

量子流体における乱流現象とエネルギースペクトル： Gross-Pitaevskii方程式における解析

大阪市立大学理学部物理学科
小林未知数 & 坪田誠

2005年1月12日～14日 京都大学数理解析研究所

共同研究集会 一乱流現象と力学的縮約一

概要

1. 超流動と超流動乱流のイントロダクション
2. 超流動乱流と古典乱流
3. 本研究の研究目的とモデル、計算結果
4. 今後の課題
5. 超流動乱流の今後の展望

なぜ超流動乱流？

超流動液体 ^4He 中で起こる超流動乱流は低温物理学において非常に重要な問題である。

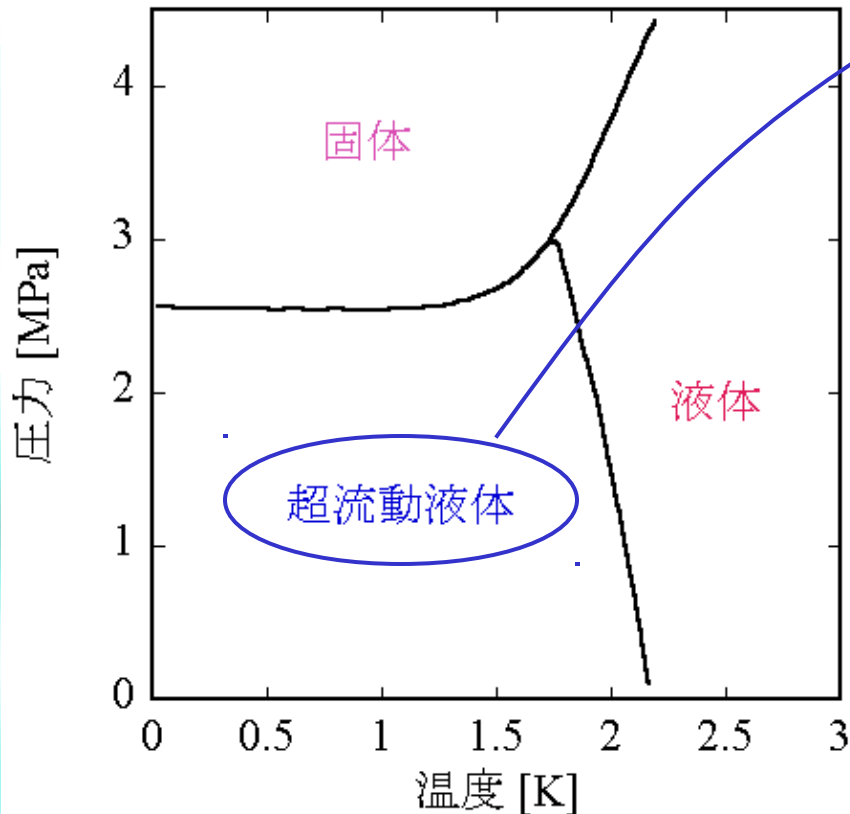


近年、実験、理論の進展とともに超流動乱流が、古典乱流を要素還元的に理解するという視点において低温物理学の範囲を超えて重要視されはじめた。

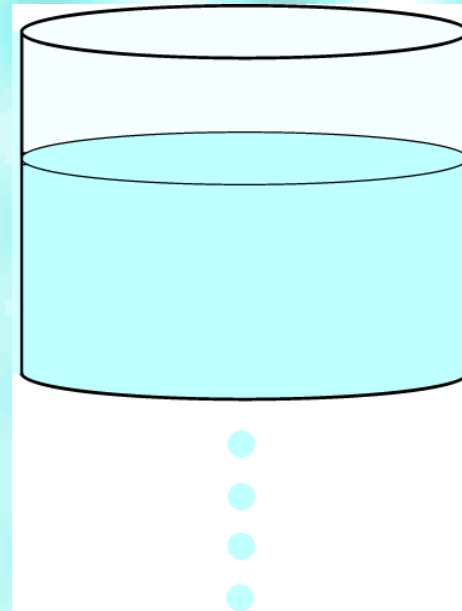
**超流動乱流という分野は今、新しい時代
を迎えている！**

1, 超流動と超流動乱流のイントロダクション

^4He の相図

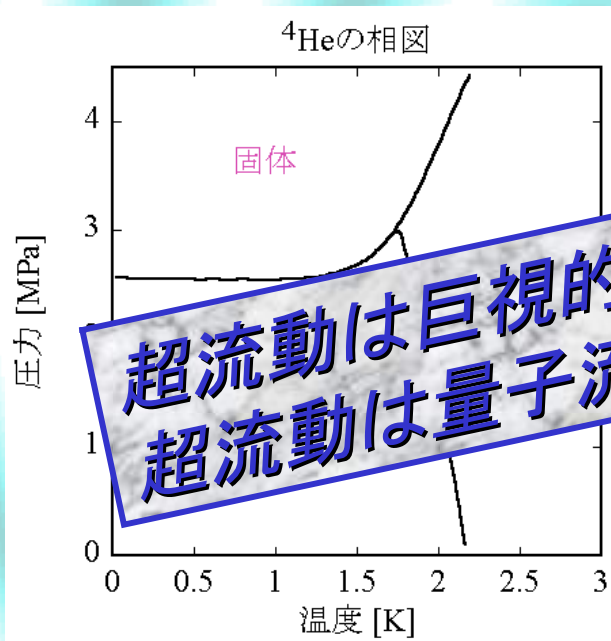


液体 ^4He は常圧下において $T \leq 2.17 \text{ K}$ で超流動転移を起こし、粘性のない振る舞いをする。

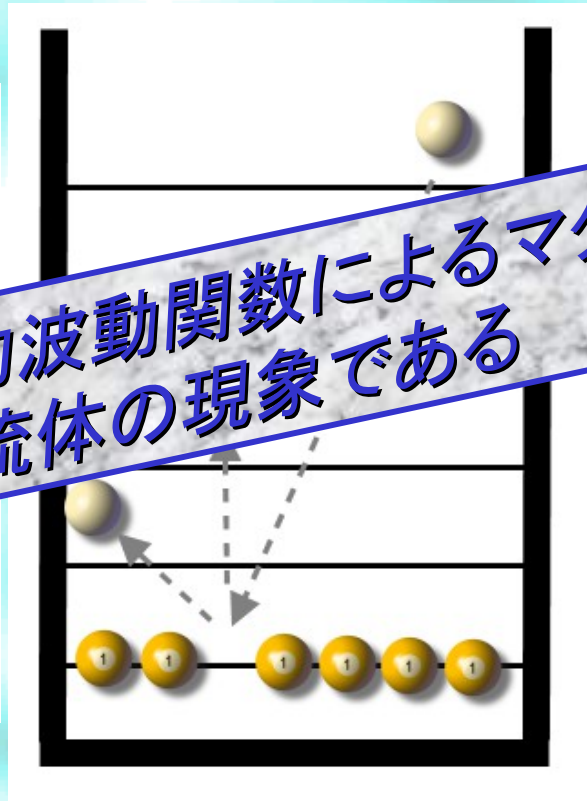


超流動薄膜

超流動はボース・アインシュタイン凝縮によって引き起こされる



超流動は巨視的波動関数によるマクロな量子現象:
超流動は量子流体の現象である



中性子散乱

^4He はボース粒子

→低温でボース・アインシュタイン凝縮を引き起こす

→巨視的波動関数として粒子がコヒーレントに運動する

→超流動は巨視的波動関数によって作られる

超流動のダイナミクス：二流体モデル

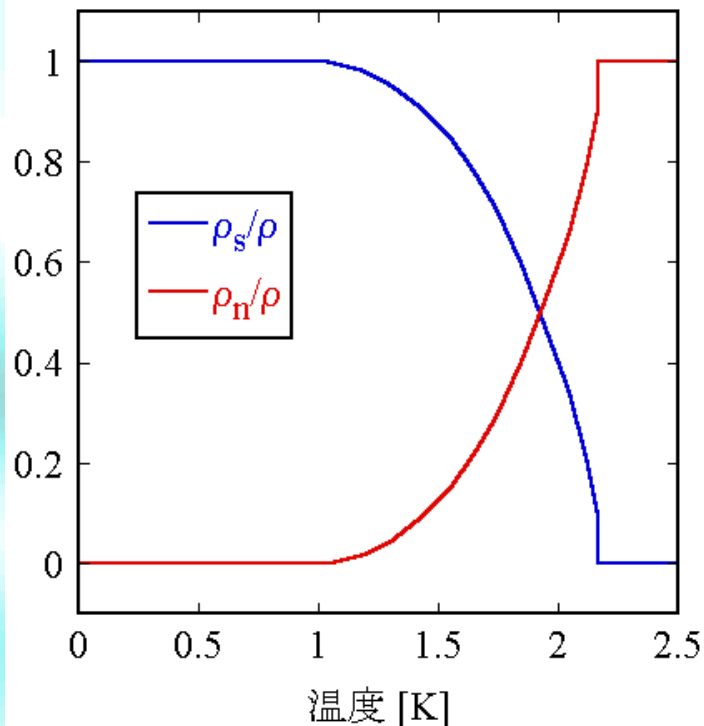
$$\rho = \rho_s + \rho_n$$

ρ : 全流体

ρ_s : 超流体 (エントロピー、粘性なし)

ρ_n : 常流体 (エントロピー、粘性あり)

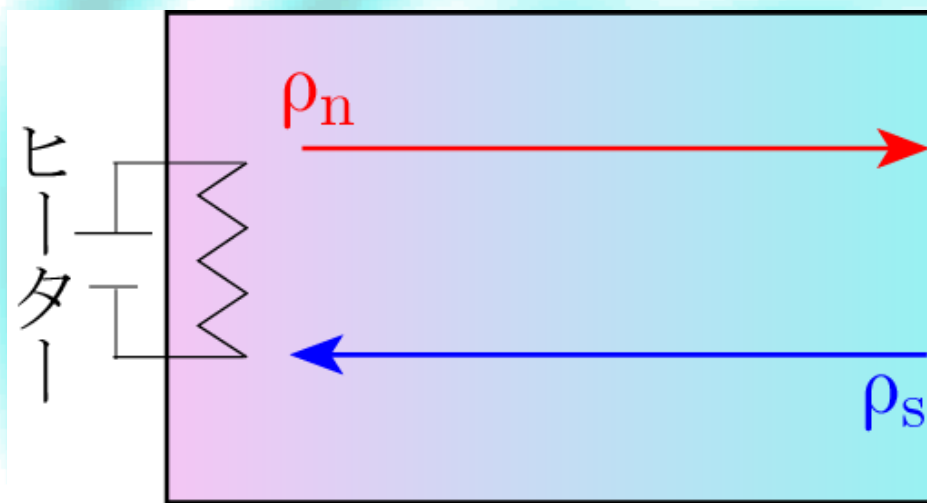
