

Gross-Pitaevskii方程式による 超流動乱流のエネルギースペクトル

大阪市立大学理学部物理学科
小林未知数・坪田誠

1. 研究目的
2. 計算モデル
3. 計算結果
4. 今後の課題
5. まとめ

1、研究目的

古典乱流と超流動乱流の関係

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

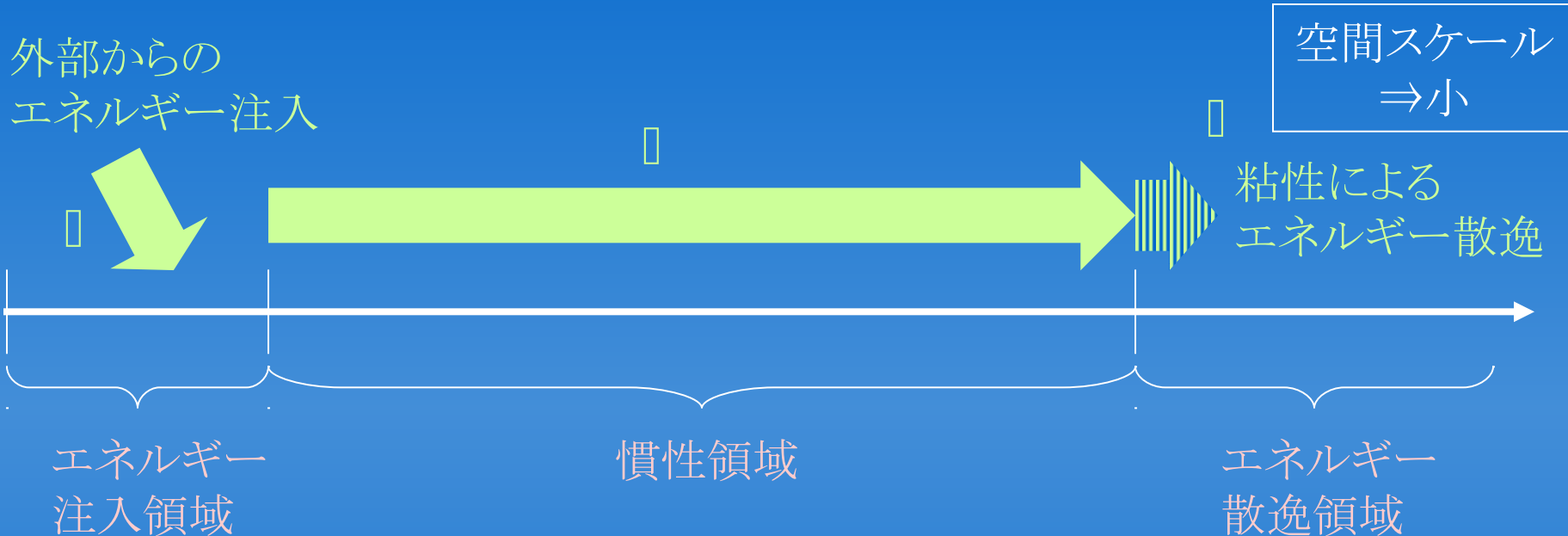
S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999)



$T > 1.4$ Kの比較的高温での超流動 ^4He において
古典乱流の統計則であるKolmogorov則を観測

⇒古典乱流と超流動乱流の類似を観測

Kolmogorov則: 発達した一様等方定常な非圧縮性古典流体の乱流における統計則



慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトルがKolmogorov則で与えられる

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (C \sim 1)$$

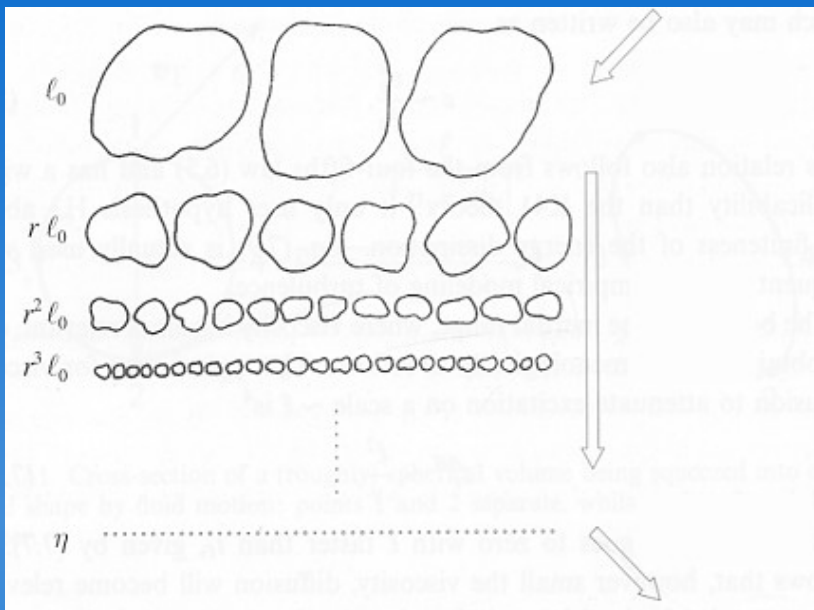
k : 波数 ϵ : エネルギー散逸率
 C : Kolmogorov定数

高温での超流動乱流の古典乱流との類似 \Rightarrow 量子渦と常流体との相互作用(mutual friction)によって起こる

常流体のない絶対零度近傍でも古典流体との類似性はあるのか？

W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000)

