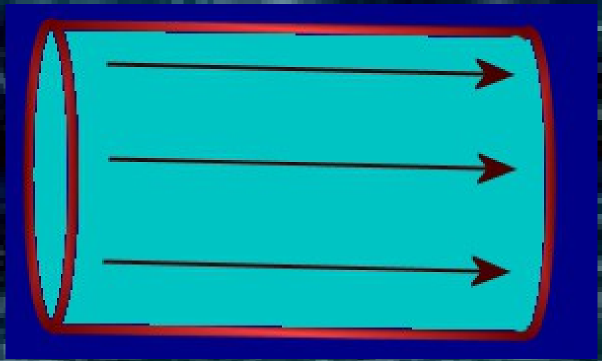
絶対零度近傍の超流動における量子渦系乱流のダイナミクスと統計

大阪市立大学理学部物理学科
物性理論研究室
小林　未知数

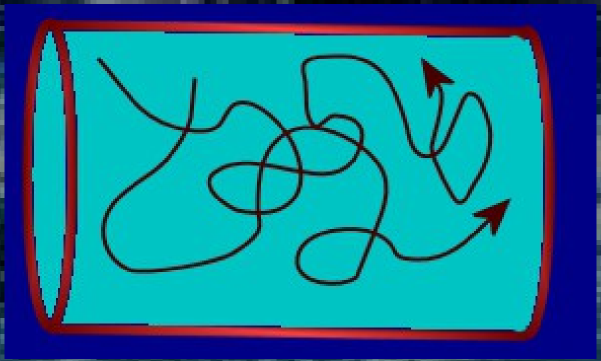
1. 乱流と統計
2. 超流動乱流
3. 数値計算
4. まとめ

1、乱流と統計

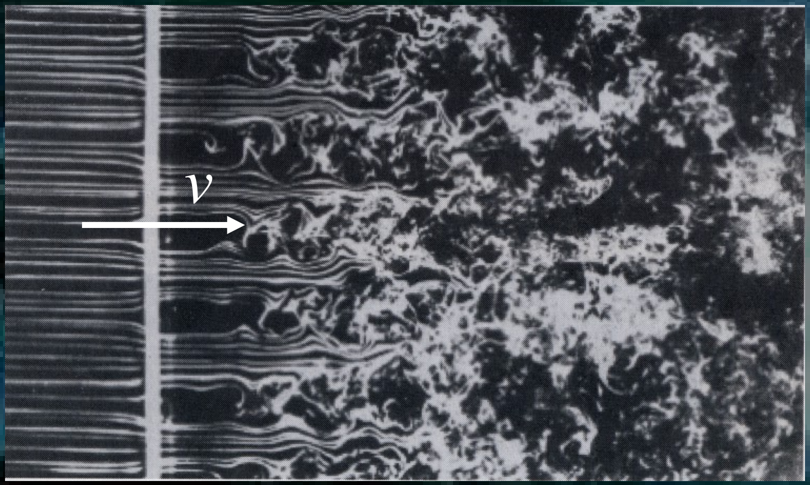
流れが遅いと層流だが

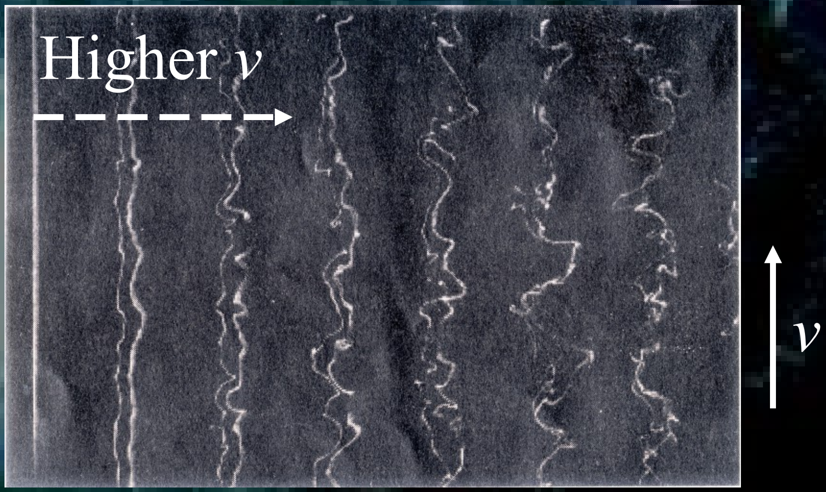


流れが速いと乱流となる



層流から乱流への転移



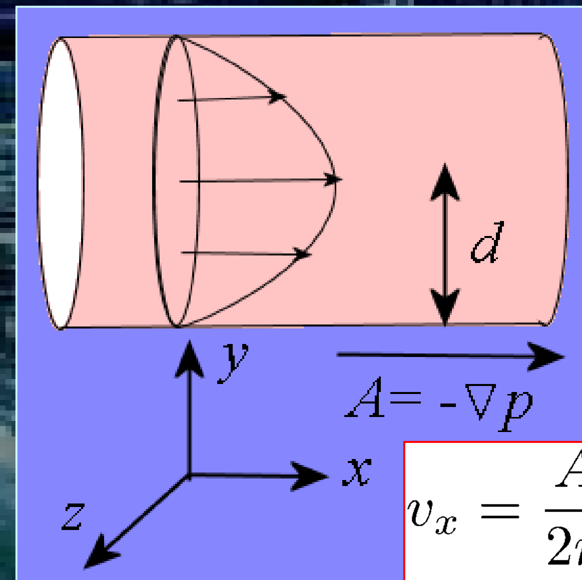


ナヴィエ・ストークス方程式での乱流

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right\}\vec{v} \quad = \quad \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$	:	流体の速度場
ρ	:	密度
$\boldsymbol{F}$	:	外力
p	:	圧力
η	:	粘性率

ポアズイユ流



$$v_x = \frac{A}{2\eta}(d^2 - y^2)$$

層流の解

$$R \equiv \frac{v_x(y=0)d}{\nu} > R_c \fallingdotseq 5200 \rightarrow \text{乱流への転移}$$

