

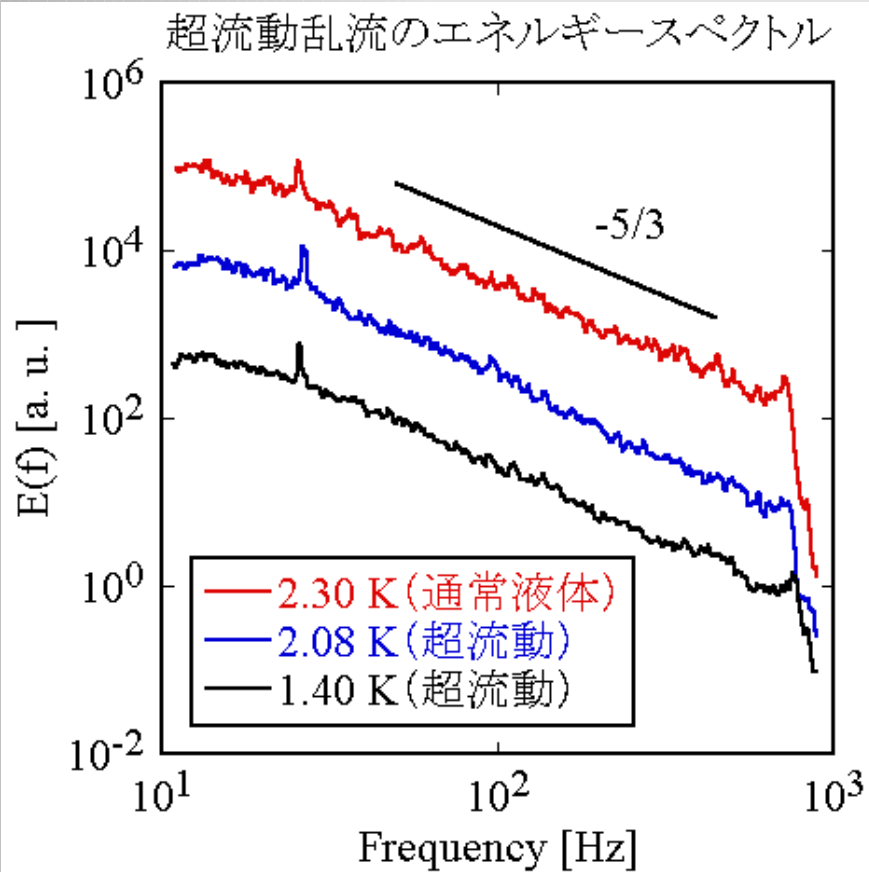
# Gross-Pitaevskii方程式による超流動 乱流のエネルギースペクトルII