ρ_s と ρ_n の温度依存性



- 全流体は粘性のある成分(常流体)とない成分(超流体)とに分けられる
- 1 K以下では常流体はほとんどない
- **二流体モデルを用いて超流動現象の多くを説明することができる**

二流体モデルを最も特徴づける現象： 熱対向流

超流動中に温度勾配をつけると・・・



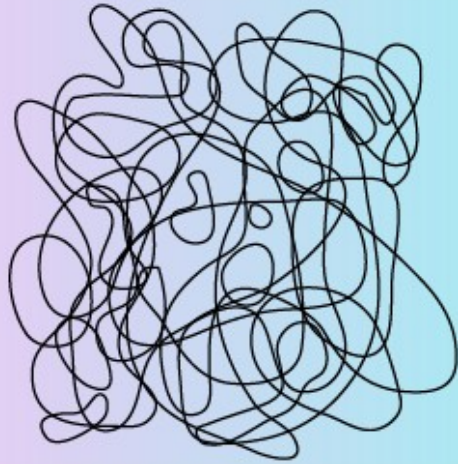
常流体：低温側へ

超流体：高温側へ

→エントロピーを均一化する
ように流れる

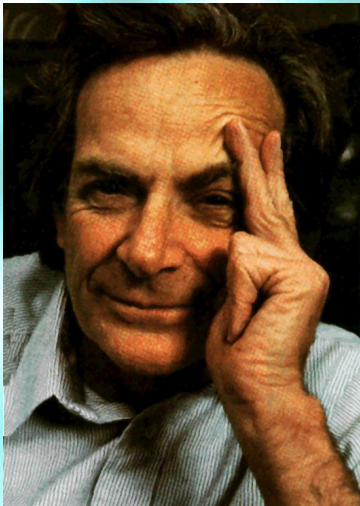
- 流体全体としては流れていないように見えるが、それぞれの成分が反対方向に流れている。
- 非常に大きな熱伝導度（通常の液体の約 10^6 倍）

相対速度がある値を超えると・・・



二流体の相対速度がある値を超えると、今まで散逸を伴わなかった熱対向流に散逸が生じる

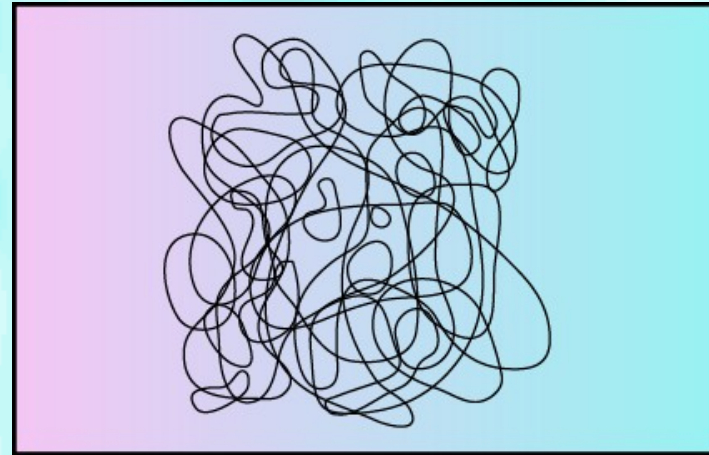
Feynman



この散逸こそ超流体中の循環が量子化された量子渦のタングル状態：超流動乱流状態である！（1955）

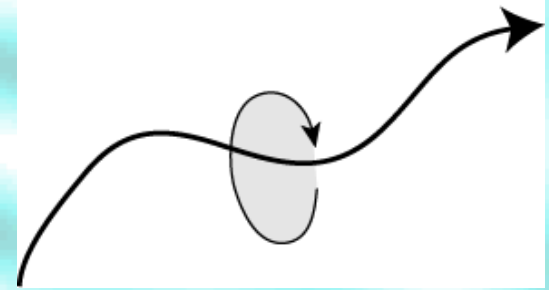
量子渦と超流動乱流の発見

Vinen

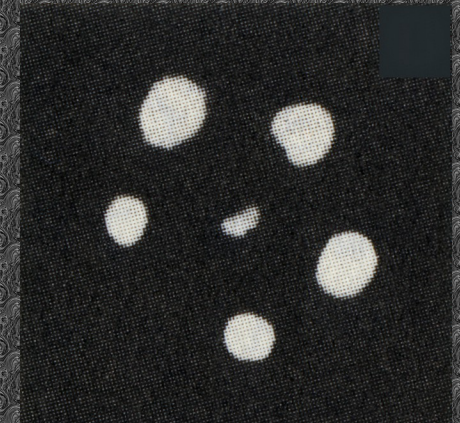


- 超流動 ^4He における量子化された循環 $\kappa = h / m$ を観測：
量子渦の発見
- タングル状態の量子渦と常流体との摩擦である**相互摩擦力**(mutual friction)を観測：**超流動乱流の発見** (1957)

量子渦の特徴



- すべての量子渦はいたるところで同じ循環 $\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = n h / m$ を持つ(実際には $n \geq 2$ の渦は不安定で $n = 1$ の渦へと分裂する)。
- 渦の粘性拡散がなく、安定に存在する。
- 渦芯のサイズは数Å(液体⁴He)～数千Å(原子気体):非常に微視的な渦→古典流体の渦では最も粗雑な近似である渦糸近似が、量子渦ではRealisticとなる