□=□/□: 動粘性係数

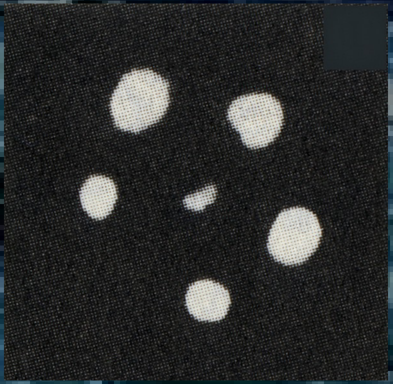
R: レイノルズ数

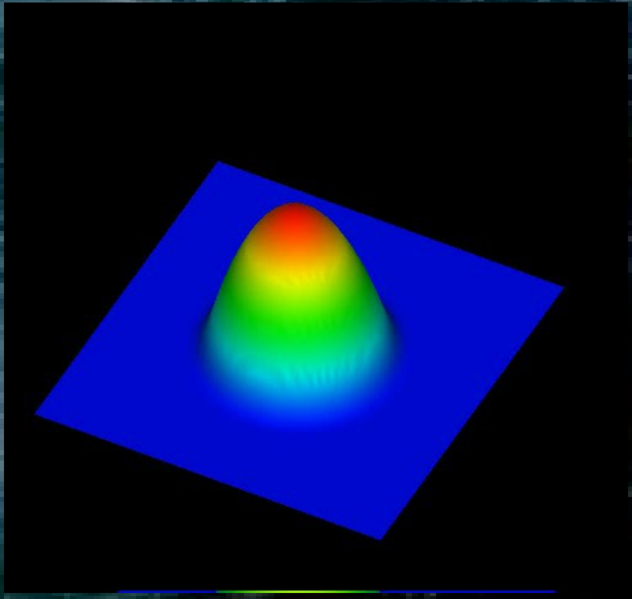
乱流を特徴付けるもの、それは渦

渦度:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}$$

渦とは渦度が集中している部分である

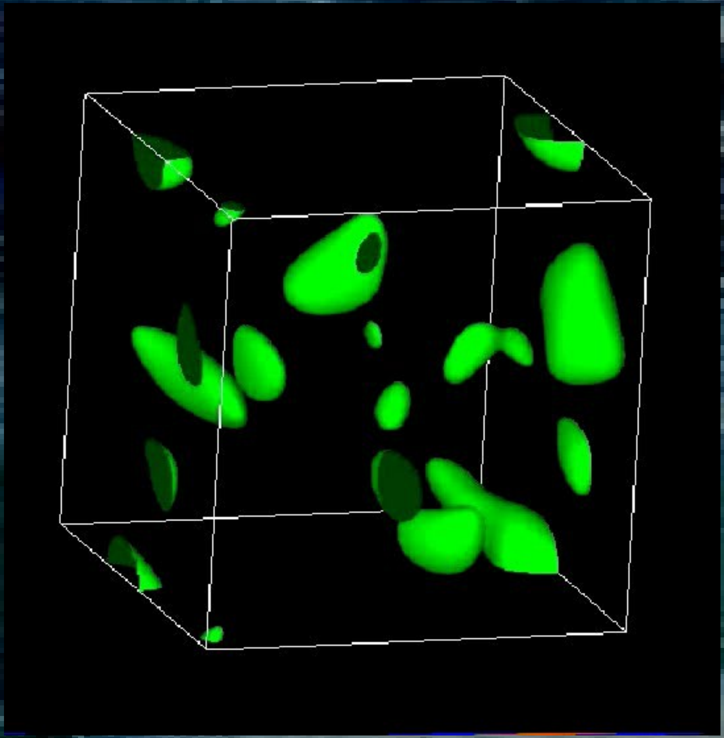


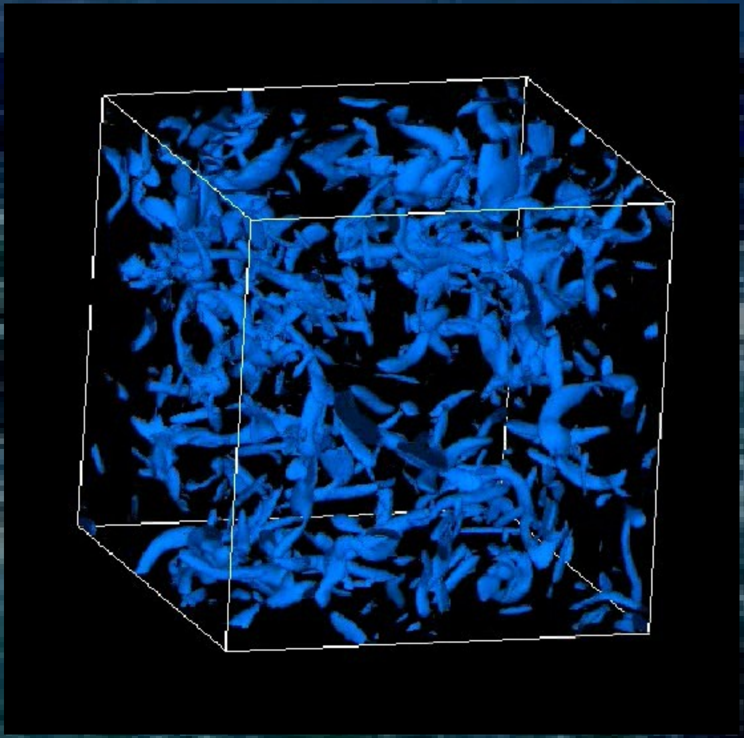


乱流

発達した一様等方乱流

渦度絶対値の等値面図





$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right\}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}$$

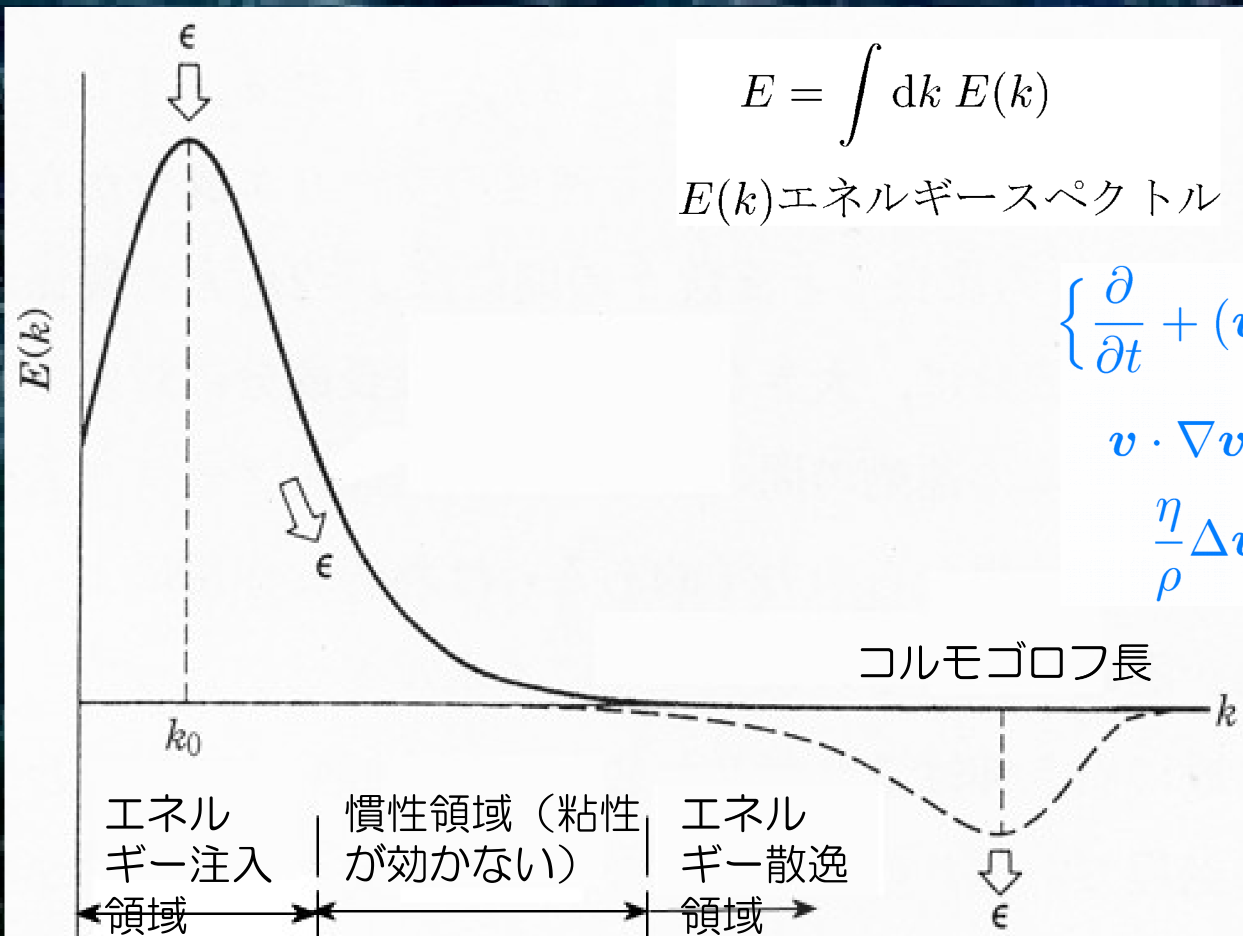
$(\eta^3/\epsilon\rho^3)^{1/4}$: コルモゴロフ長 $\simeq$ 渦の太さ

ϵ : エネルギー散逸率

（エネルギー注入のある）非圧縮流体定常一様乱流の統計則

$$E = \int \mathrm{d}k\, E(k)$$

$E(k)$エネルギースペクトル



$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right\}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}$$

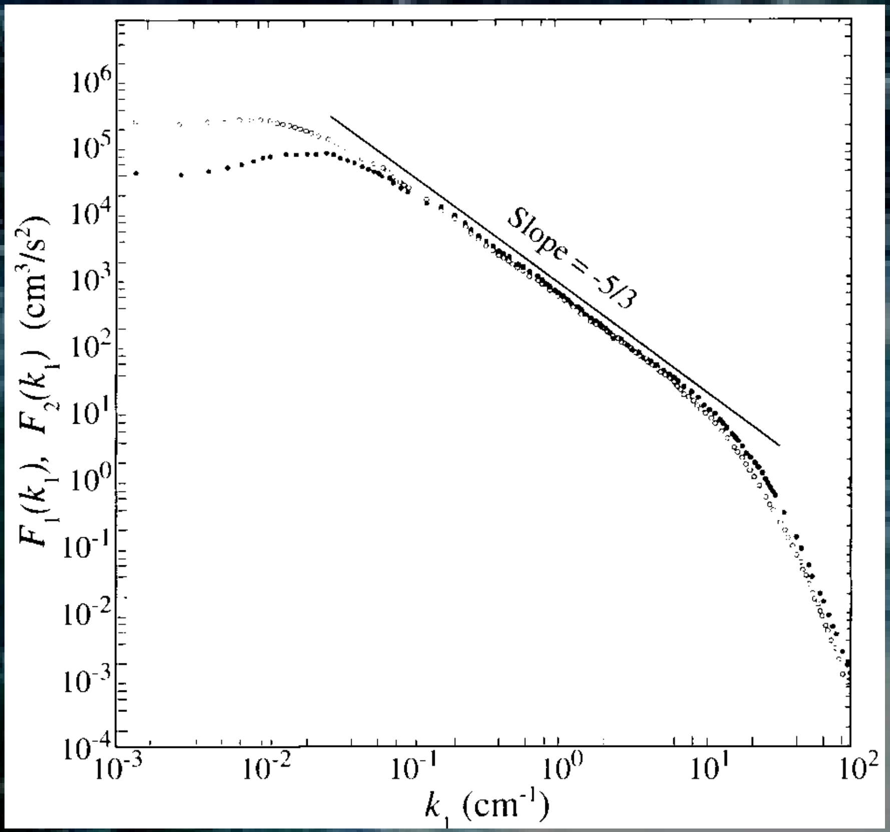
$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \simeq v^2/L$: 慣性項