大阪市立大理  
小林未知数・坪田誠

9月22日・日本物理学会2005年秋季大  
会

# 古典乱流と超流動乱流

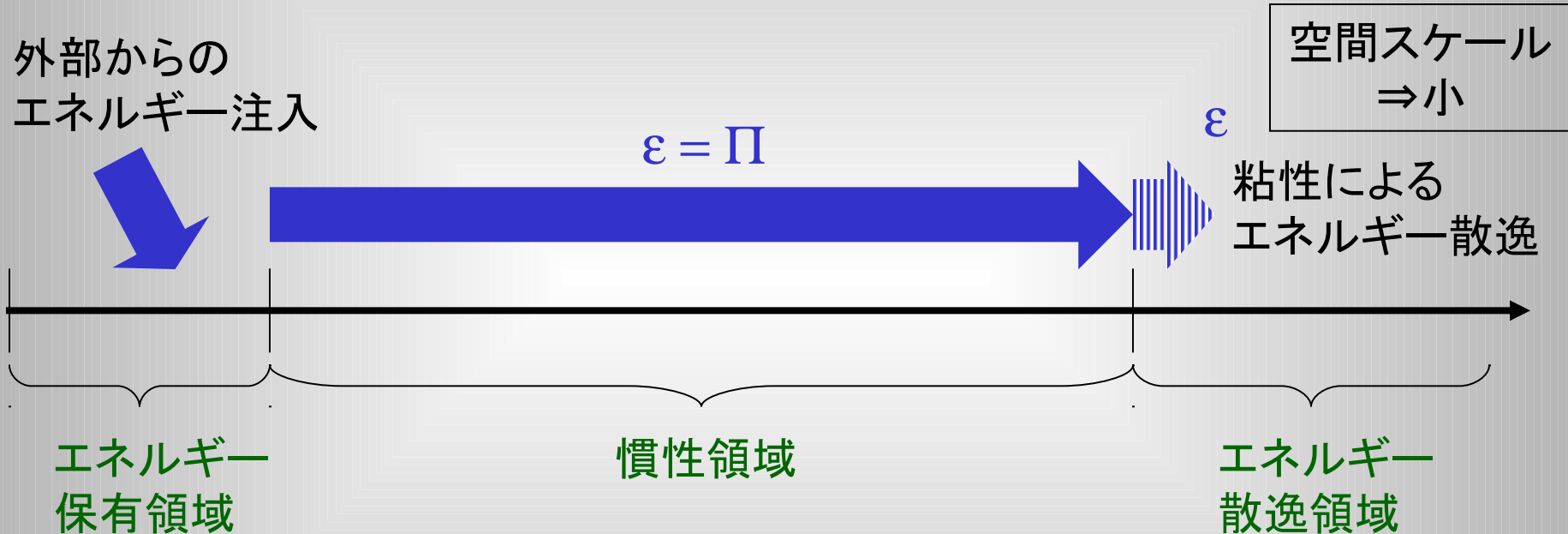
J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)



古典乱流において見つかったKolmogorov則が超流動乱流(Grid Turbulence)においても見つかる。