回転容器中における量子渦糸格子の観測
(Packard 1982)

渦糸近似による超流動乱流のシミュレーション

量子渦：渦糸近似が有効

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3}$$

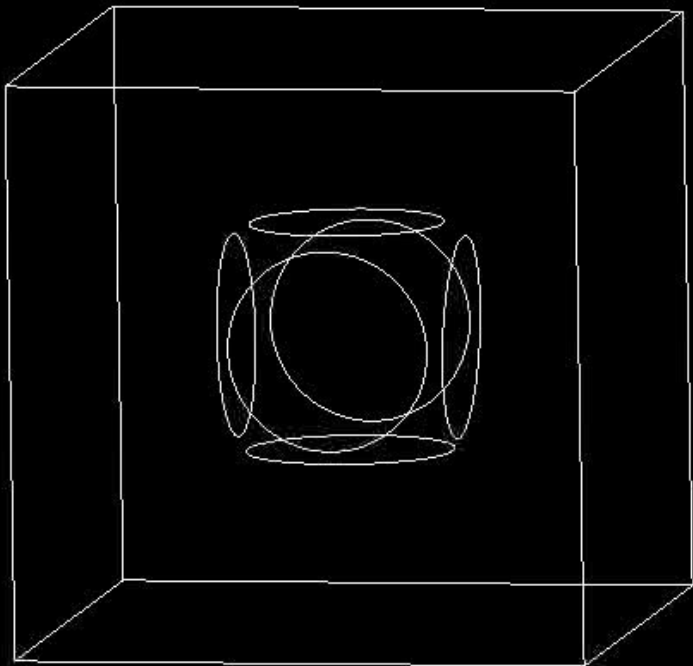
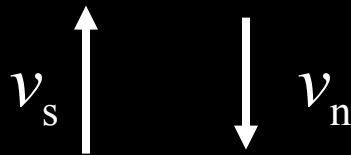
$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{s})$$

\mathbf{s} : 渦糸の位置座標

渦糸が作る速度場をビオ・サバールの定理を用いて求め、渦糸のダイナミクスを求める

渦糸近似による超流動乱流のシミュレーション

熱対向流中の渦糸タングル



渦糸近似を用いて量子渦のダイナミクスを計算し、熱対向流中における超流動乱流との定量的な一致を得た (Schwarz 1988)。

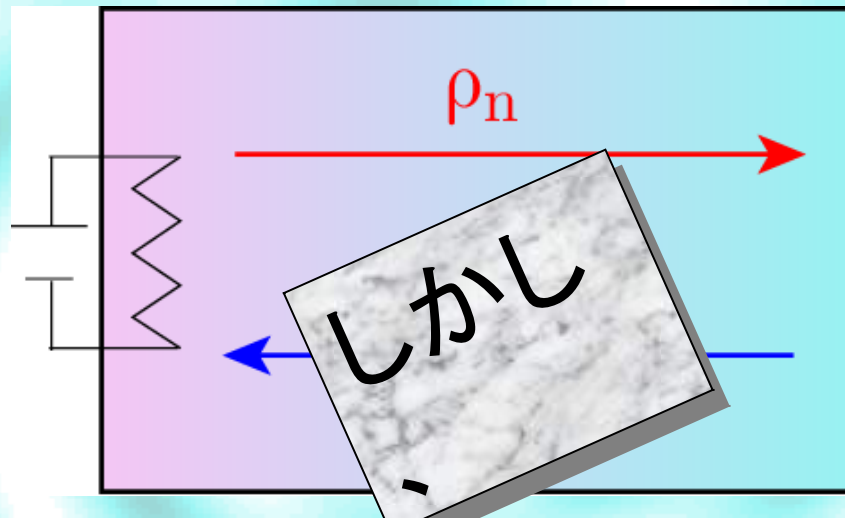
「超流動乱流 = 量子渦糸タングル」
という描像が裏付けられた。

境界条件 横方向: 固体壁

縦方向: 周期的

このシミュレーションは素励起物理学研究室で作られたものです。

熱対向流を用いて超流動乱流に関する膨大な数の理論計算や実験が行われた



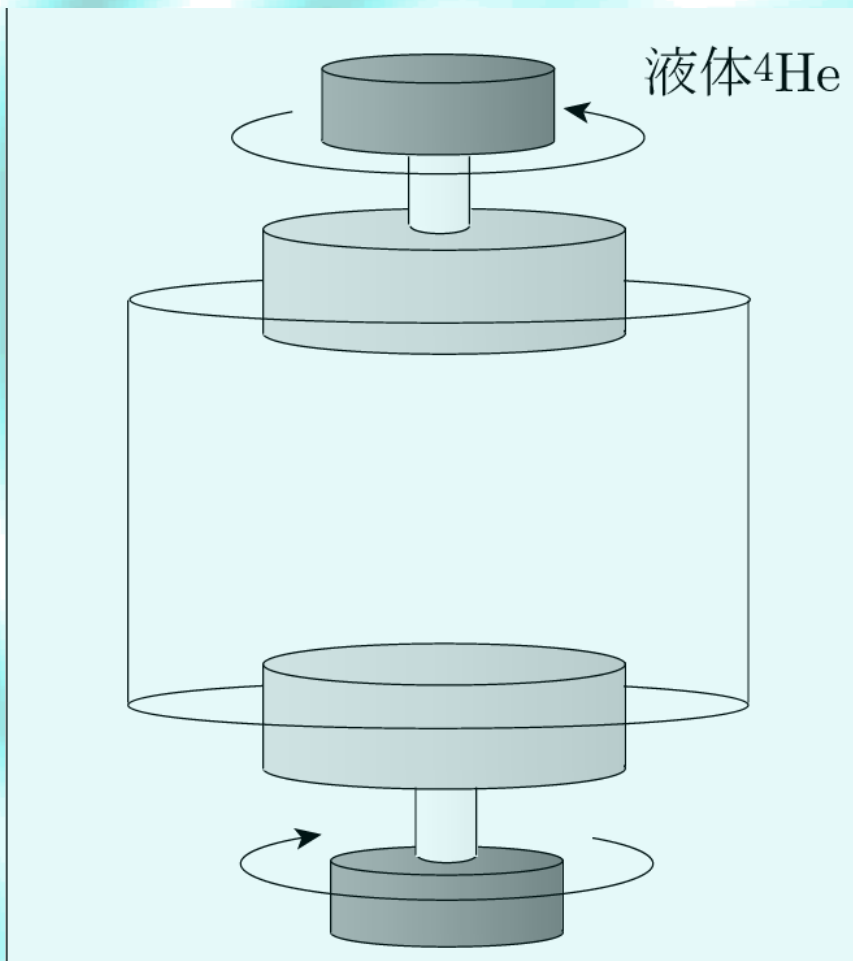
熱対向流は超流動固有の現象であり、よって熱対向流によって作り出された超流動乱流は古典乱流との対応を全く持っていない！

超流動乱流の古典乱流との関係は全く謎のままであった！

超流動乱流の新しい幕開けへ

近年、状況は一転する

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. 43 (1), 29 (1998)



回転円盤中に形成される
超流動乱流

実験条件
 $T > 1.4 \text{ K}$

超流動乱流の新しい幕開けへ

S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999)