$\dfrac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v} \simeq \dfrac{\eta v}{\rho L^2}$: 粘性（散逸）項

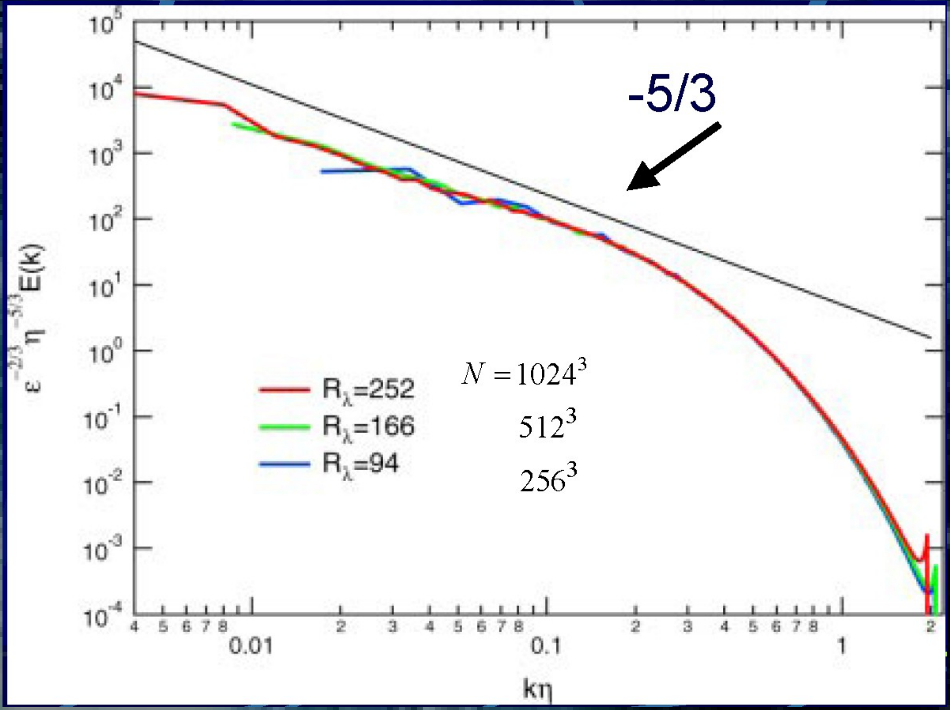
$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}\ (C\sim 1)$$ ： コルモゴロフ則

コルモゴロフ則の検証

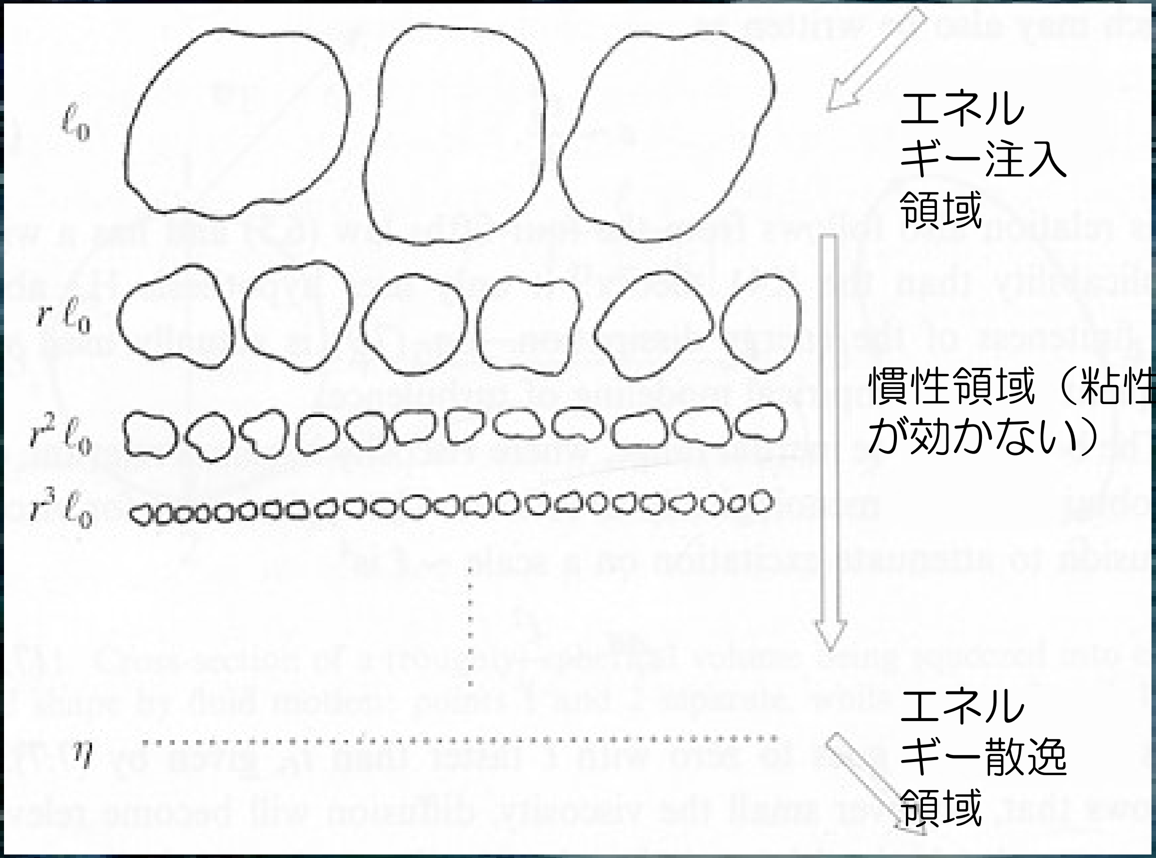
ジェット乱流の実験



ナヴィエーストークス方程式の数値計算



コルモゴロフ則の説明：リチャードソンカスケード

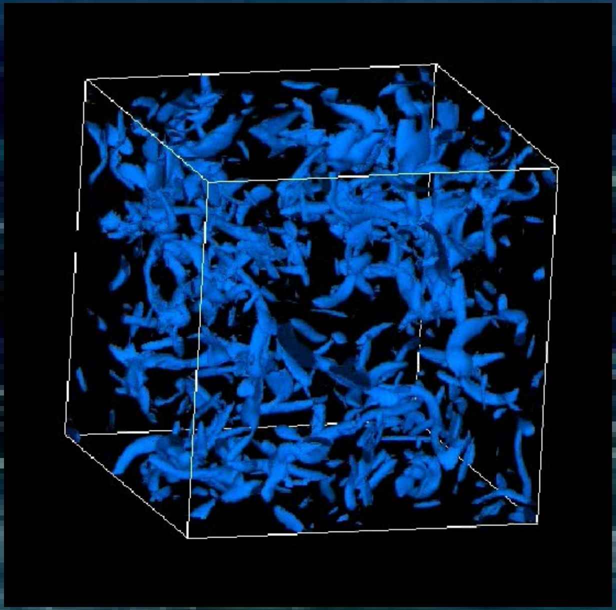


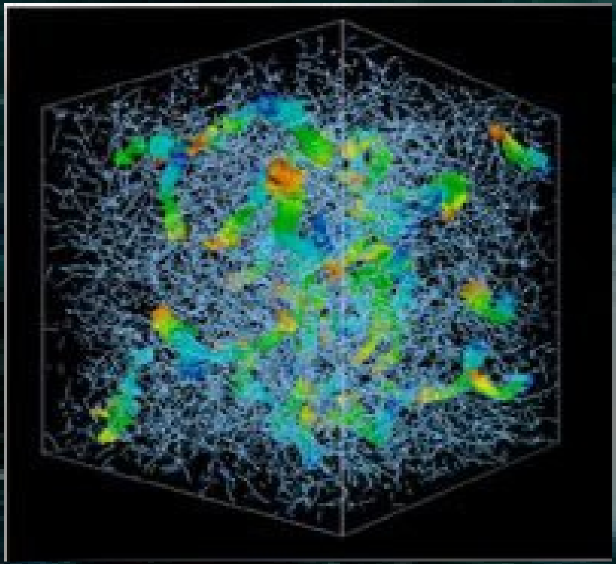
大きなスケールでエネルギーが注入される

慣性領域で渦は分裂し小さくなる

コルモゴロフ長付近で粘性が効き、熱になる

古典流体の渦





1. 渦度や循環 $\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は連続的な任意の値を取る
2. 渦芯はコルモゴロフ長 $(\eta^3/\epsilon\rho^3)^{1/4}$ 程度
3. 渦は粘性があるために消滅したり、生成したりする