# Kolmogorov則と慣性領域

発達した一様等方非圧縮性古典乱流



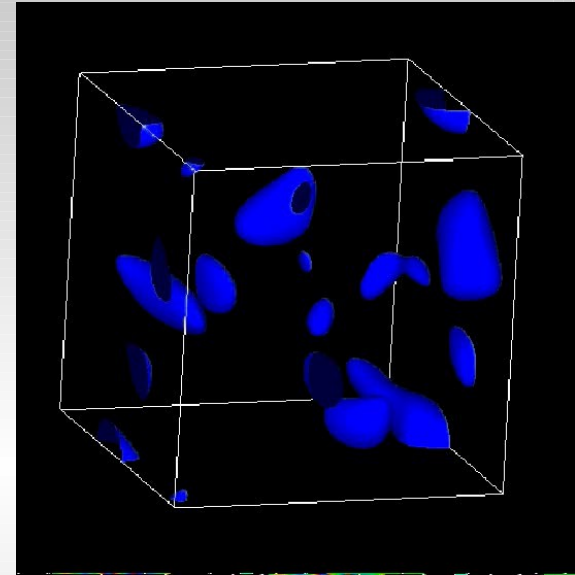
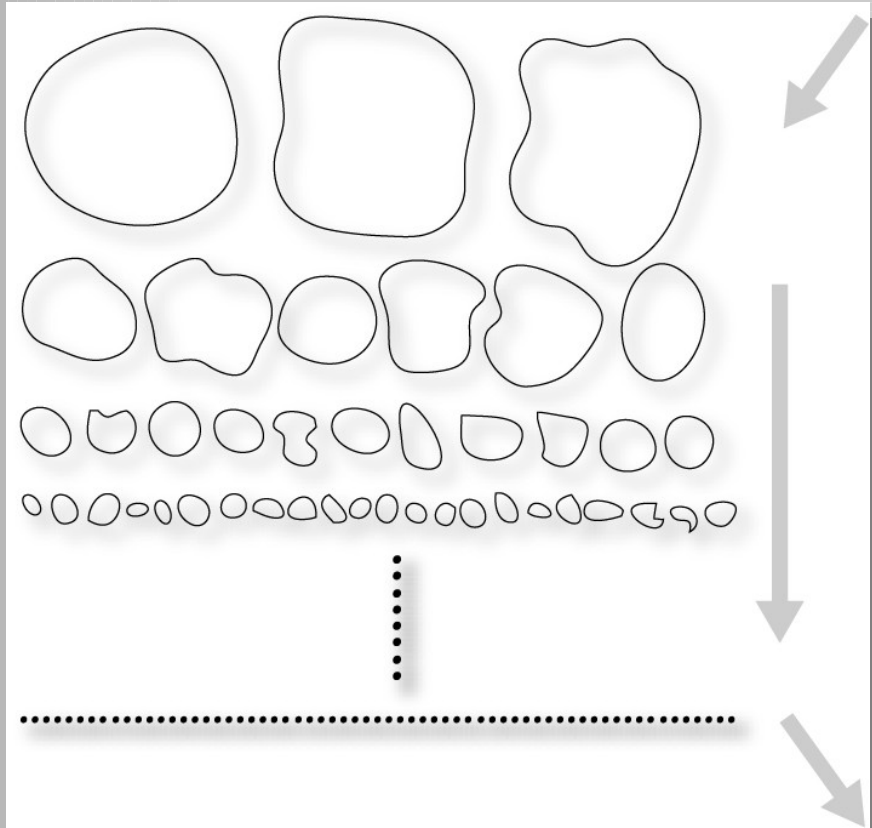
慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持つ