Kolmogorov則: Richardsonカスケード



エネルギー注入によって作られた大きな渦(渦度集中部)が小さな渦へ分裂し、エネルギー散逸領域にて散逸する: 渦のRichardsonカスケード

古典乱流: 渦度は粘性によって拡散し、連続的な値をとるため渦の定義は不明瞭



超流動乱流: 渦の回りにおいて循環が量子化され、渦(量子渦)は安定かつ明確に定義される

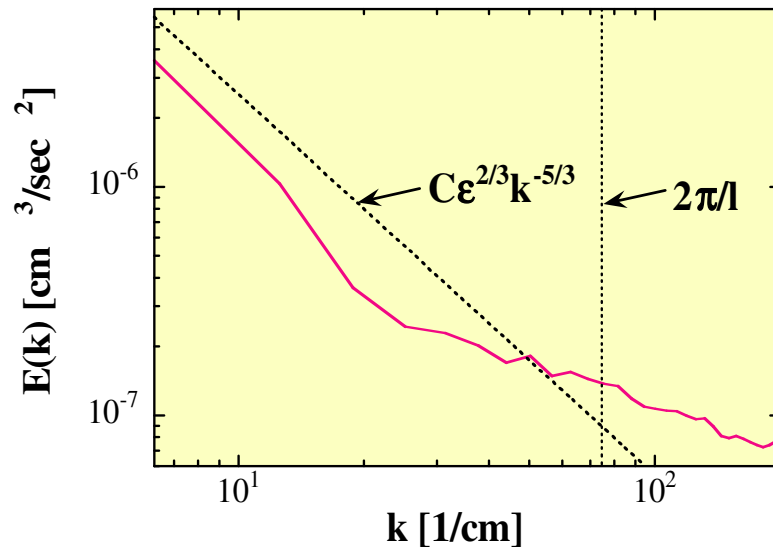
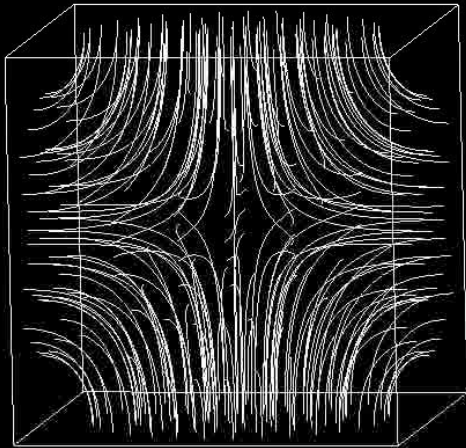
絶対零度近傍の超流動乱流は、古典乱流におけるKolmogorov則とRichardsonカスケードの関係を明らかにするための理想的な系となり得る

⇒Gross-Pitaevskii方程式を用いて絶対零度の超流動乱流を調べる

超流動乱流の数値シミュレーション1

T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett.
89, 145301 (2002)

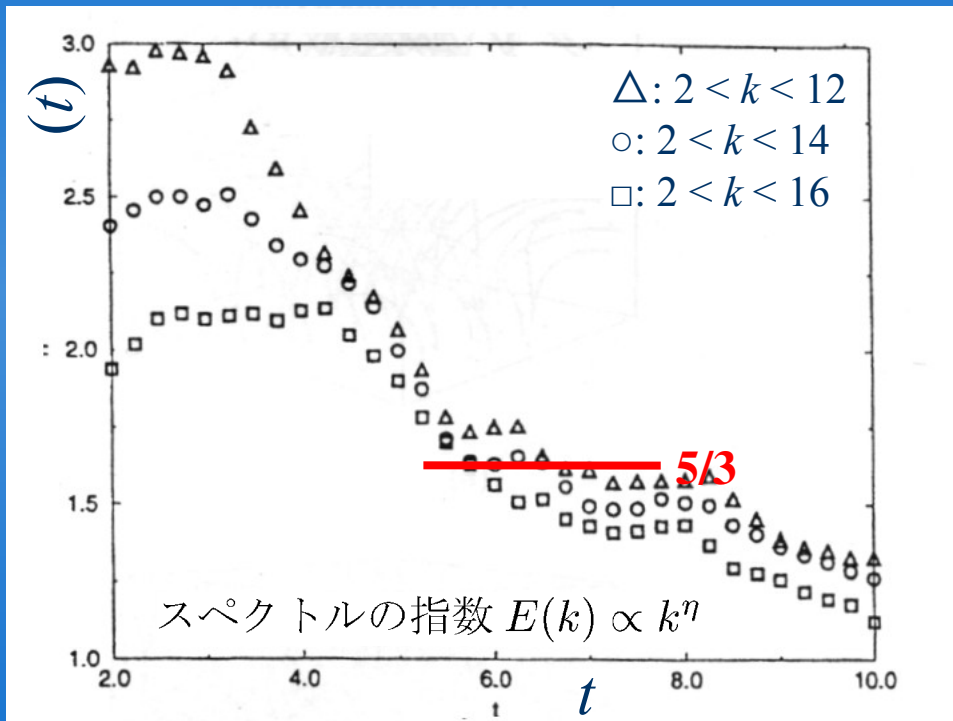
渦糸近似を用いて量子渦のダイナミクスを計算し、系のエネルギースペクトルがKolmogorov則と定量的に一致することを示した