渦の同定そのものが困難

⇔量子渦と対照的

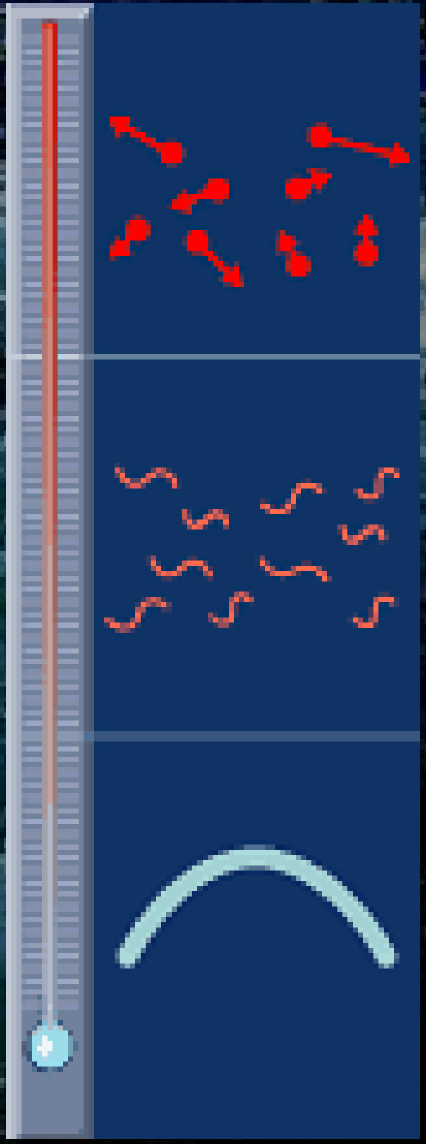
量子流体

高　温

粒子性が顕著

波動性が現れる
（物質波）

個々の波が全て重なって巨視的波動関数を作る（ボース・アインシュタイン凝縮）



低　温

量子渦系

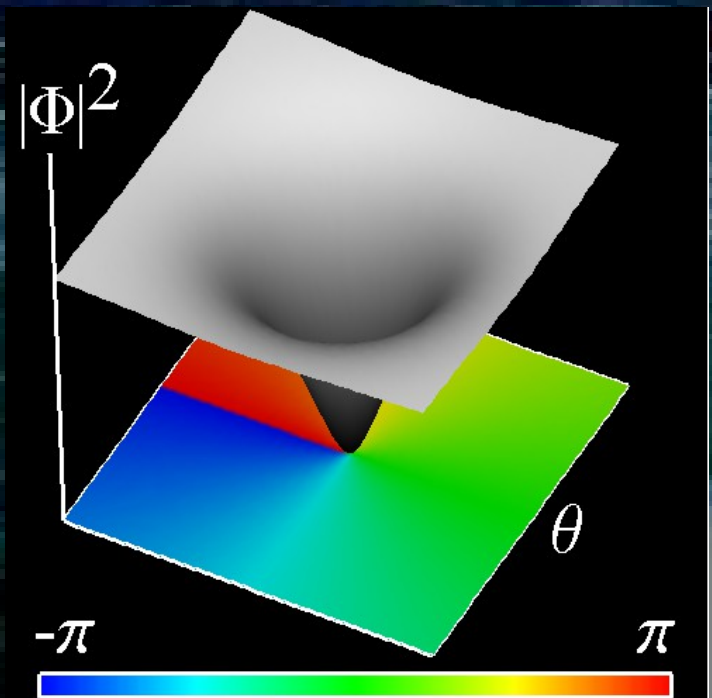
量子流体において

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\boldsymbol{v} = \hbar/m\rho\nabla\theta$

$\rightarrow$ ポテンシャル流（渦なし状態 $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$）



波動関数の特異点＋位相2□のずれ
⇒速度場の回転＝量子渦

•循環の量子化

$$\oint \vec{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{2\pi\hbar}{m}$$

•渦は安定

•渦は端を持たない（渦輪で存在）

•渦芯は回 $\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}$ 程度

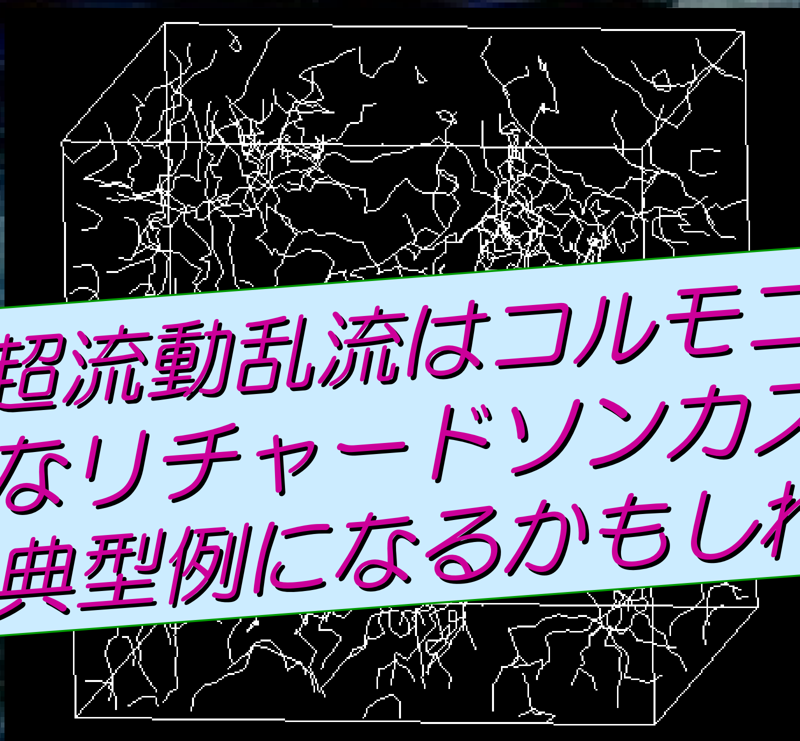
⇒数Å(^{4}He)~数□（原子気体BEC）

理想的な渦系

極低温の超流動乱流

液体^{4}HeはT<2.17でボース凝縮を起こし超流動になる

超流動の速度場 $\boldsymbol{v} = \hbar/m\rho\nabla\theta$



でき

超流動乱流はコルモゴロフ則と、その明確なリチャードソンカスケード描像を与える典型例になるかもしれない

超流動乱流：量子渦糸のタングル状態

Stalp, Skrbek, Donnelly, Phys.Rev.Lett.82,4831(1999)

（間接的であるが）超流動^{4}Heのコルモゴロフ則を観測

Davis, Hendry, McClintock, PhysicaB280, 43(2000)