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (C \sim 1)$$

$k$ : 波数  $\epsilon$ : エネルギー散逸率

$\Pi$ : エネルギー流  $C$ : Kolmogorov定数

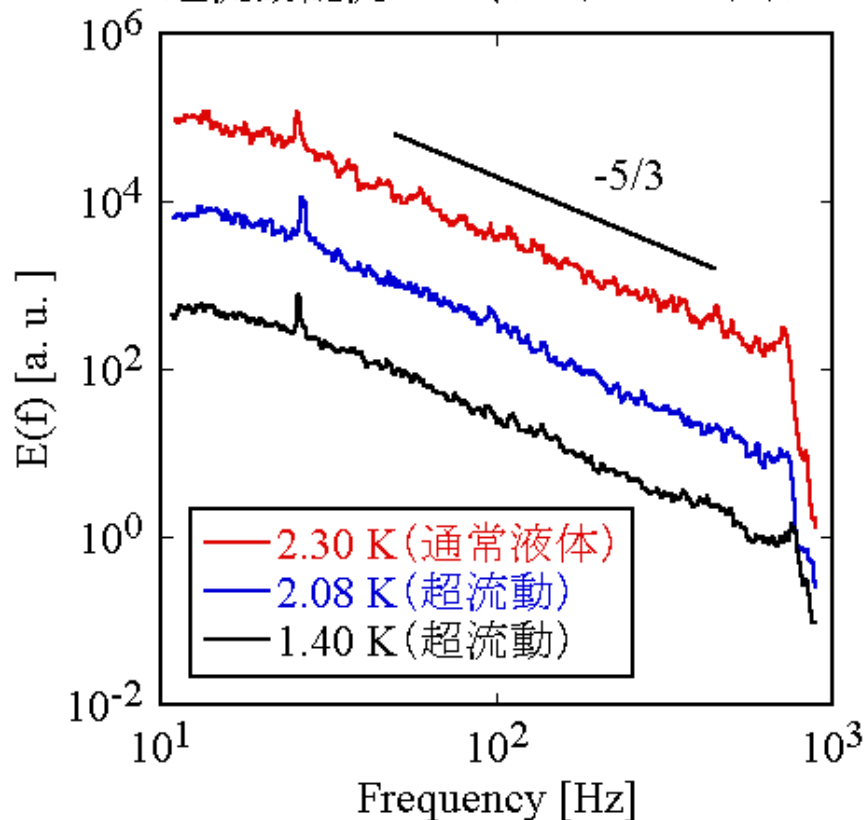
# Richardsonカスケード



Kolmogorov則が成り立つ慣性領域は渦のRichardsonカスケードの描像によって理解される

位相欠陥である量子渦を構成要素とする量子乱流はKolmogorov則、慣性領域、Richardsonカスケードを理解するための理想的な系であると考えられる

超流動乱流のエネルギースペクトル



常流体との相互摩擦力を通して超流体と常流体がともに古典乱流のように振舞う

常流体のない絶対零度近傍においても量子渦によって古典流体と同じ統計が満たされるはず

# Gross-Pitaevskii方程式による絶対零度での量子乱流シミュレーション

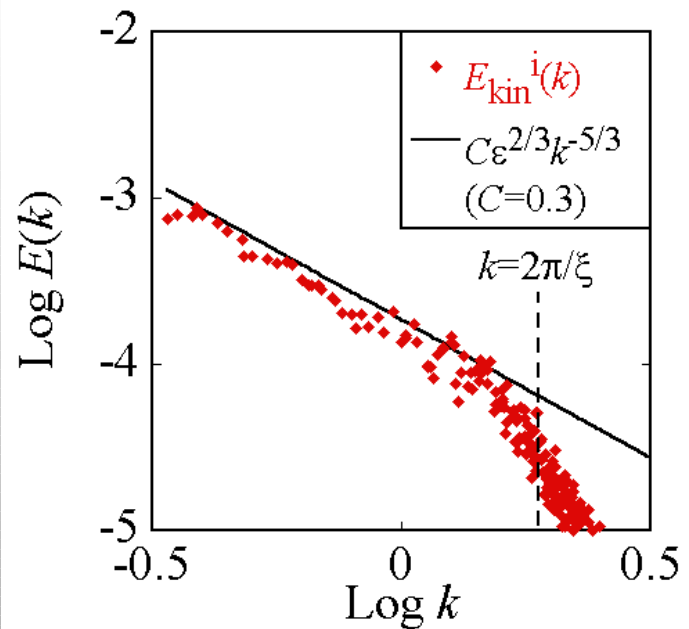
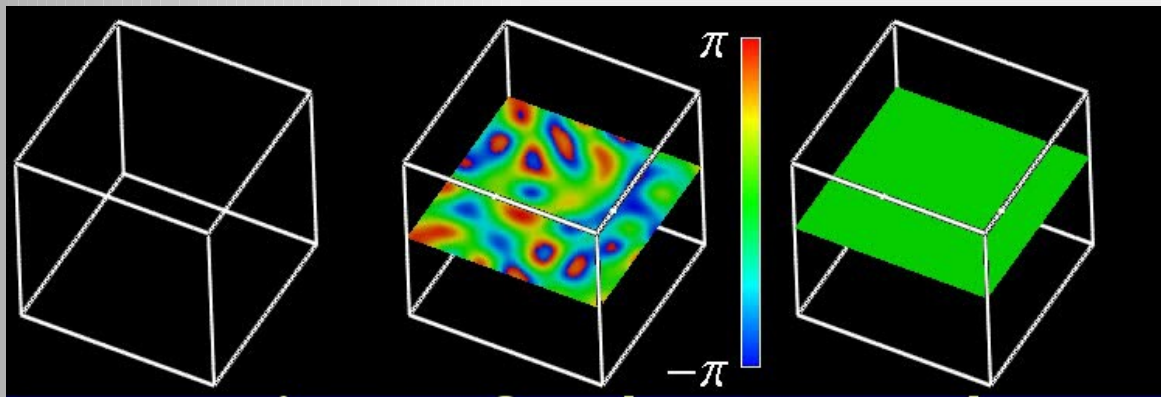
M. K. and M. T., Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2004)

前回の計算: ランダムな位相から出発した減衰乱流

渦

位相

密度

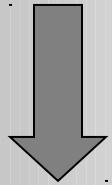


# 定常乱流のシミュレーション

M. K. and M. T., cond-mat, 0508624 (2005)

## Gross-Pitaevskii方程式

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + V(\mathbf{x}, t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



