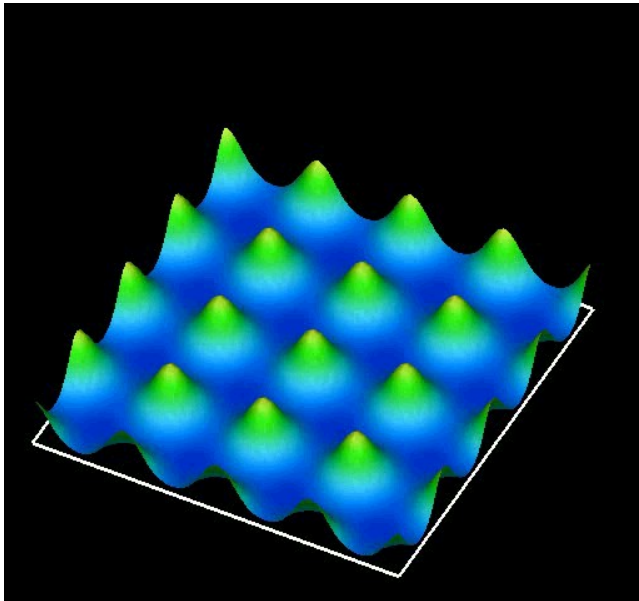


強い周期ポテンシャルで励起スペクトルの長波長部分でギャップが生じる⇒系の長距離相関の消失

# IV、ダイナミクス：周期ポテンシャルからの解放

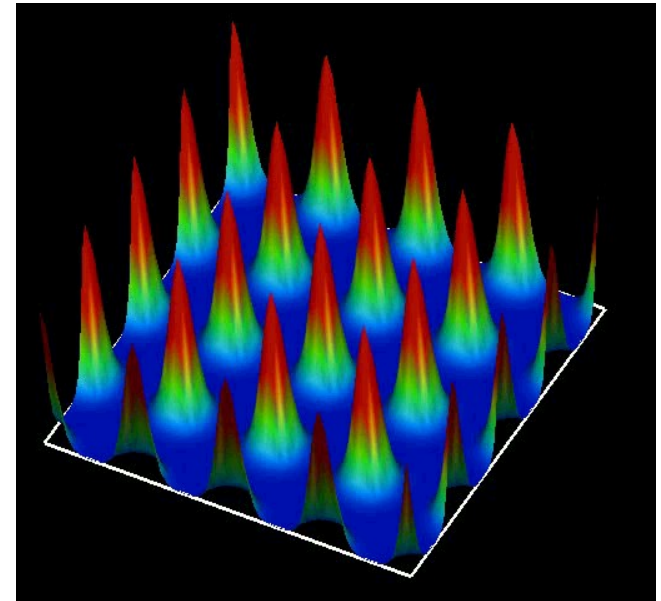
基底状態において周期ポテンシャルをはずした時のダイナミクスを計算する

$$V_0 = 50$$



$$|\Phi(x, y)|^2$$

$$V_0 = 200$$



ポテンシャルが強い時は局在した波動関数同士がつながらず、干渉模様を引き起こす⇒系の相関がなくなっていて超流動になっていない。

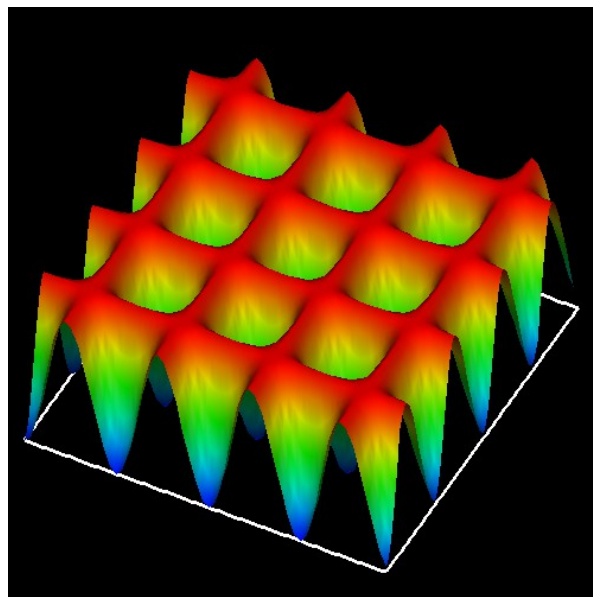


# V、ダイナミクス：二次ポテンシャルからの解放

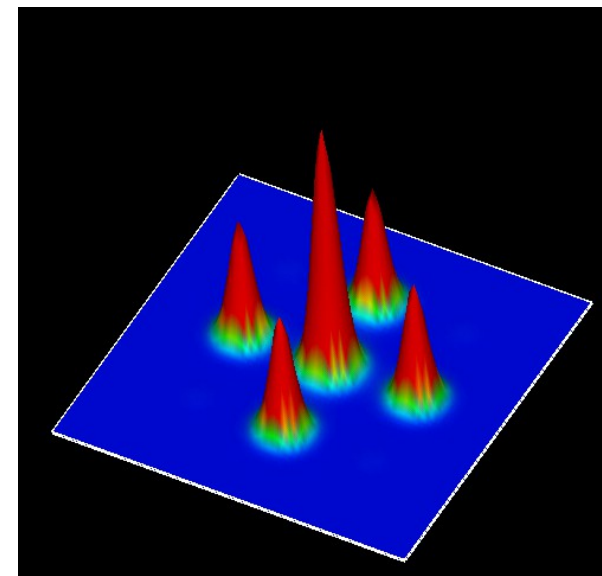
周期ポテンシャル中の系を二次ポテンシャルに閉じ込めた後、

そこから解放する。 $V(\mathbf{x}) = -V_0 \cos^2(kx) \cos^2(ky) + \frac{x^2 + y^2}{r^2}$  ( $r = 0.25$ )