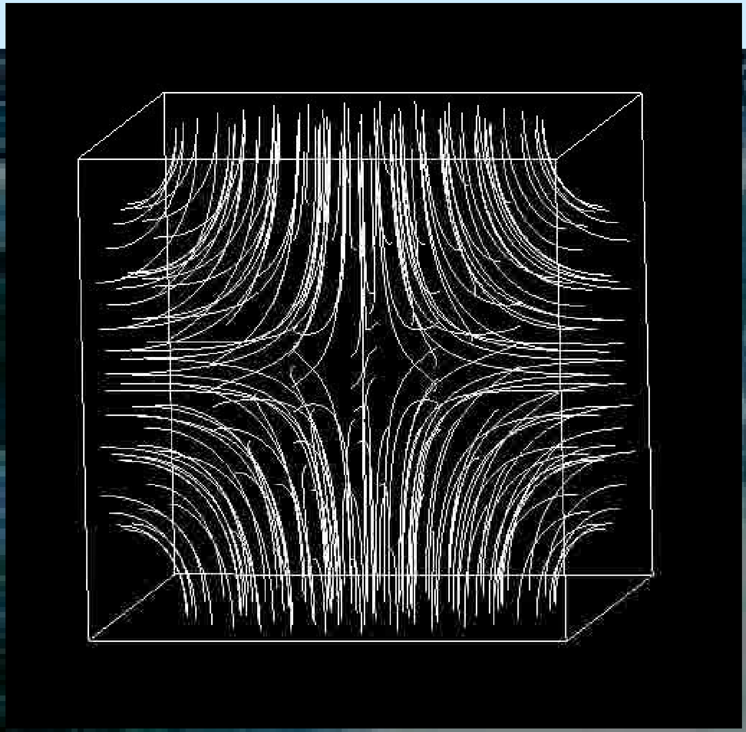
極低温領域で渦糸タングルの減衰を観測

Energy Spectrum of Superfluid Turbulence with No Normal-Fluid Component

T. Araki, MT and S.K.Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. 89, 145301(2002)

渦糸近似を用いて、Taylor-Green vortexのエネルギースペクトルを求めた。

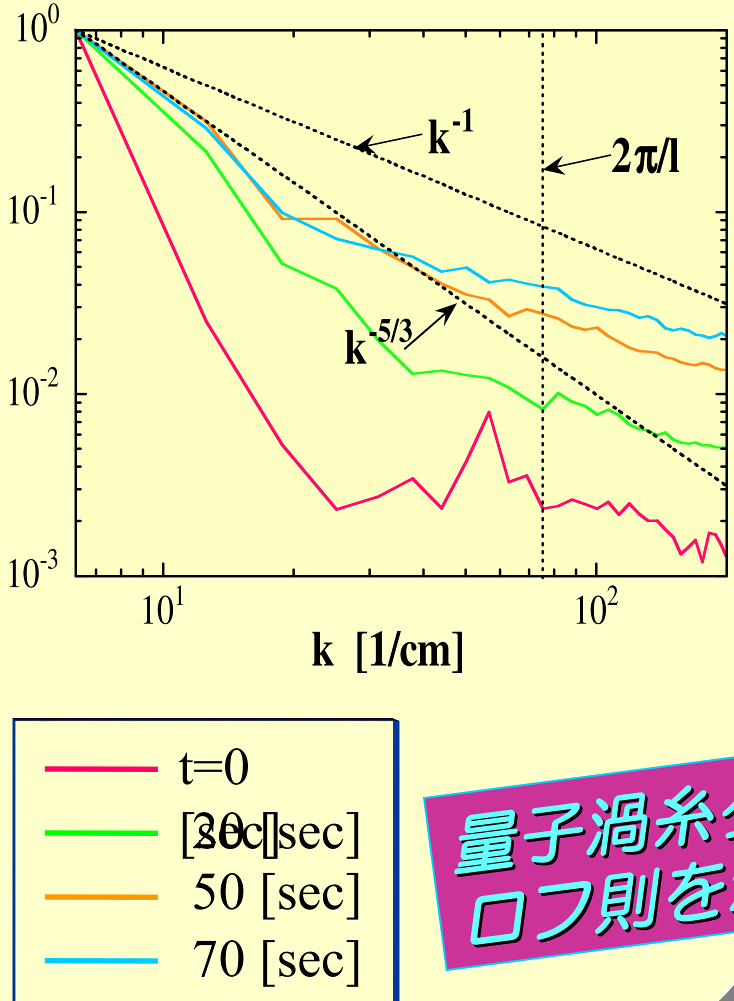
渦糸近似⇒渦糸の芯のサイズを無視



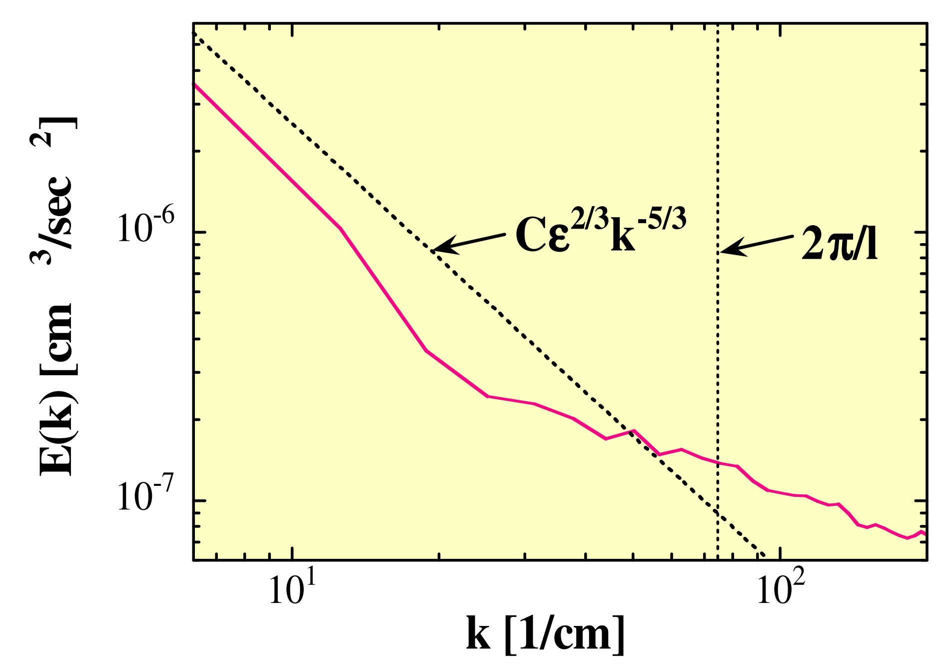
渦糸が作る速度場をビオ・サバールの定理を用いて求め、そこから渦糸のダイナミクスを計算する（初期状態：Taylor-Green vortex）。

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{s}-\mathbf{r})\times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s}-\mathbf{r}|^3}$$

エネルギースペクトルの時間発展



コルモゴロフ則との比較(C=1)



量子渦糸タングルはコルモゴロフ則を示した！

３、数値計算

研究の目的：絶対零度近傍の量子流体が満たす方程式「Gross-Pitaevskii(GP)方程式」を用いて超流動乱流のエネルギースペクトルを求める

Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu + g|\Phi|^2 \right]\Phi$$

Φ : 巨視的波動関数

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間斥力相互作用の結合定数

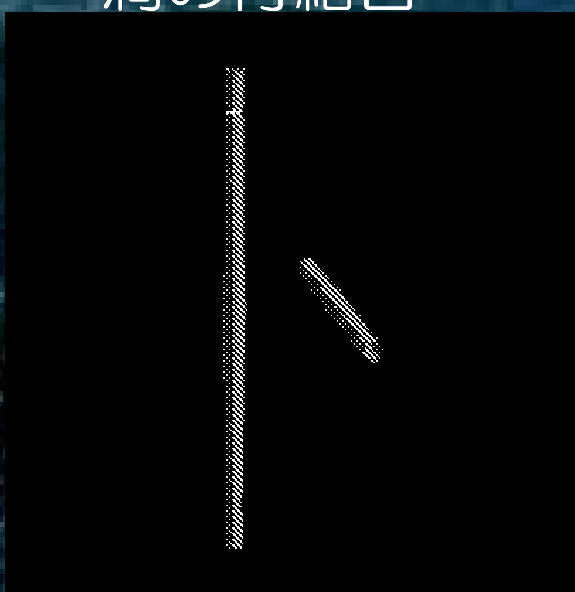
計算方法：スペクトル法

フーリエ変換したGross-Pitaevskii方程

$$[\mathrm{i}-\gamma(k)]\hbar\frac{\partial\Phi(k)}{\partial t}=\left[\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)\Phi(k)+g\sum_{k_1,k_2}\Phi(k_1)\Phi^*(k_2)\Phi(k-k_1+k_2)\right]$$