Kolmogorov則
との比較(C=1)

超流動乱流の数値シミュレーション2

C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997)



Gross-Pitaevskii方程式を用いて量子渦のダイナミクスを計算した。乱流状態において一時的にエネルギースペクトルがKolmogorov則を示すが、その後では音波放出による圧縮性効果が顕著になることで、Kolmogorov則との一致は悪くなる。

このような音波のみを消すような散逸を導入し、再びKolmogorov則との一致を調べる

2、計算モデル

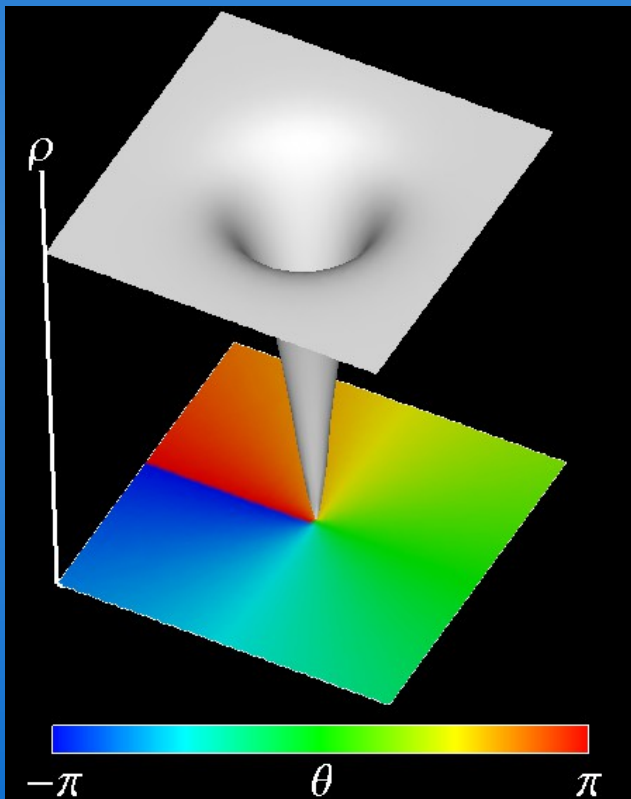
Gross-Pitaevskii (GP)
方程式

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[-\nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

Φ : 巨視的波動関数

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間斥力相互作用の結合定数



波動関数の特異点 + 位相 2π のずれ
⇒ 速度場 渦 (環)

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = 2\nabla\theta$

渦芯のサイズ (回復長) $\xi = 1/\sqrt{g\rho}$

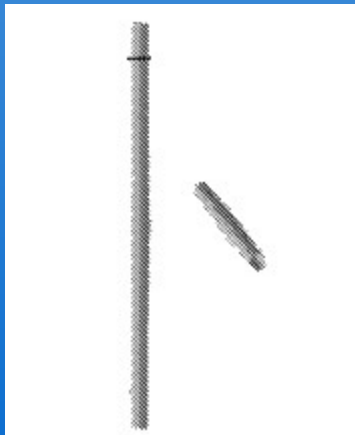
計算方法: スペクトル法

フーリエ変換したGross-Pitaevskii方程式

$$[i - \gamma(k)] \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left[(k^2 - \mu) \Phi(k) + \frac{g}{V^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2) \right]$$