液体 ^4He

振動格子中に形成された
超流動乱流

古典流体にて乱流を作る方法と同じ方法である。
→古典乱流との対応を議論することが可能になった

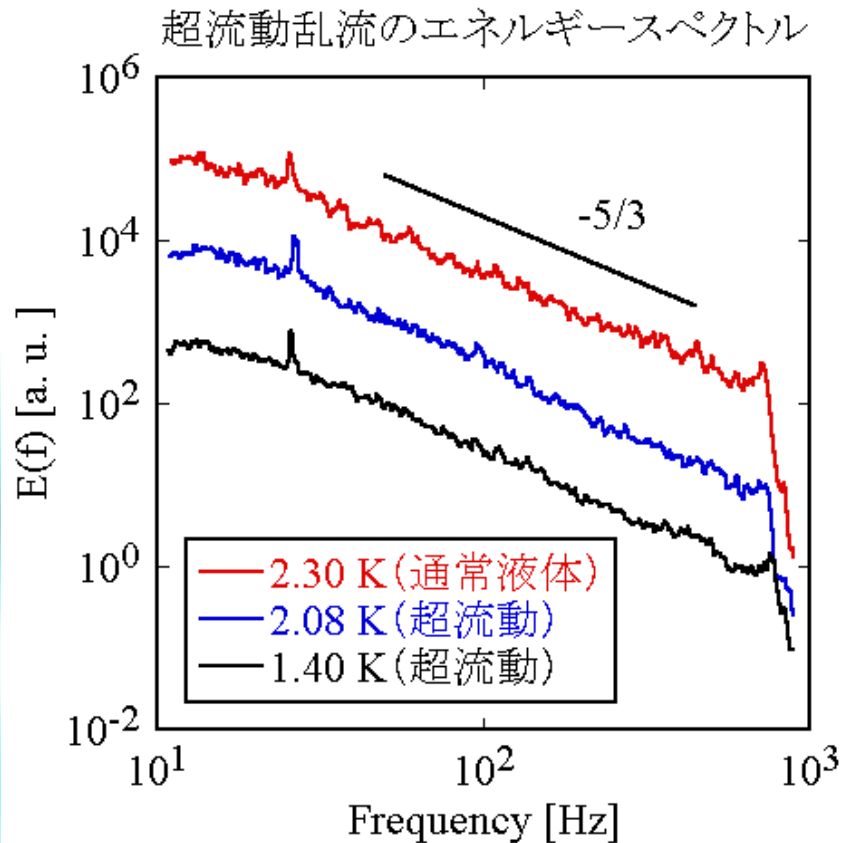
実験条件

$T > 1.0 \text{ K}$

超流動乱流と古典乱流の関係は？

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

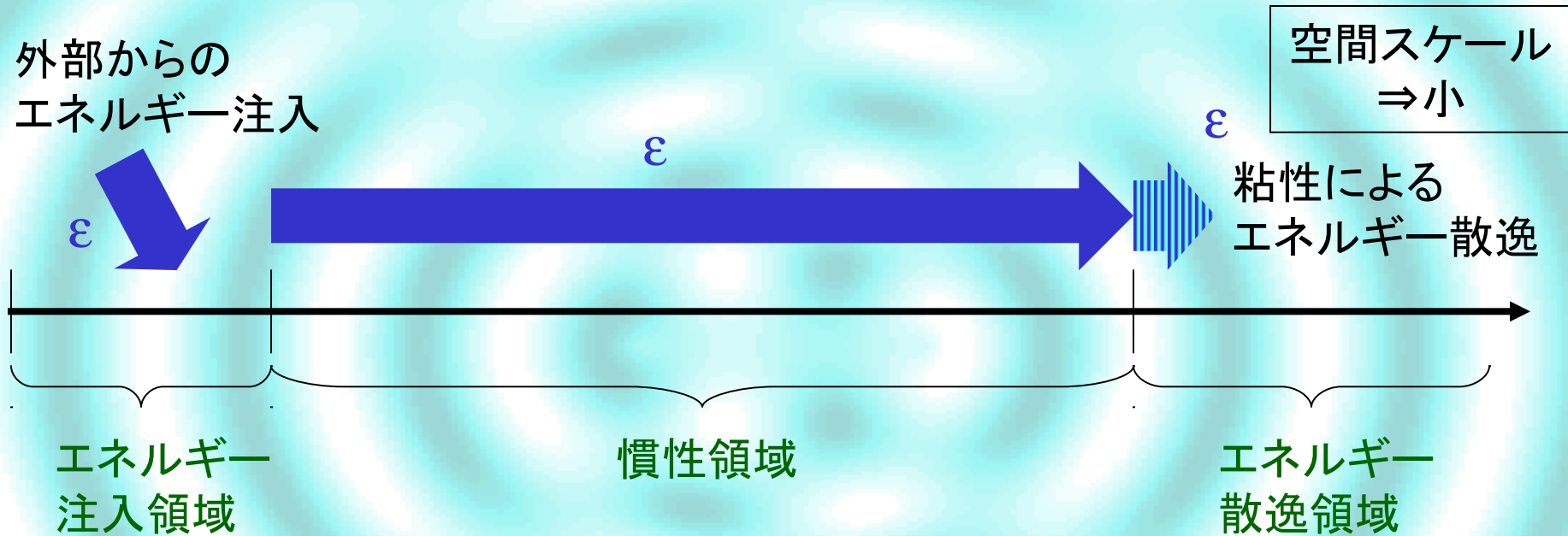
エネルギースペクトルの測定: ある1点の圧力(の時間変化)を測定し、運動エネルギーを計算する。



$T > 1$ Kでの超流動乱流中において古典乱流の統計則であり、通常液体の ^4He でも観測されるKolmogorovの $-5/3$ 乗則が観測された

⇒超流動乱流と古典乱流の類似性が観測された

Kolmogorov則: 一様等方定常な非圧縮性 古典乱流において成り立つ統計則



慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトルがKolmogorov則で与えられる

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (C \sim 1)$$

k : 波数 ε : エネルギー散逸率
 C : Kolmogorov定数

超流動乱流と古典乱流の類似性

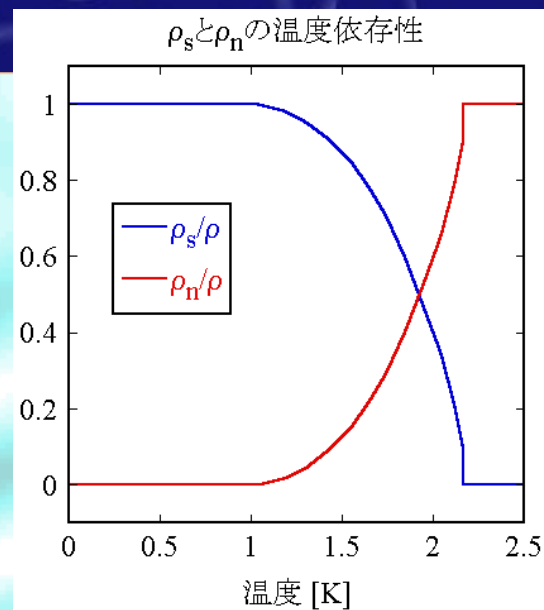
古典乱流のように振る舞う
常流体(粘性あり)

超流体(粘性なし)

両者が相互摩擦力 (mutual friction) を通して結合し、古典乱流のように振る舞うという描像で理解されてきた。

常流体のない絶対零度
近傍でも古典流体との
類似性はあるのか？

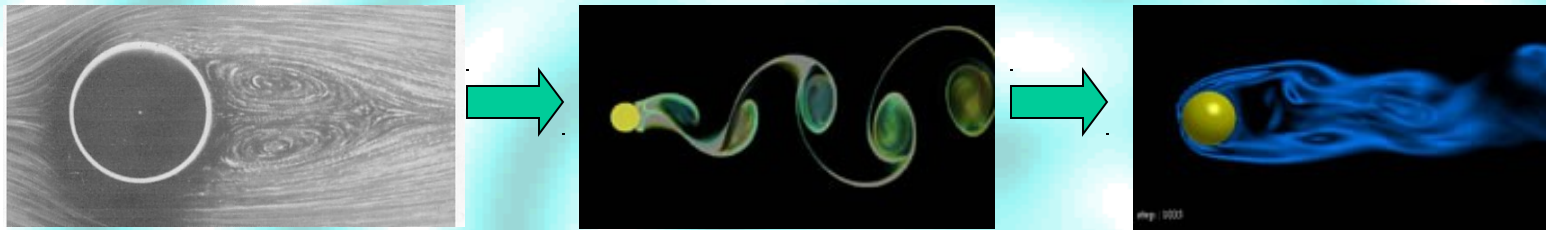
W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000)