$\gamma(k)=\theta(k-2\pi/\xi)$：回復長 ξ より短いスケールで効く散逸

渦の再結合



GP方程式は圧縮性流体の方程式であり、渦の再結合時に回復長より短い波長の音波を放出する⇒エネルギースペクトルに影響を与える

人工的な散逸項 □□を導入し、音波を散逸させる

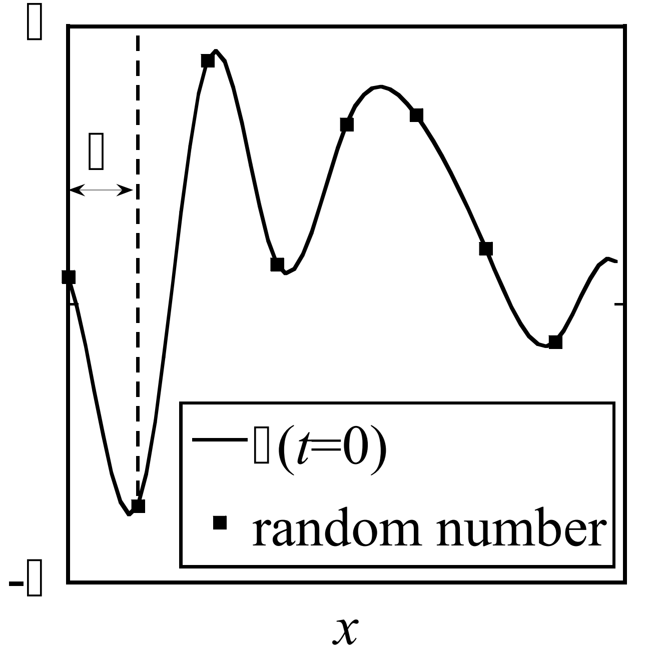
初期状態：位相のみランダム

$$\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$$

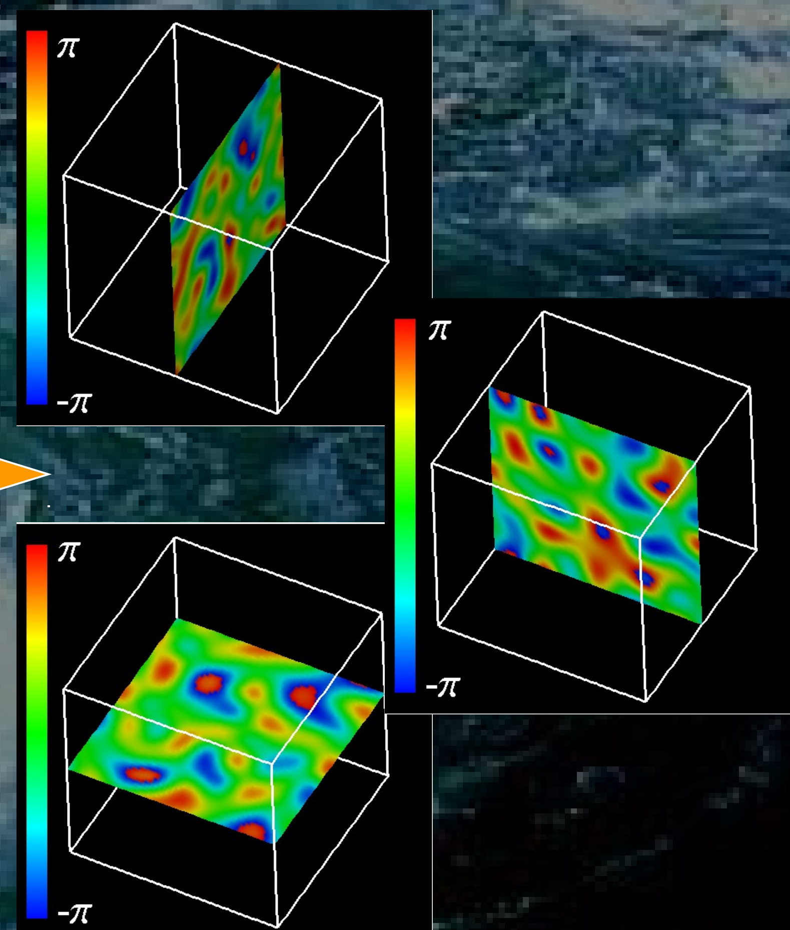
$|\Phi(t=0)|$ は一様

$\theta(t=0)$ は空間に対してランダム

ランダムな位相の例（１次元）



３次元に
応用



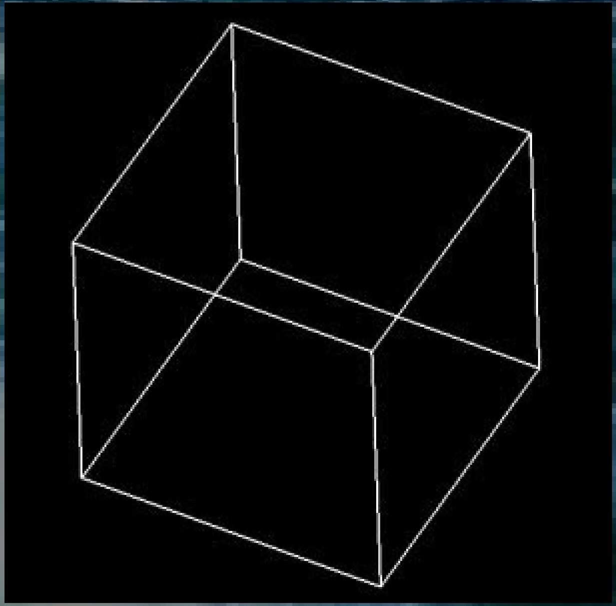
ダイナミクス

シミュレーションのパラメータ

$256 \times 256 \times 256$ grids, $\mathrm{d}x = 0.0625$, $\mathrm{d}t = 0.001$

$\xi = \lambda = 1$, $|\Phi(t=0)| = 1$, $g = 1$, $\gamma_0 = 1$

渦度の集中部分を図示
（９８％の等値面図）



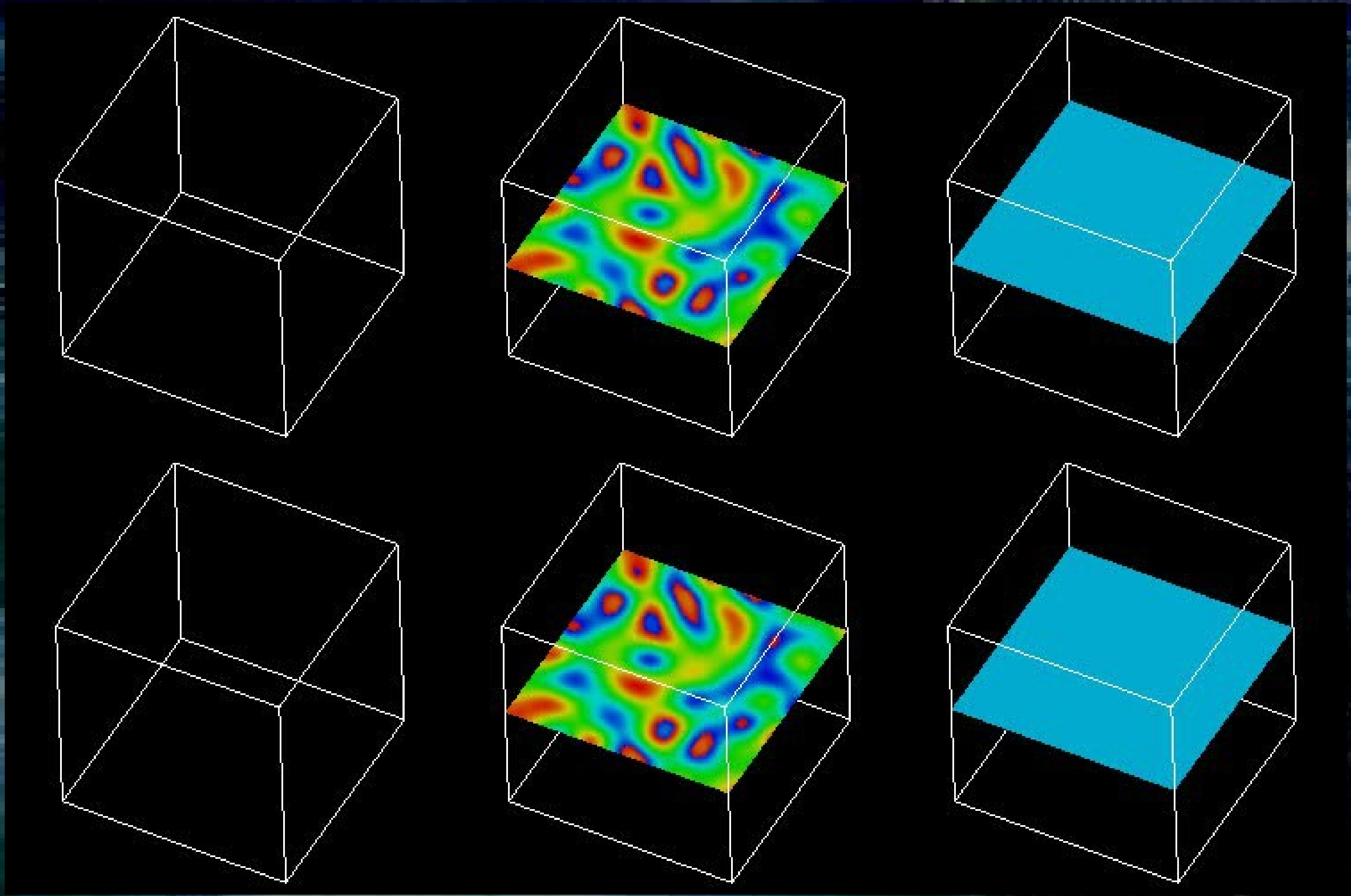
$0<t<100$

$0 < t < 5.76$

渦度　位相　密度

256^3 grids

512^3 grids



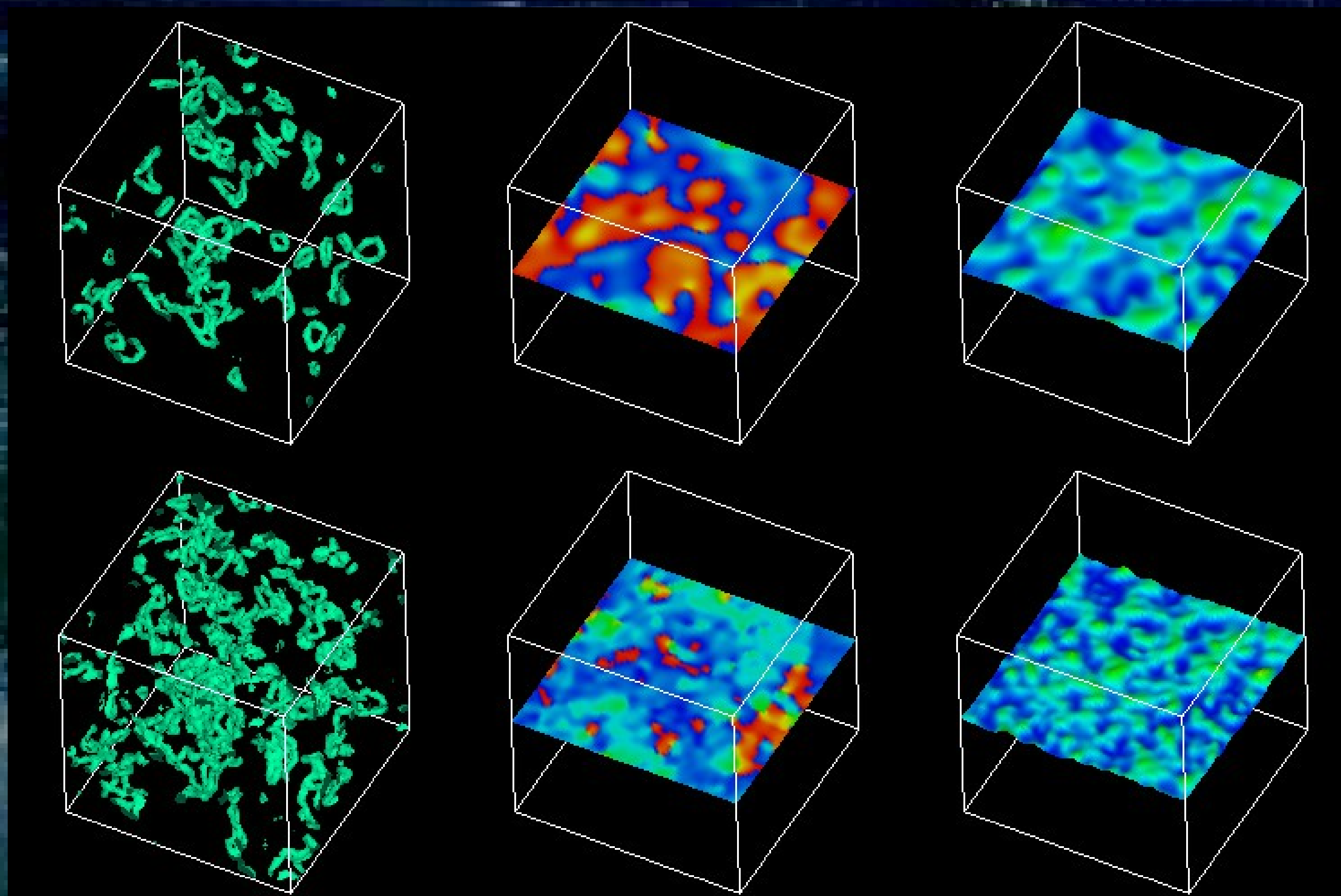
散逸あり(□ =1)となし(□=0)の比較

渦度□ 位相□ 密度□

t=4.32

□=1

□=0



□=0 のときに細かい構造が現れている（音波の存在）