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$: 回復長 ξ より短いスケールで効く散逸

渦の再結合



Nore達の計算と完全に異なる

与える

□によって音波のみを散逸させる

⇒量子渦のみによって作られる超流動乱流のプロトタイプ

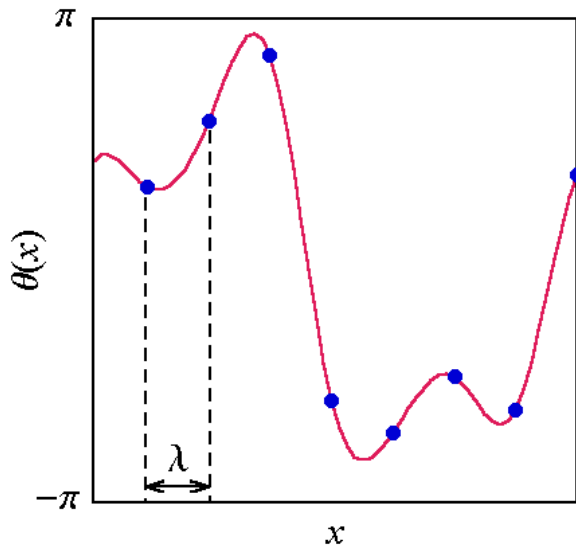
初期状態: ランダムな位相

$$\Phi = \sqrt{\rho} \exp(i\theta)$$

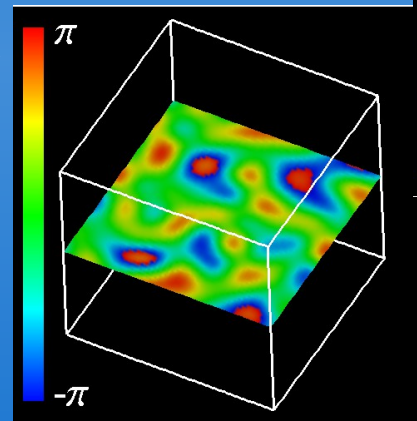
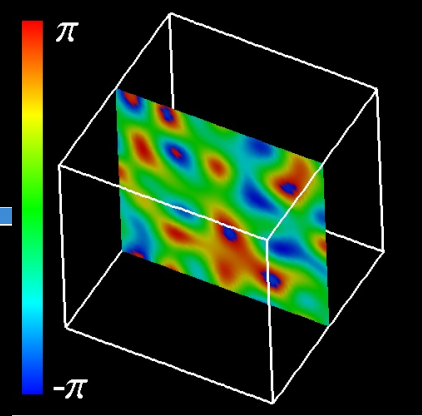
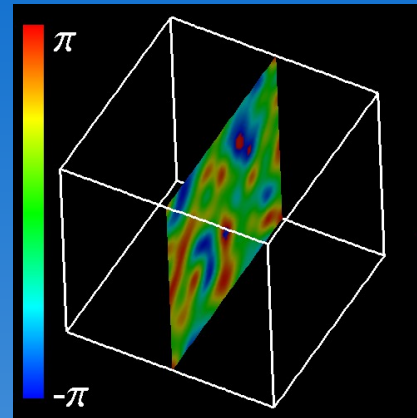
ρ は一様

$\theta(t=0)$ は空間に対してランダム

ランダムな位相の例(1次元)



3次元に
応用



初期の速度場はランダムな大きさと向きを持つので動的に不安定⇒すぐに多くの渦を作って**一様等方な乱流**となる

3、計算結果

時間発展: Runge-Kutta-Verner法
(8段6次Runge-Kutta法)