スペクトル法を使うためにフーリエ変換

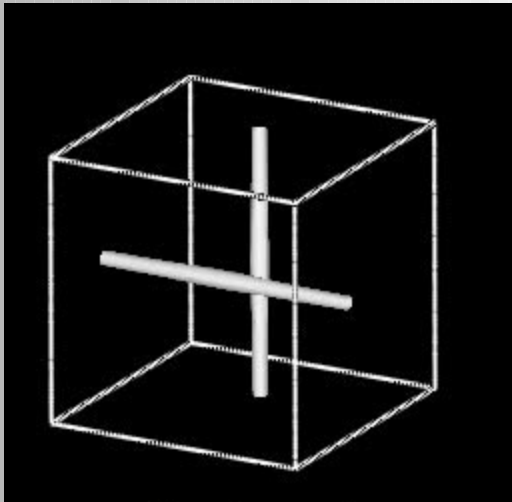
$$[i - \tilde{\gamma}(k)] \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu(t)] \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \tilde{V}(\mathbf{k}_1, t) \tilde{\Phi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, t) + \frac{g}{L^6} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}_1, t) \tilde{\Phi}^*(\mathbf{k}_2, t) \tilde{\Phi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{g|\Phi|^2}}: \text{回復長 (渦芯の太さ)}$$

# 小スケールにおける散逸項

$$[i - \tilde{\gamma}(k)] \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu(t)] \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \tilde{V}(\mathbf{k}_1, t) \tilde{\Phi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, t) + \frac{g}{L^6} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}_1, t) \tilde{\Phi}^*(\mathbf{k}_2, t) \tilde{\Phi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t)$$

$\tilde{\gamma}(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$ : 回復長  $\xi$  よりも短いスケールのみで有効



渦の再結合

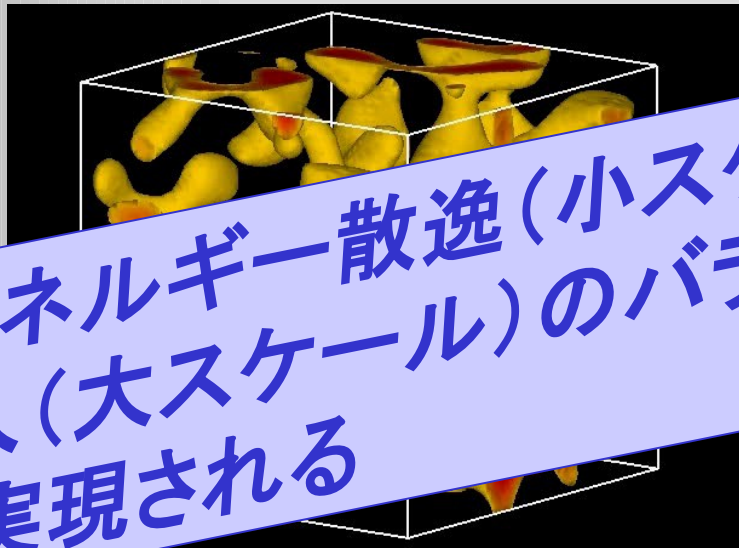
渦の再結合やカスケードによる渦の消滅の際に回復長以下の短波長圧縮性素励起が励起される

⇒ 散逸項が圧縮性素励起のみを散逸させ、乱流への影響を抑制する



# 大スケールからのエネルギー注入

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + \underbrace{V(\mathbf{x}, t)}_{\text{エネルギー注入}} + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



エネルギー散逸 (小スケール) とエネルギー注入 (大スケール) のバランスにより定常乱流が実現される

エネルギーを注入する

$$\langle V(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}', t') \rangle = V_0^2 \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2X_0^2} - \frac{(t - t')^2}{2T_0^2} \right]$$