$$E = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \Phi(\boldsymbol{x})^{*}[-\nabla^2 + g/2|\Phi(\boldsymbol{x})|^2]\Phi(\boldsymbol{x})$$ 全エネルギー

$$E_{\mathrm{int}} = g/2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, |\Phi(\boldsymbol{x})|^4$$ 相互作用エネルギー

$$E_{\mathrm{q}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, [\nabla|\Phi(\boldsymbol{x})|]^2$$ 量子エネルギー

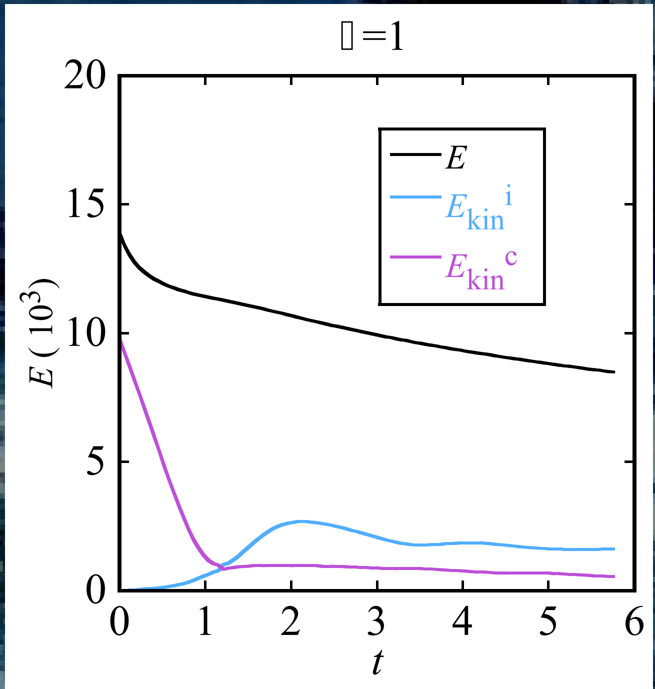
$$E_{\mathrm{kin}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, [|\Phi(\boldsymbol{x})|\nabla\theta(\boldsymbol{x})]^2$$ 運動エネルギー

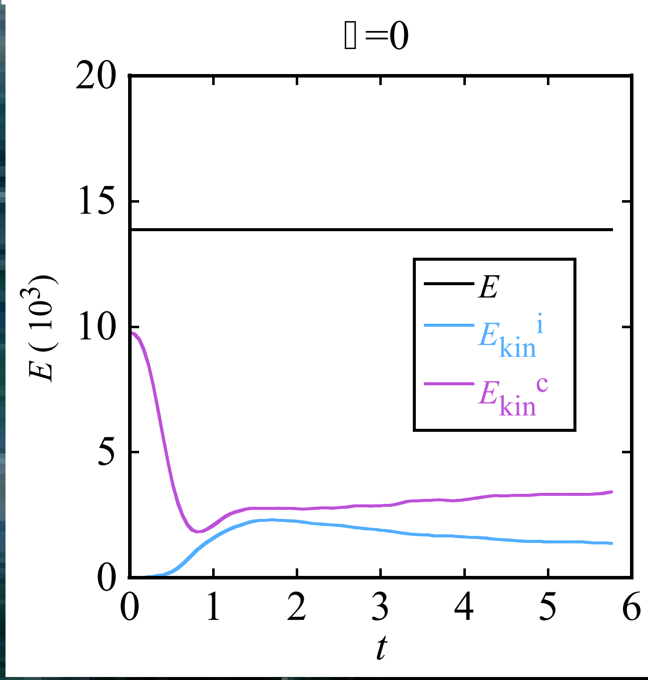
$E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}$ E_{kin} の非圧縮成分（渦のエネルギー）

$E^{\mathrm{c}}_{\mathrm{kin}}$ E_{kin} の圧縮成分（音波のエネルギー）

$$E = E_{\mathrm{int}} + E_{\mathrm{q}} + E_{\mathrm{kin}}$$

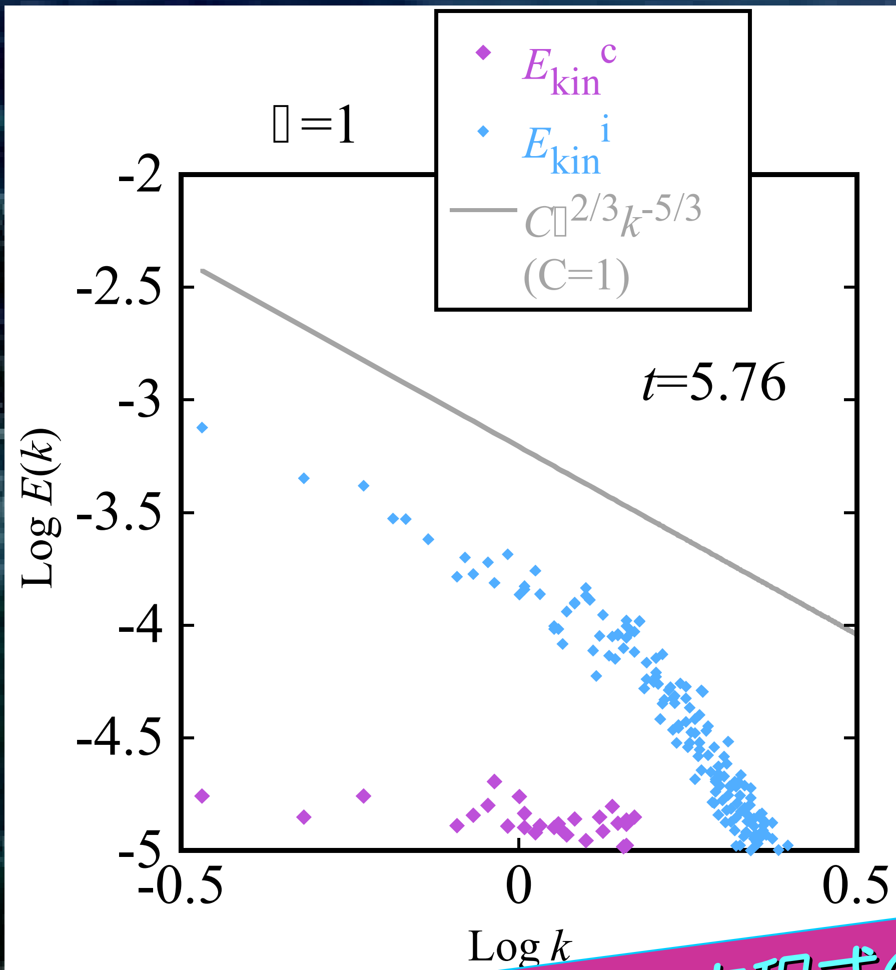
$$E_{\mathrm{kin}} = E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}} + E^{\mathrm{c}}_{\mathrm{kin}}$$