$256 \times 256 \times 256$ grids, $\Delta x = 0.0625$, $\Delta t = 0.001$

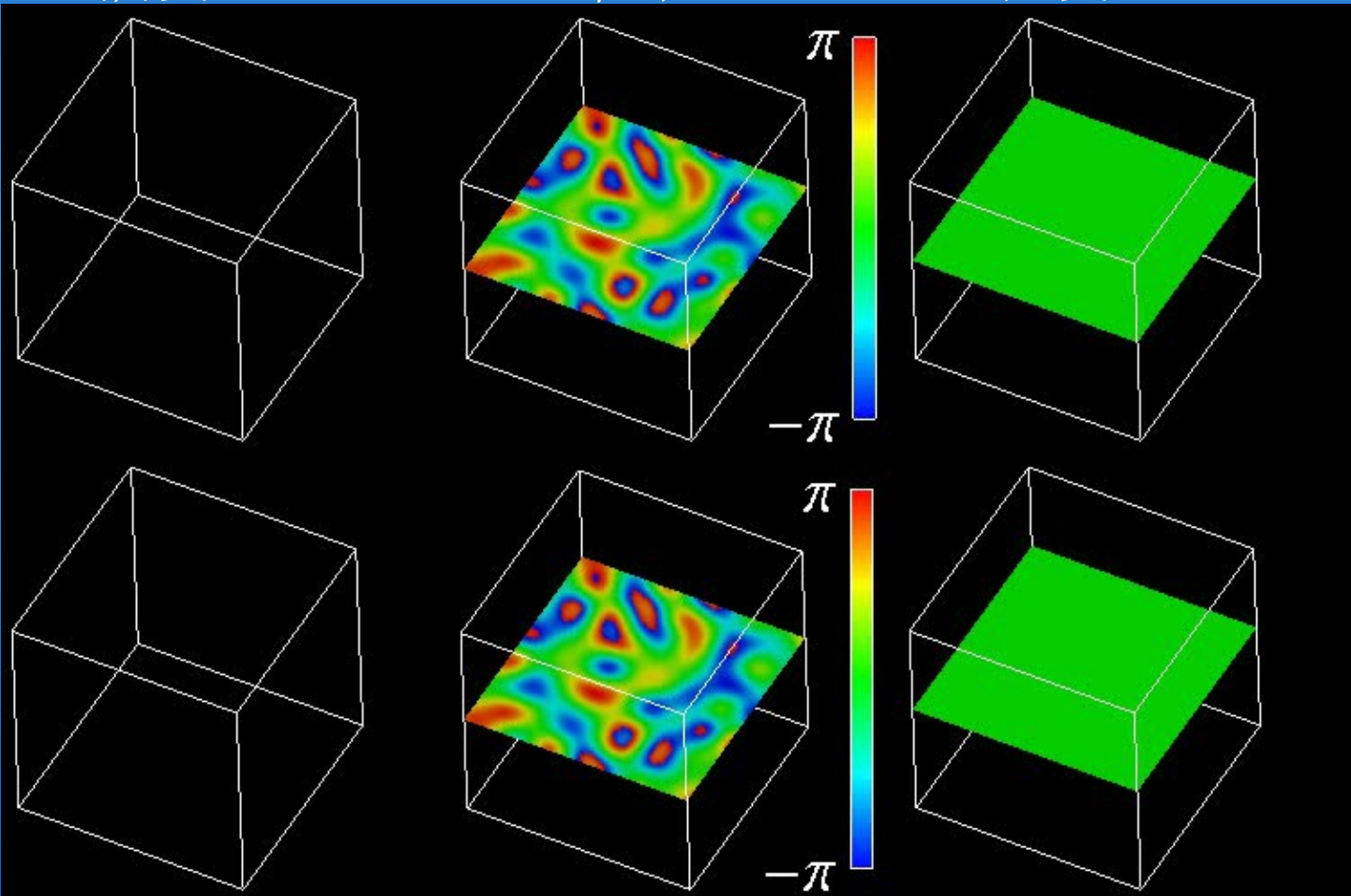
$\xi = \lambda = 1$, $g = 1$

$0 < t < 6$

渦度 ω

位相 θ

密度 ρ



$\nu_0 = 0$
(散逸なし)

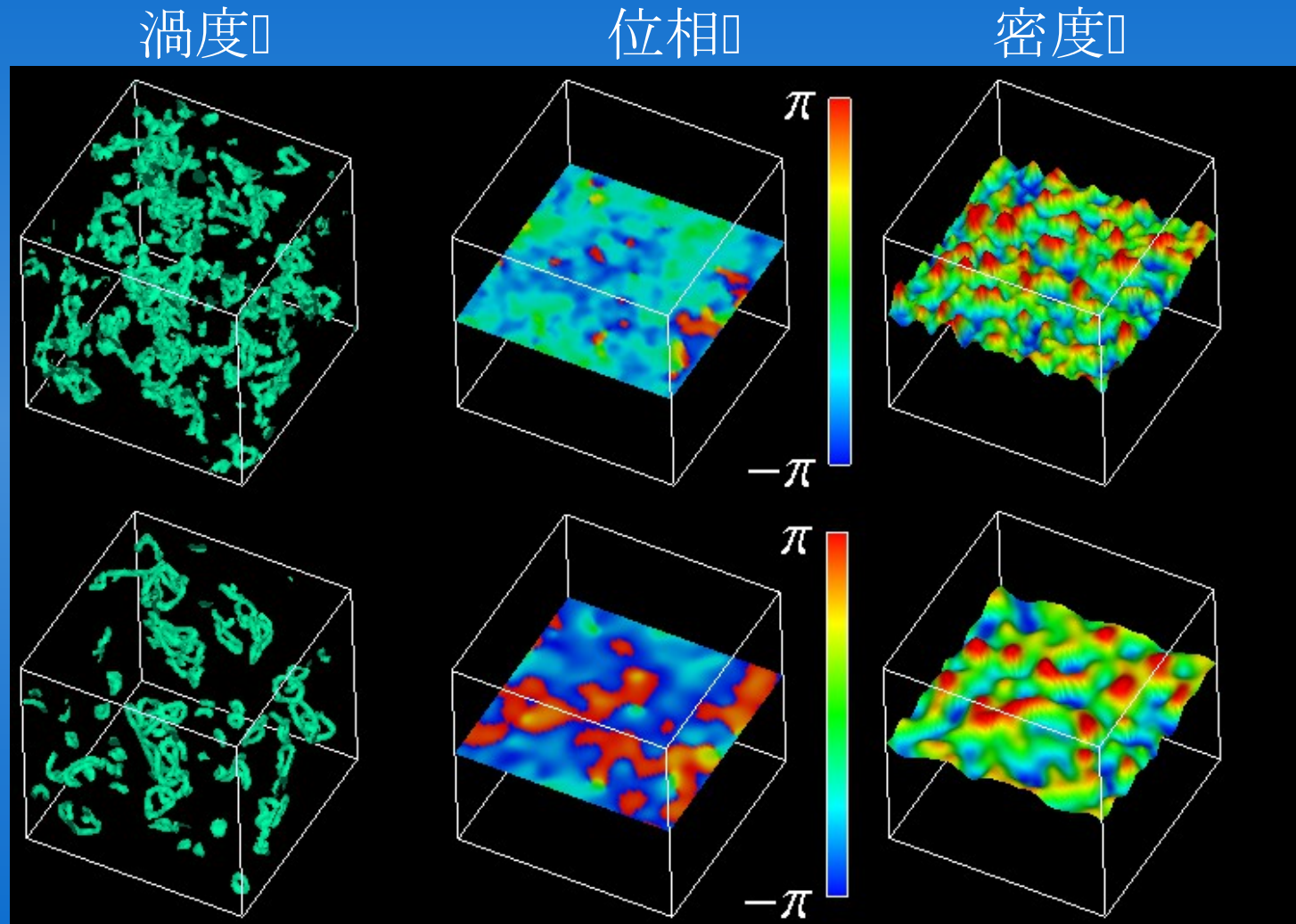
$\nu_0 = 1$
(散逸あり)