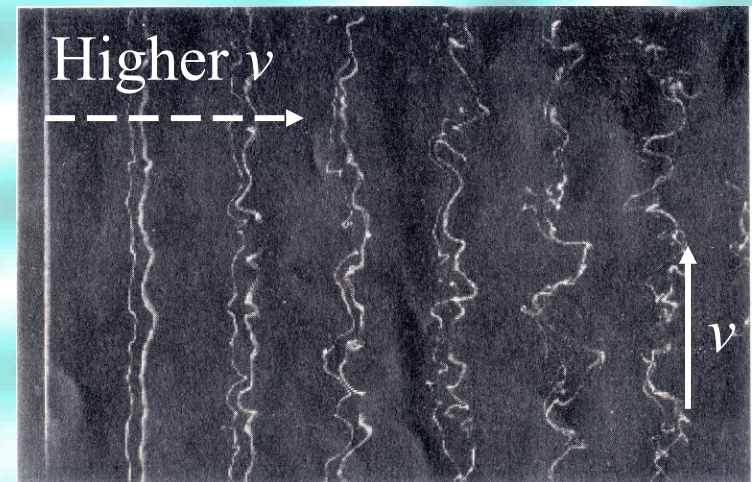
2, 古典乱流と超流動乱流

古典乱流: 流体力学最大の問題

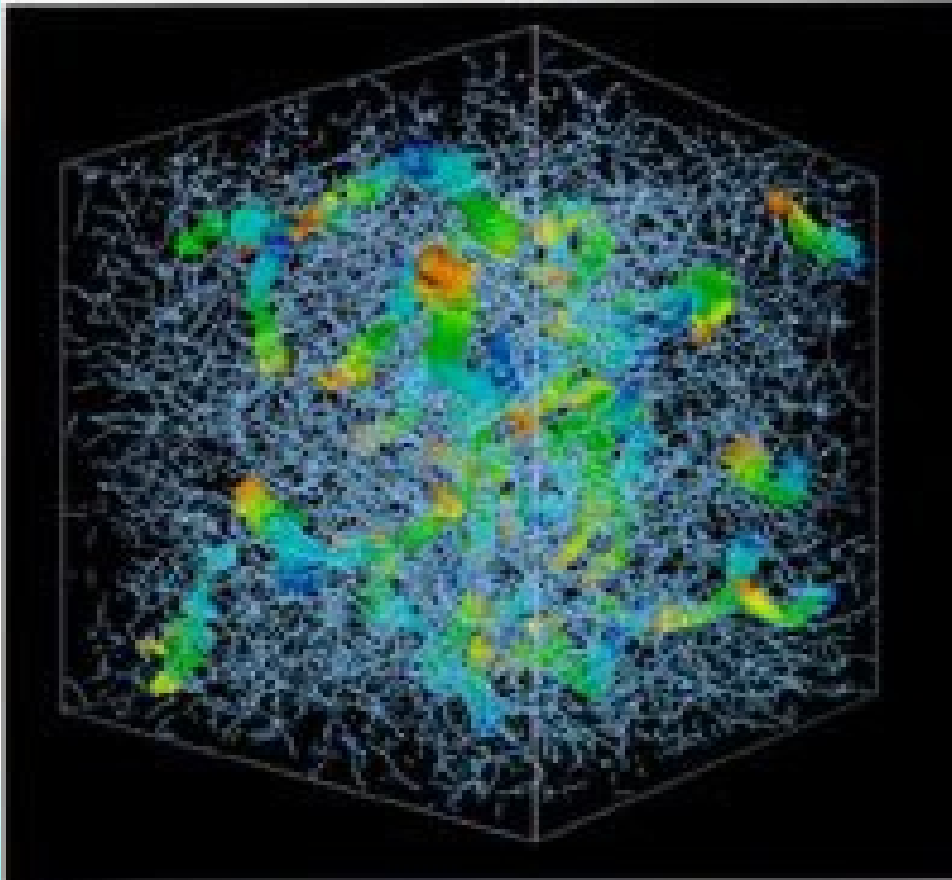
流速を上げていくと...



層流から乱流への転移



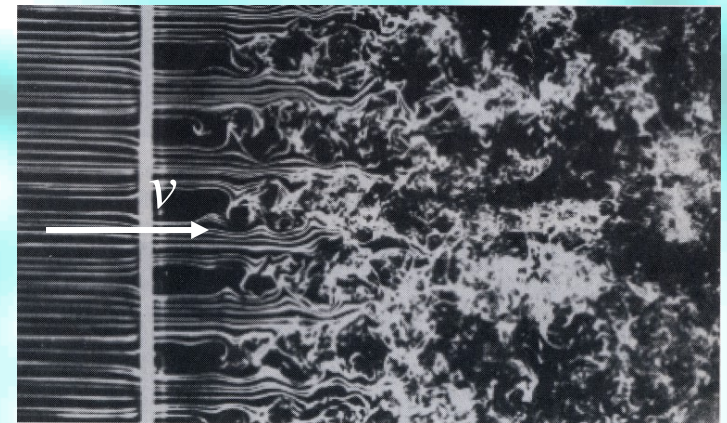
古典乱流と渦



Navier-Stokes方程式の数値解析
(京大工 木田重雄先生)

一様等方乱流中の低圧力旋回渦の中心
軸と芯領域の可視化

格子乱流

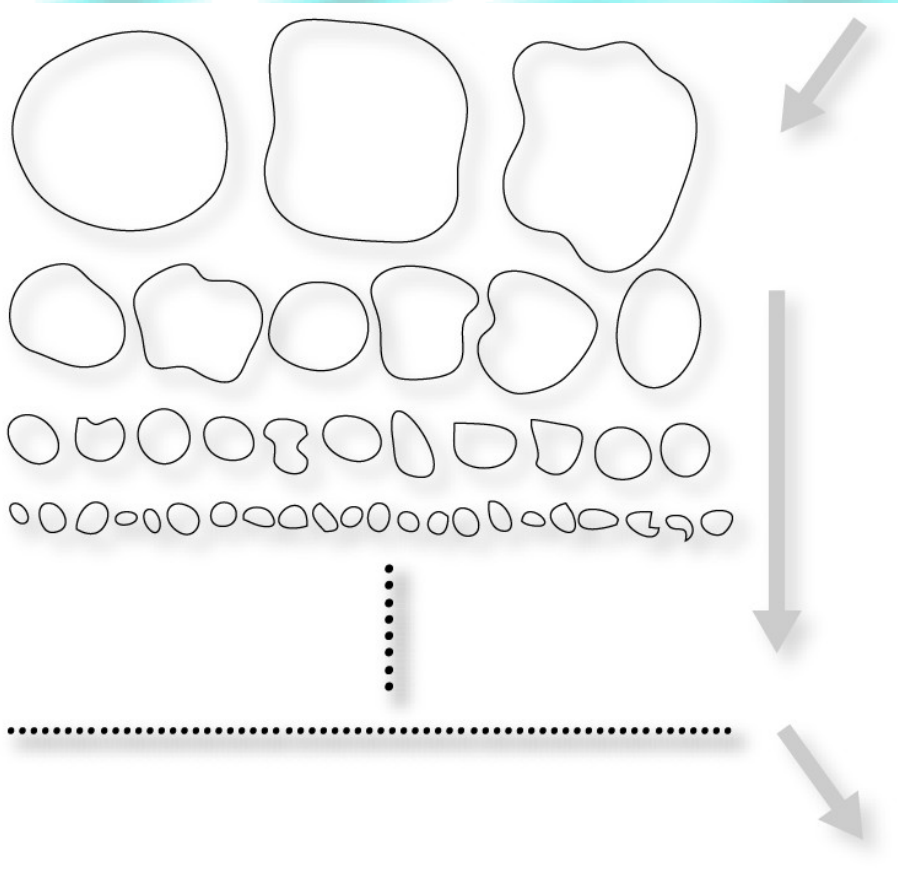


古典乱流において
、渦は非常に重要な
役割を果たして
いる。

Kolmogorov則とRichardsonカスケード

定常乱流 { ε : エネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率
慣性領域におけるエネルギー輸送率
(エネルギー注領域) = エネルギー注 }