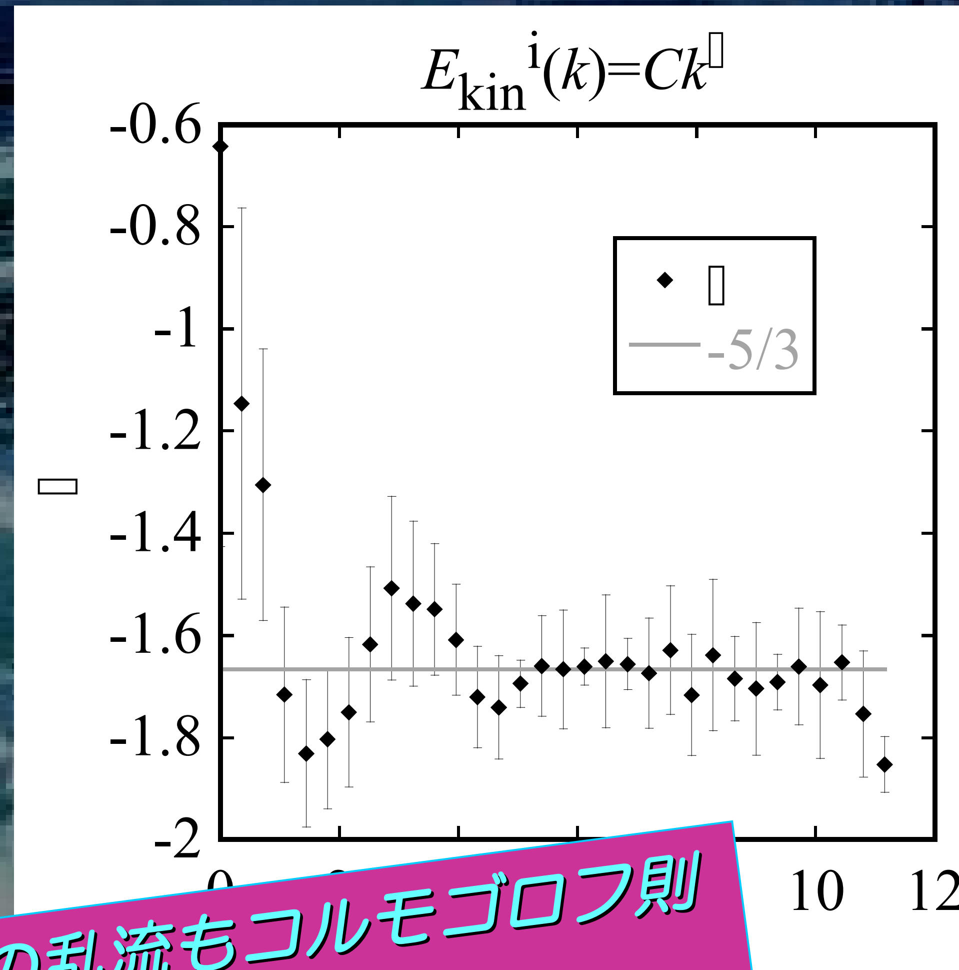




散逸の導入で圧縮性の音波がかなり抑えられる

エネルギースペクトル





***Gross-Pitaevskii*方程式の乱流もコルモゴロフ則を示した！**

今後の課題

- 現行のシミュレーションは定常乱流ではない（減衰乱流）：エネルギー注入を導入し定常乱流を作り出す
- エネルギースペクトルの慣性領域を広げる
- 渦輪の大きさ分布の時間発展を調べ、リチャードソンカスケードの描像を調べる

まとめ

- 圧縮性音波を抑制させる減衰項を導入したGross-Pitaevskii方程式の数値シミュレーションを用いて、量子渦糸乱流のエネルギースペクトルを求めた
- 量子渦糸乱流でもコルモゴロフ側が成り立つことを確認した

コルモゴロフ則

コルモゴロフ則の導入：次元解析による計算

$[\square]=[L^2T^{-3}]$ $[\square]=[L^2T^{-1}]$

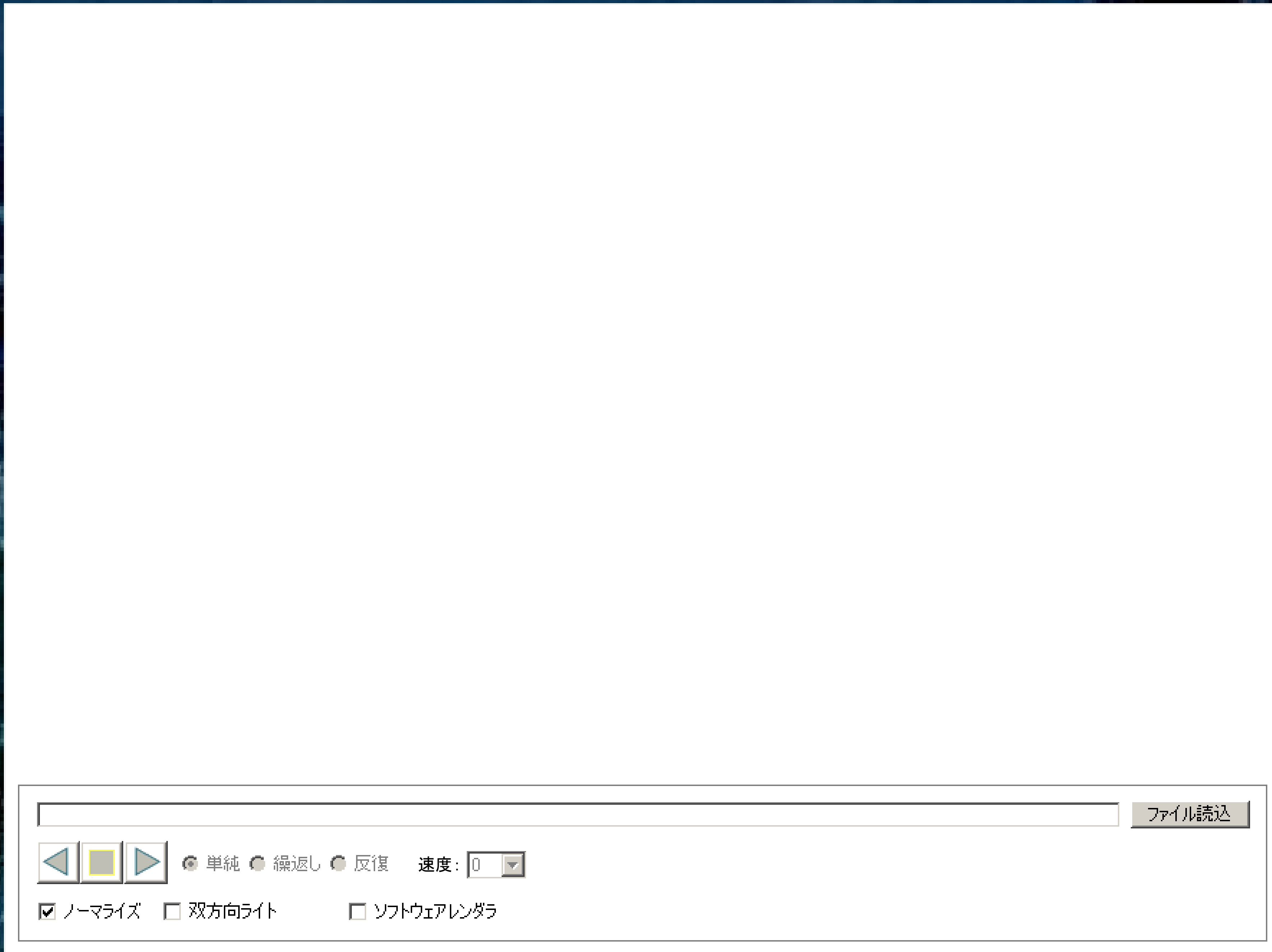
$\Rightarrow[E(k)]=[L^3T^{-2}]=[\square^{1/4}\square^{5/4}]$ $[k]=[L^{-1}]=[\square^{1/4}\square^{-3/4}]$

$\Rightarrow E(k)=\square^{1/4}\square^{5/4}F[k/(\square^{1/4}\square^{-3/4})]$

粘性が全く効かない領域があれば、その領域で

$F=C[k/(\square^{1/4}\square^{-3/4})]^{-5/3}=C\square^{5/12}\square^{-5/4}k^{-5/3}$

$\Rightarrow E(k)=C\square^{2/3}k^{-5/3}$



ファイル読込
単純
繰返し
反復
速度：
0
ノーマライズ
双方向ライト
ソフトウェアレンダラ