散逸あり($\alpha_0=1$)となし($\alpha_0=0$)の比較

$t=5$

$\alpha_0=0$
(散逸なし)

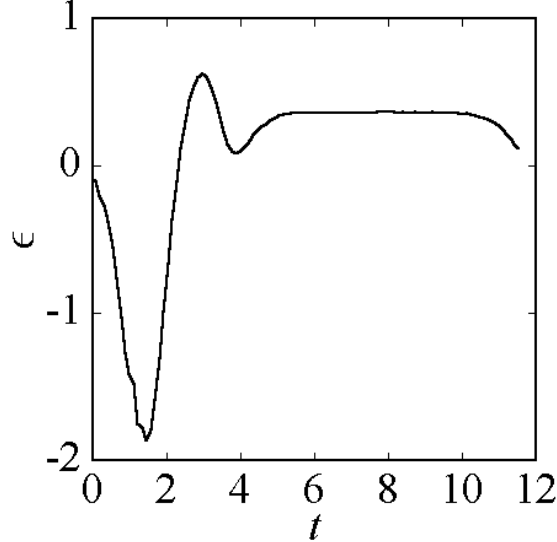
$\alpha_0=1$
(散逸あり)



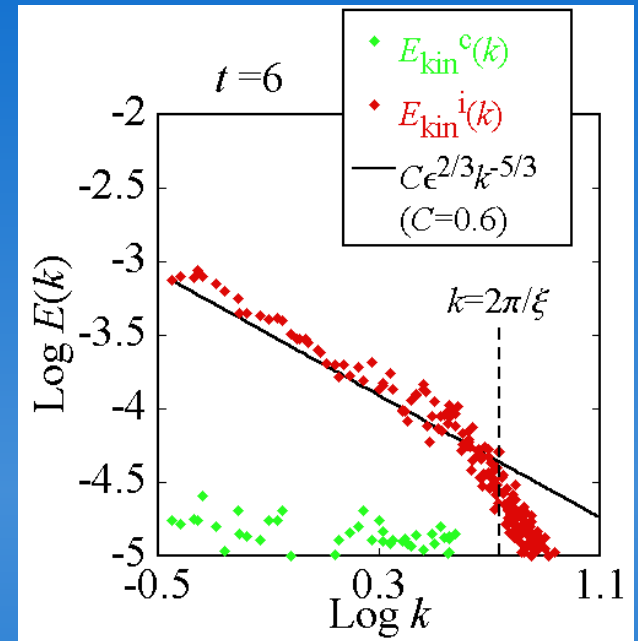
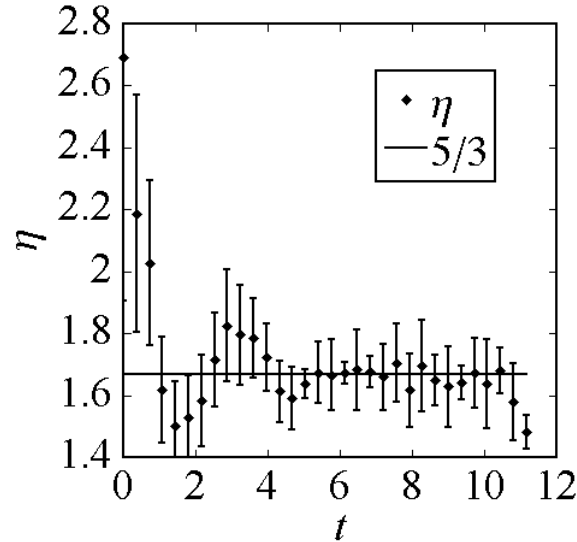
$\alpha_0=0$ のときに現れる細かい構造 (音波) が $\alpha_0=1$ では消えてい