において



渦のRichardsonカスケード

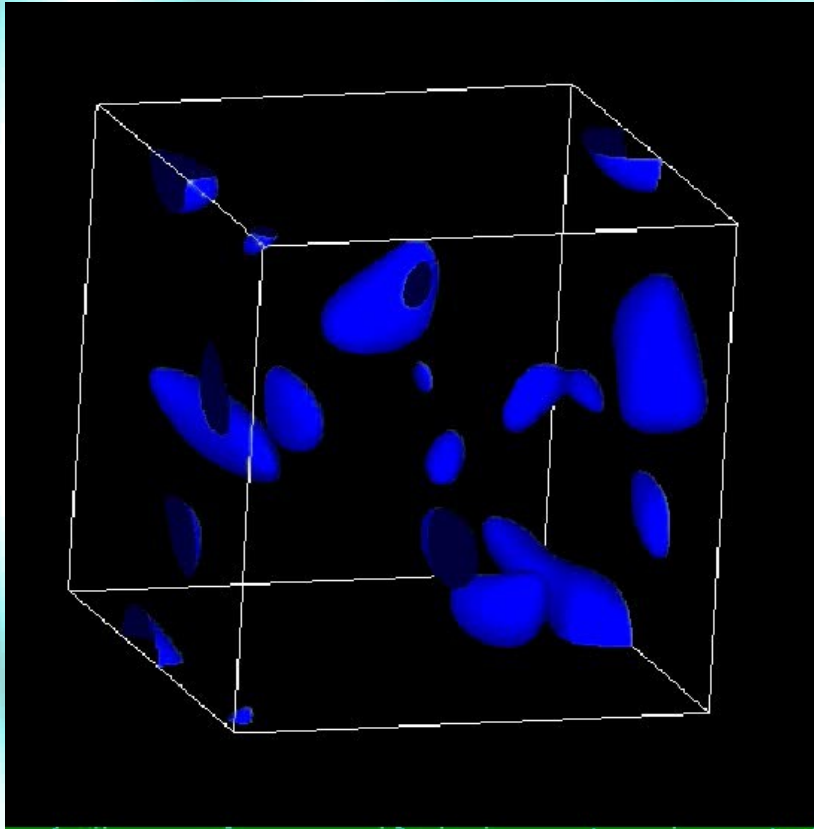
エネルギー注入領域にて、大きな渦が作られる

→ 慣性領域にて、渦がより小さな渦へと分裂してゆく

→ エネルギー散逸領域にて、小さな渦が粘性により消滅する

渦の分裂

Navier-Stokes 方程式のシミュレーション



高渦度の等値面図

エネルギー注入なしの減衰乱流



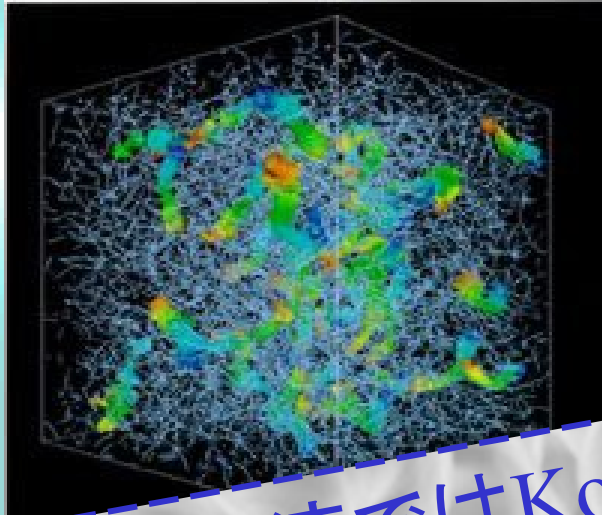
大きな渦度領域をランダムに幾つか配置し、時間発展



確かに渦は小さい渦へと分裂して
いっている

定常乱流ではこのプロセスが定常的に起きている？

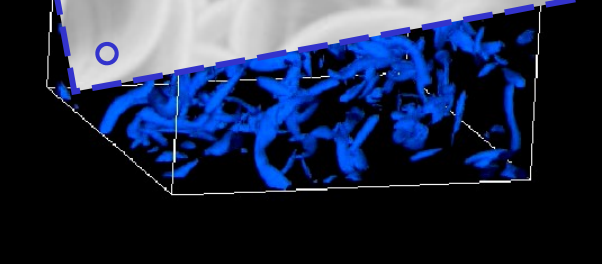
古典流体における渦



- 渦度 $\omega = \text{rot } v$ は連続的な値をとる
- 循環は任意の値をとる

古典乱流ではKolmogorov則と渦との関係 (Richardsonカスケード) が自明でない！
Richardsonカスケードは概念的なものである

古典流体では渦はぼやけ、渦の同定そのものが困難！（渦が安定ではない）



成を
程

再び超流動における渦

古典流体から
量子流体へ

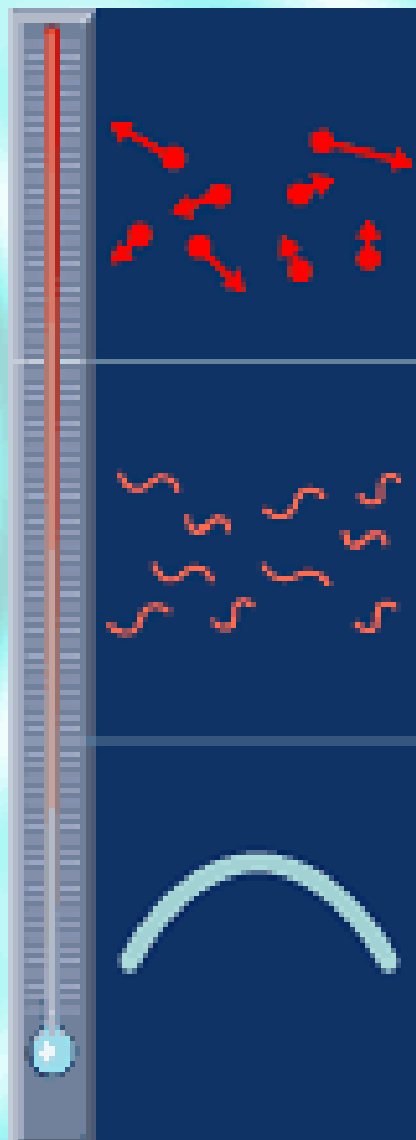
高温

粒子性が顕著

波動性が現れる
(物質波)

個々の物質波が全て重なって巨視的波動関数
を作る(ボース・アインシュタイン凝縮)

低温



巨視的波動関数の時間発展

ボース場のハミルトニアン(デルタ関数型の短距離反発芯相互作用)

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$$

$\hat{\Psi}(\hat{\Psi}^\dagger)$: ボース場の消滅 (生成) 演算子

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間反発芯の結合定数

ボース凝縮している系では

$\hat{\Psi} \rightarrow \Phi$ (凝縮体の巨視的波動関数) + $\hat{\phi}$ (非凝縮体の演算子)

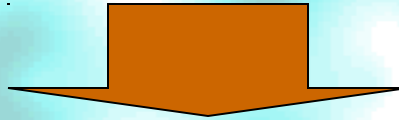
絶対零度近傍において $\hat{\phi}$ を無視する。

巨視的波動関数の時間発展

ハミルトン方程式を用いることで Φ の時間発展を得る

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial h}{\partial \Phi^*} - \nabla \cdot \frac{\partial h}{\partial (\nabla \Phi^*)}$$

$$h = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Phi^*) (\nabla \Phi) - \mu |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4 : \text{ハミルトン密度}$$



Gross-Pitaevskii(GP)方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g |\Phi|^2 \right] \Phi$$