$V_0 = 50$



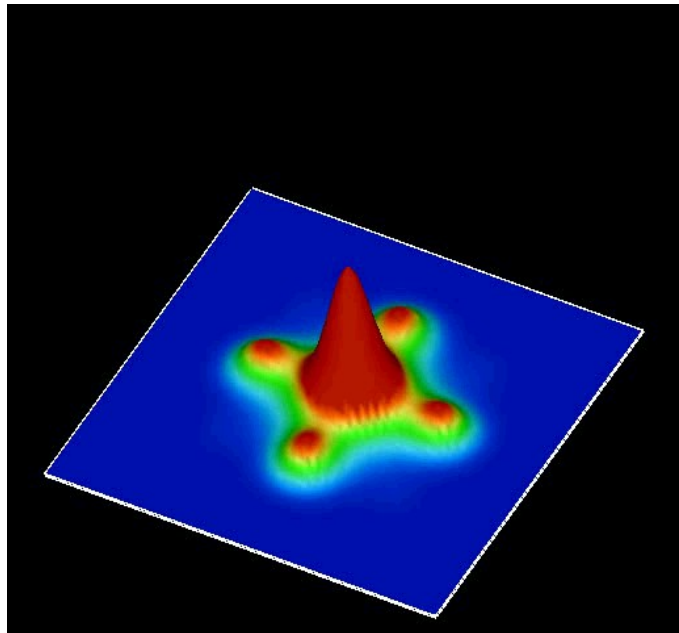
$V_0 = 200$



$$|\Phi(x, y)|^2$$

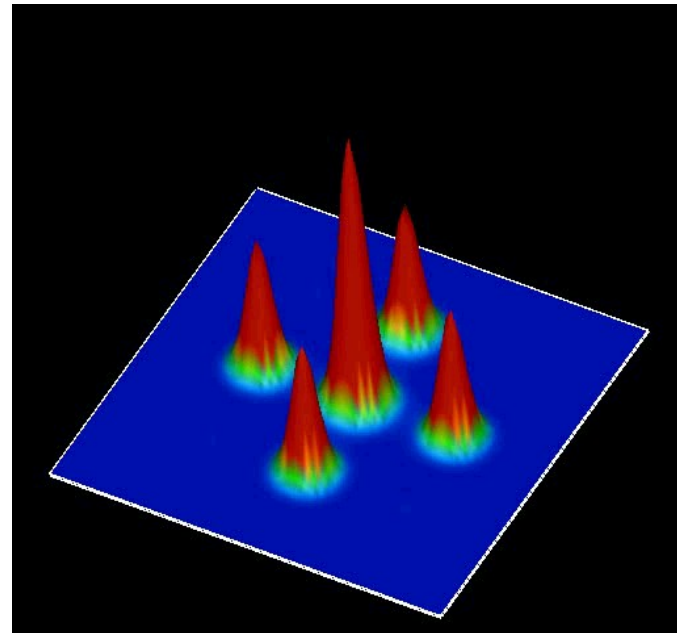
凝縮体がどのように外側へ伝播してゆくか調べる

$$V_0 = 50$$



$$|\Phi(x, y)|^2$$

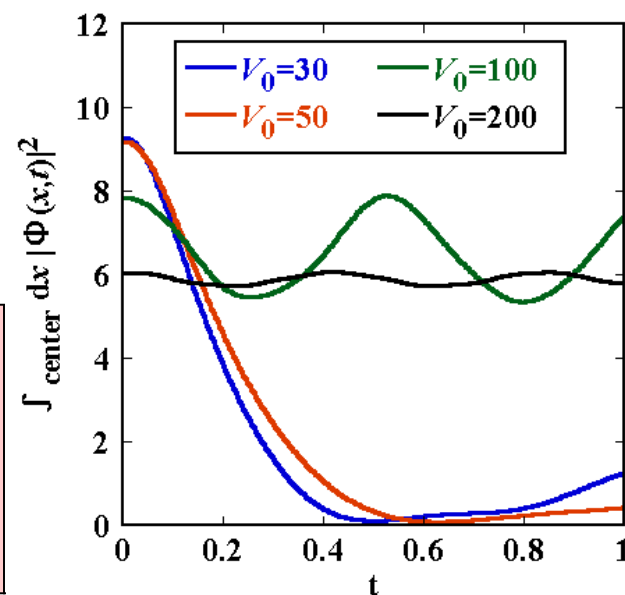
$$V_0 = 200$$



中央の極小部分におけるノルムを計算

$$\int_{\text{center}} d\mathbf{x} |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$$

周期ポテンシャルが強いと波動関数は外側へ伝播せず振動する  
⇒絶縁体への転移



# 実験との比較

超流動から絶縁体への転移点の考察

超流動密度  $\Rightarrow V_0 \approx 90$

励起スペクトルのギャップ  $\Rightarrow V_0 \approx 100$

周期ポテンシャルをはずした時の

ダイナミクス  $\Rightarrow V_0 \approx 60$

トラップポテンシャルをはずした時の

ダイナミクス  $\Rightarrow V_0 \approx 70$

実験結果を今回の計算の条件に  
照らし合わせると  $V_0 \cong 120$

粒子間相互作用と  
の関係は？

### 3、まとめと今後の課題

Gross-Pitaevskii方程式の数値計算により、次のような超流動-絶縁体転移の徴候を得た

- 線形応答理論で得られた超流動密度が急激に減衰する。
- Hartree-Fock-Bogoliubov方程式で得られた励起スペクトル中にギャップが生じる。
- 周期ポテンシャルをはずした時に、局在した波動関数同士がつながらず、干渉を引き起こす
- 系を二次ポテンシャルに閉じ込め、そこからはずした時に、外側へ広がらず内側のみで振動する

実験では転移の際、長距離の相関がなくなることによって干渉模様が見えなくなるのではないか？

## 今度の課題

- 今回得られた計算結果の解析的な考察
- 転移点の決定
- 粒子間相互作用の依存性: 本当にMott絶縁体なのか?
- 相図の描画とBose-Hubbardモデルとの比較

# Mott絶縁体のギャップの観測