Kolmogorov則との比較

エネルギー散逸率 $\epsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i / \partial t$



スペクトルの指数 $E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^\eta$

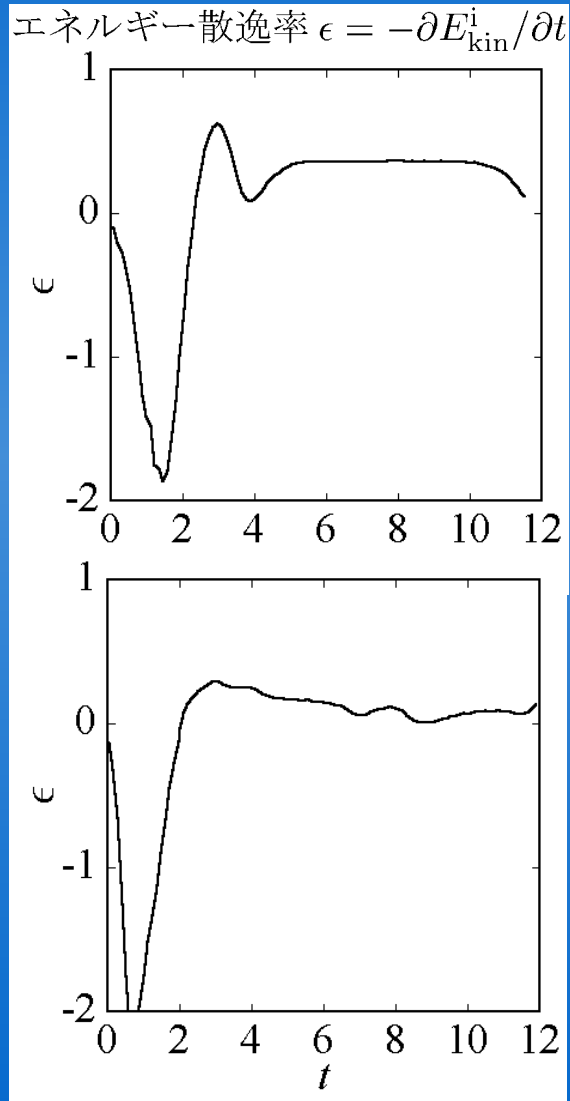


**Gross-Pitaevskii方程式における乱流が
Kolmogorov則と定量的に一致**

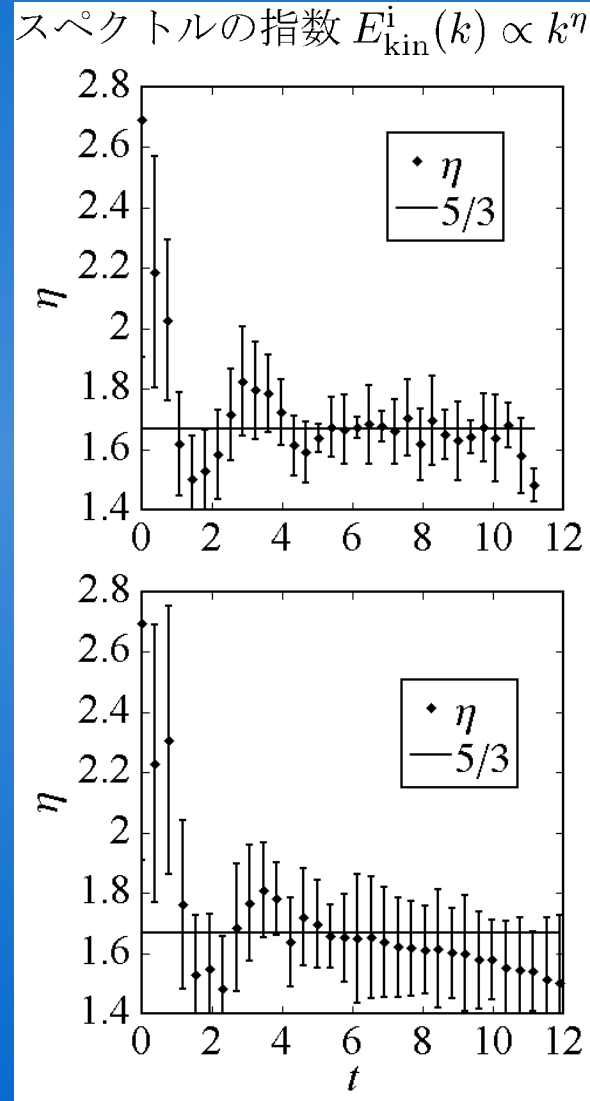
**⇒超流動乱流における量子渦ダイナミクス
が古典乱流との類似性を持っていた！**