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

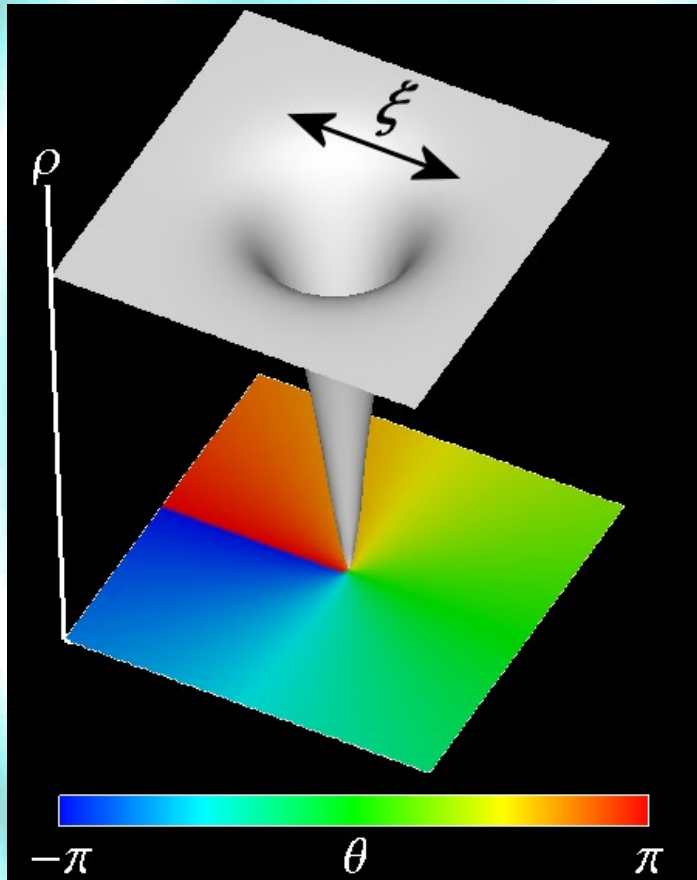
密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

流れはポテンシャル流:
渦なし状態

波動関数の位相欠陥：量子渦

波動関数の零点：位相欠陥



巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

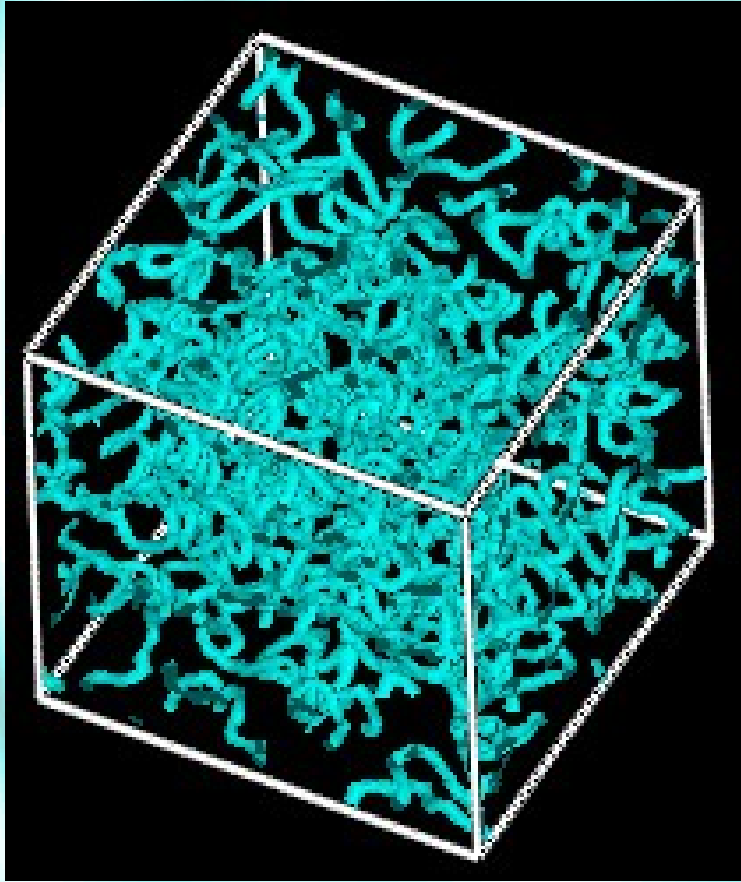
渦芯のサイズ（回復長） $\xi = 1/\sqrt{2mg\rho}$

量子渦回りの循環

$$\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = h / m$$

位相欠陥で流体は回転する(量子渦)

量子渦の特徴

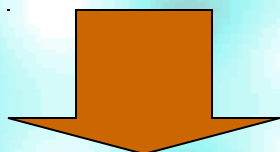


- 循環 $\kappa = h / m$ が量子化されている。
- 位相欠陥であるため、安定に存在できる(粘性拡散がない)
- 位相欠陥であるため、渦輪の形でのみ生成消滅し、渦輪の形でのみ存在する
- 渦芯のサイズは回復長 ξ で与えられ ($\xi^2 = \hbar^2 / 2mg\rho$)、絶対零度近傍では回復長 ξ よりも短いスケールでのみ渦散逸機構(高温では相摩擦による散逸機構)働く。

低温物理からの興味を超えた超流動乱流

量子渦は古典流体の渦と異なって安定かつ循環がそろっており、明確に定義できる

→ぼやけてははっきりしない古典流体の渦にまとわりついているよけいな自由度を取り除いた、渦の本質のみの形



量子渦を構成要素とする超流動乱流は構成要素がはっきりしない古典乱流の理想系となりうる(乱流の量子化)。

超流動乱流こそがKolmogorov則とRichardsonカスケードの関係を明らかにするかもしれない。

→絶対零度近傍の超流動乱流もKolmogorov則を示す可能性がある

絶対零度近傍の超流動乱流：過去の計算1

T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301

(2002)

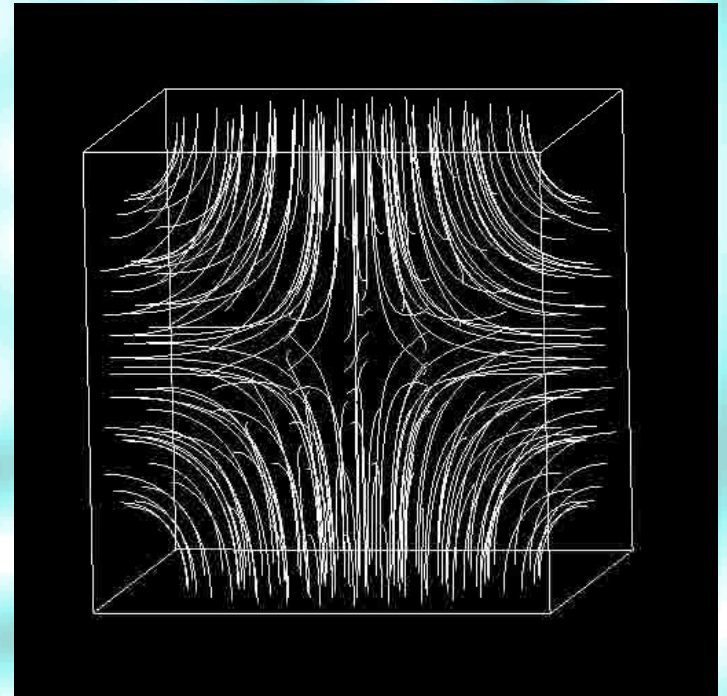
渦糸近似によって超流動乱流のダイナミクスを計算し、エネルギースペクトルを求める(初期状態: Taylor-Green-flow)。



$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3}$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{s})$$

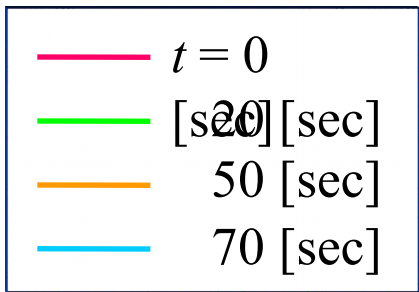
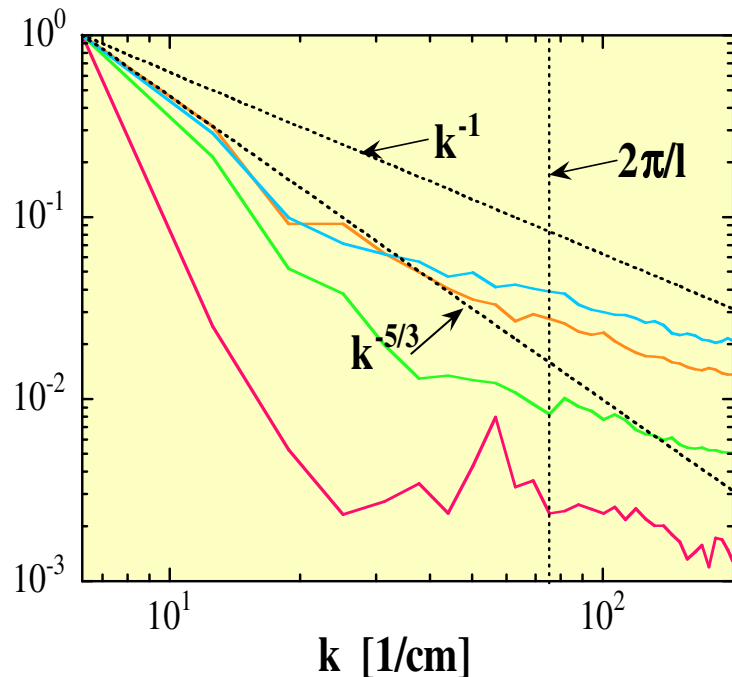
\mathbf{s} : 渦糸の位置座標



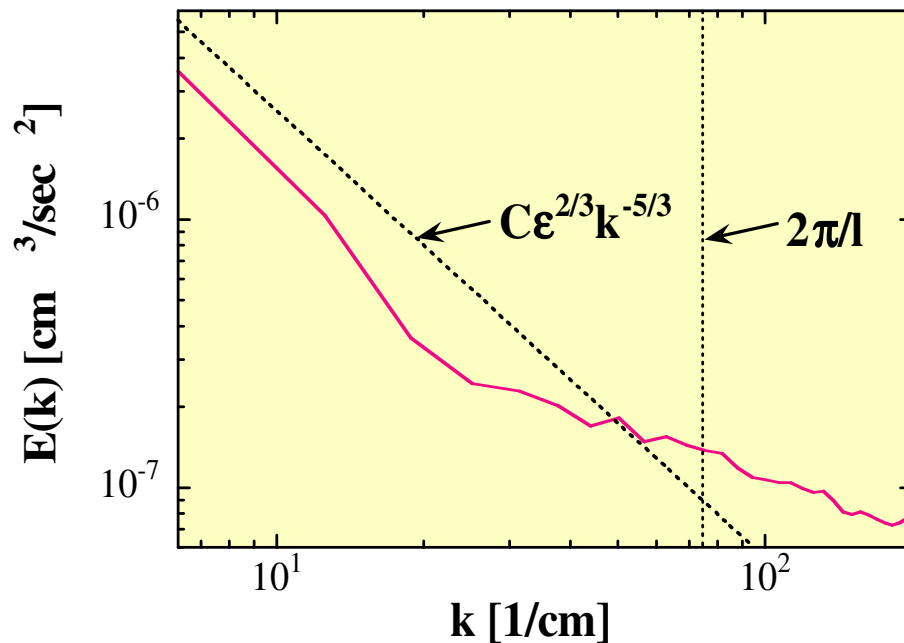
超流動乱流のシミュレーション
境界条件: 固体壁

絶対零度近傍の超流動乱流：過去の計算1

エネルギースペクトルの時間発展

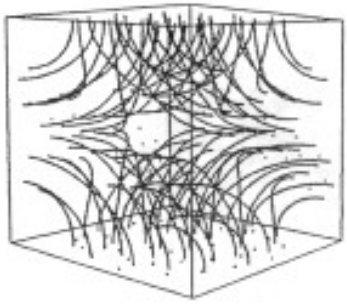


コルモゴロフ則との比較($C=1$)

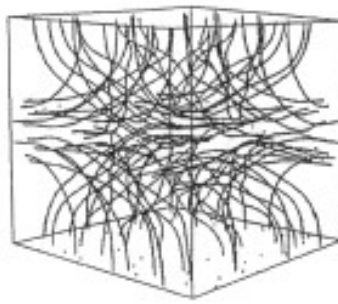


低波数側でエネルギースペクトルがKolmogorov則と一致した！
($C \doteq 0.7$)

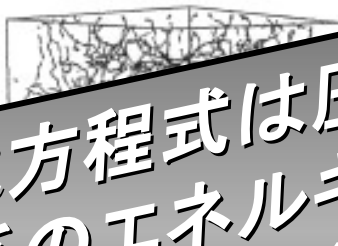
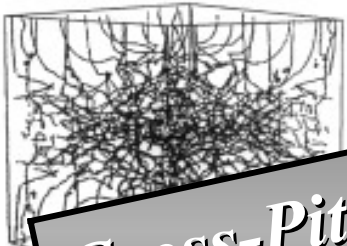
極低温の超流動乱流：過去の計算2



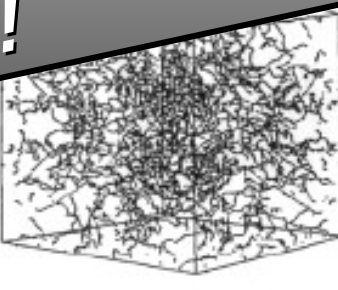
(a) $t = 2$



(b) $t = 4$



(e) $t = 10$



(f) $t = 12$

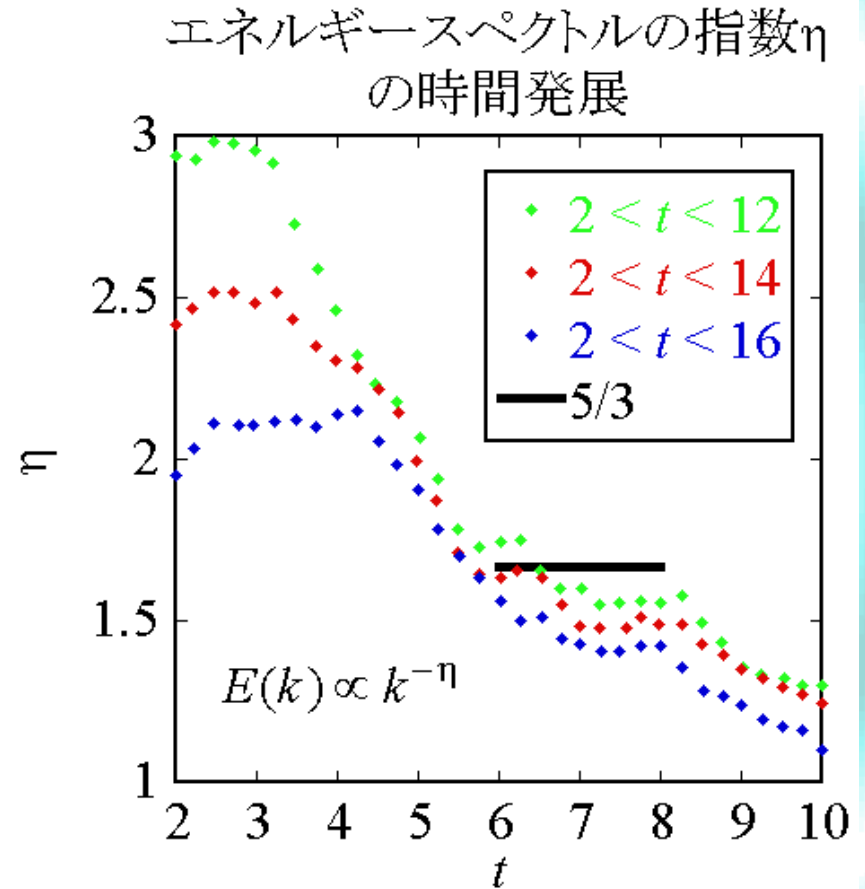
C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997)

Gross-Pitaevskii方程式は圧縮性流体の方程式であるため、全系のエネルギーは保存するものの、渦のエネルギーはどんどん圧縮性の素励起へと転化してゆく！

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

極低温の超流動乱流：過去の計算2

系の運動エネルギーを圧縮性（音波や素励起）と非圧縮性（量子渦）とに分け、非圧縮のエネルギースペクトルの指数を求める



時間発展の途中でエネルギースペクトルがKolmogorov則を示すが、その後素励起放出の圧縮性効果が顕著になることでスペクトルはKolmogorov則から外れてゆく。