散逸がないときとの比較

$\beta_0=1$
(散逸あり)

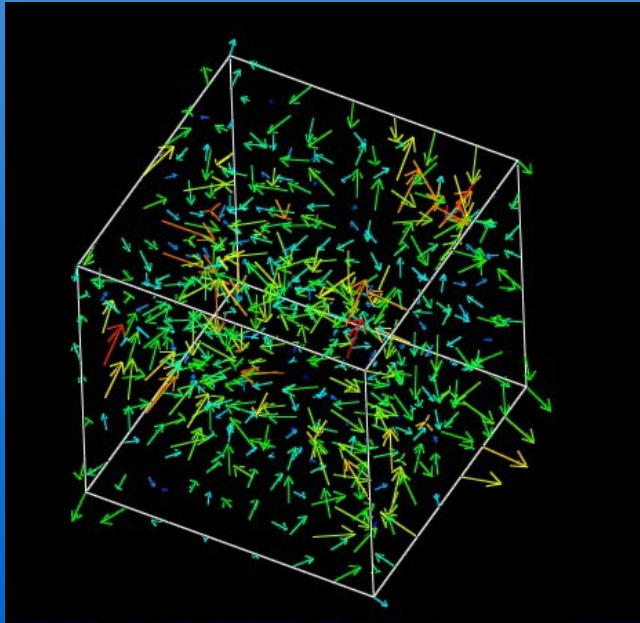


$\beta_0=0$
(散逸なし)



4、今後の課題

- 渦輪の大きさ分布の時間依存性を計算し乱流状態においてRichardsonカスケードが成り立っているか調べる
- 現在の乱流はエネルギー注入のない減衰乱流である。エネルギー注入を導入して定常乱流をつくり、再びKolmogorov則が成り立つか調べる



エネルギー注入:時間空間ともに相関を持った流れ場を入れる

5、まとめ

1. Gross-Pitaeski equationによる絶対零度での超流動乱流の数値シミュレーションを用いて、古典乱流との対応を議論した
2. Gross-Pitaeski equationは圧縮性流体の方程式であるため、渦の再結合等によって生じた短波長の音波が、超流動乱流における本来の量子渦ダイナミクスに影響を与える。そこで短いスケールでのみ有効な散逸を導入し、これら音波の影響を消した
3. 超流動乱流の渦の運動エネルギーのスペクトルが古典乱流の統計則であるKolmogorov則と定量的に一致した

数値計算の精度：異なる分解能 でのエネルギーの比較

	1	2	3
時間分解能	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 2 \times 10^{-5}$
空間分解能	256^3 grids	512^3 grids	256^3 grids

1：現行の数値シミュレーション

$0 < t < 12$ のシミュレーションにおいてシミュレーション間の誤差の最大値 $F_{ij}(E) = |(\langle E \rangle_i - \langle E \rangle_j) / \langle E \rangle_i|$ を計算する ($\rho_0 = 0$)

	F_{12}	F_{13}
E	2.4×10^{-15}	6.3×10^{-13}
E_{int}	3.7×10^{-15}	8.8×10^{-13}
E_{q}	2.6×10^{-15}	6.9×10^{-13}
E_{kin}	5.1×10^{-15}	9.4×10^{-13}

エネルギー保存

$$|[E(t=0) - E(t=12)] / E(t=0)| \simeq 6.5 \times 10^{-13}$$

異なる分解能間で、また時間発展においてエネルギーが10桁以上保存している⇒高い精度

$$E = \int d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x})^* [-\nabla^2 + g/2|\Phi(\mathbf{x})|^2] \Phi(\mathbf{x})$$

全エネルギー

$$E_{\text{int}} = g/2 \int d\mathbf{x} |\Phi(\mathbf{x})|^4 \text{相互作用エネルギー}$$

$$E_{\text{q}} = \int d\mathbf{x} [\nabla|\Phi(\mathbf{x})|]^2 \text{量子エネルギー}$$

$$E_{\text{kin}} = \int d\mathbf{x} [|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})]^2 \text{運動エネルギー}$$

$E_{\text{kin}}^{\text{i}}$ E_{kin} の非圧縮成分 (渦の運動エネルギー)

$E_{\text{kin}}^{\text{c}}$ E_{kin} の圧縮成分 (音波の運動エネルギー)

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{q}} + E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^{\text{i}} + E_{\text{kin}}^{\text{c}}$$

$\gamma_0=0$ では音波のエネルギーがdominantなのに対し、 $\gamma_0=1$ では渦のエネルギーがdominantになっている。 \Rightarrow 散逸による音波の抑制が有効である。