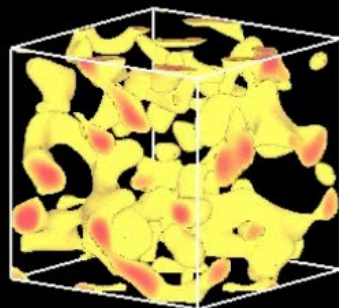
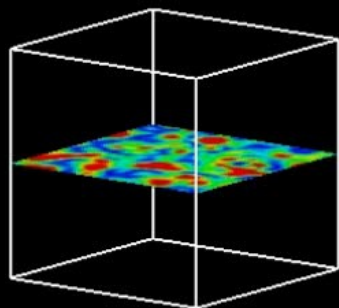
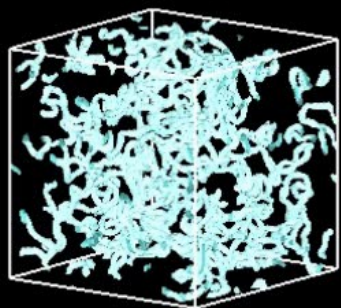
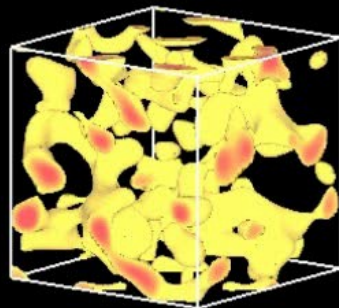
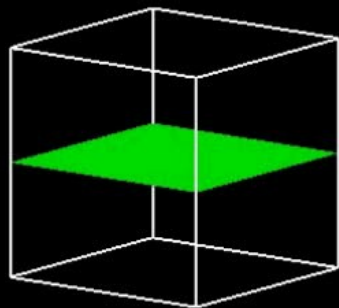
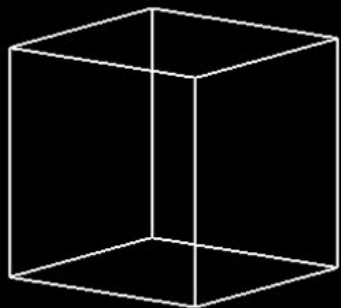
$X_0$ : エネルギー注入の特徴的スケール (このスケールで量子渦が生成する)

# 初期状態: 一様

渦

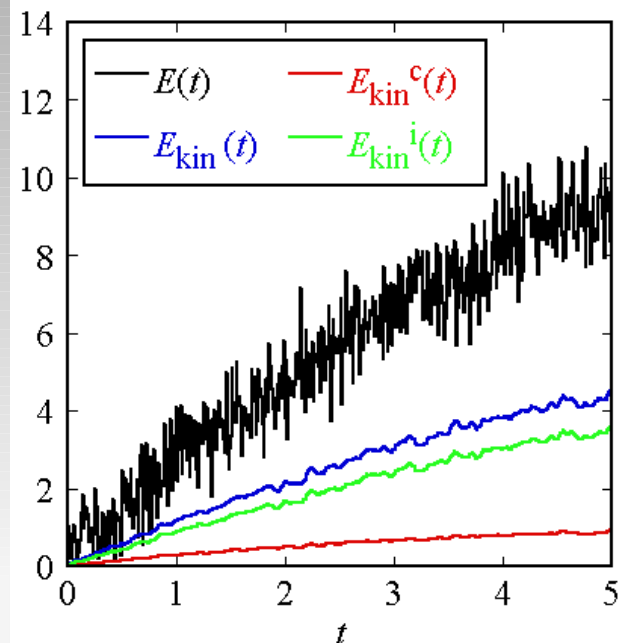
密度

ポテンシャル

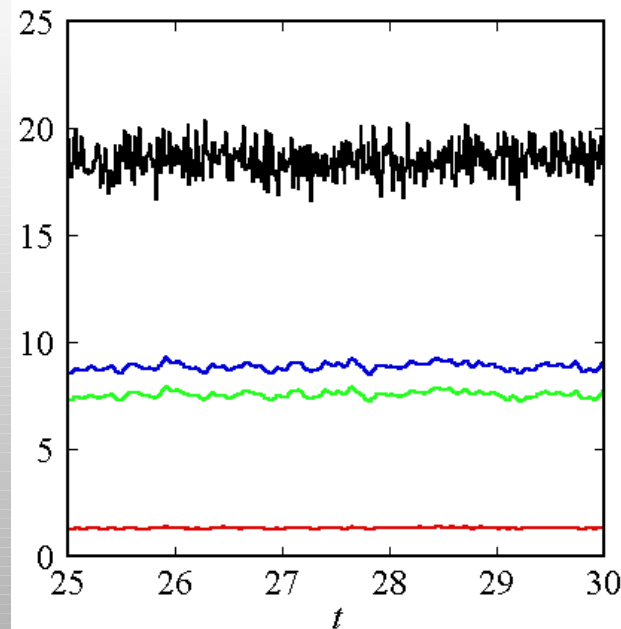


$t > 25$ にて定常乱流が実現される  
非圧縮エネルギーが常に運動エネルギーを支配している

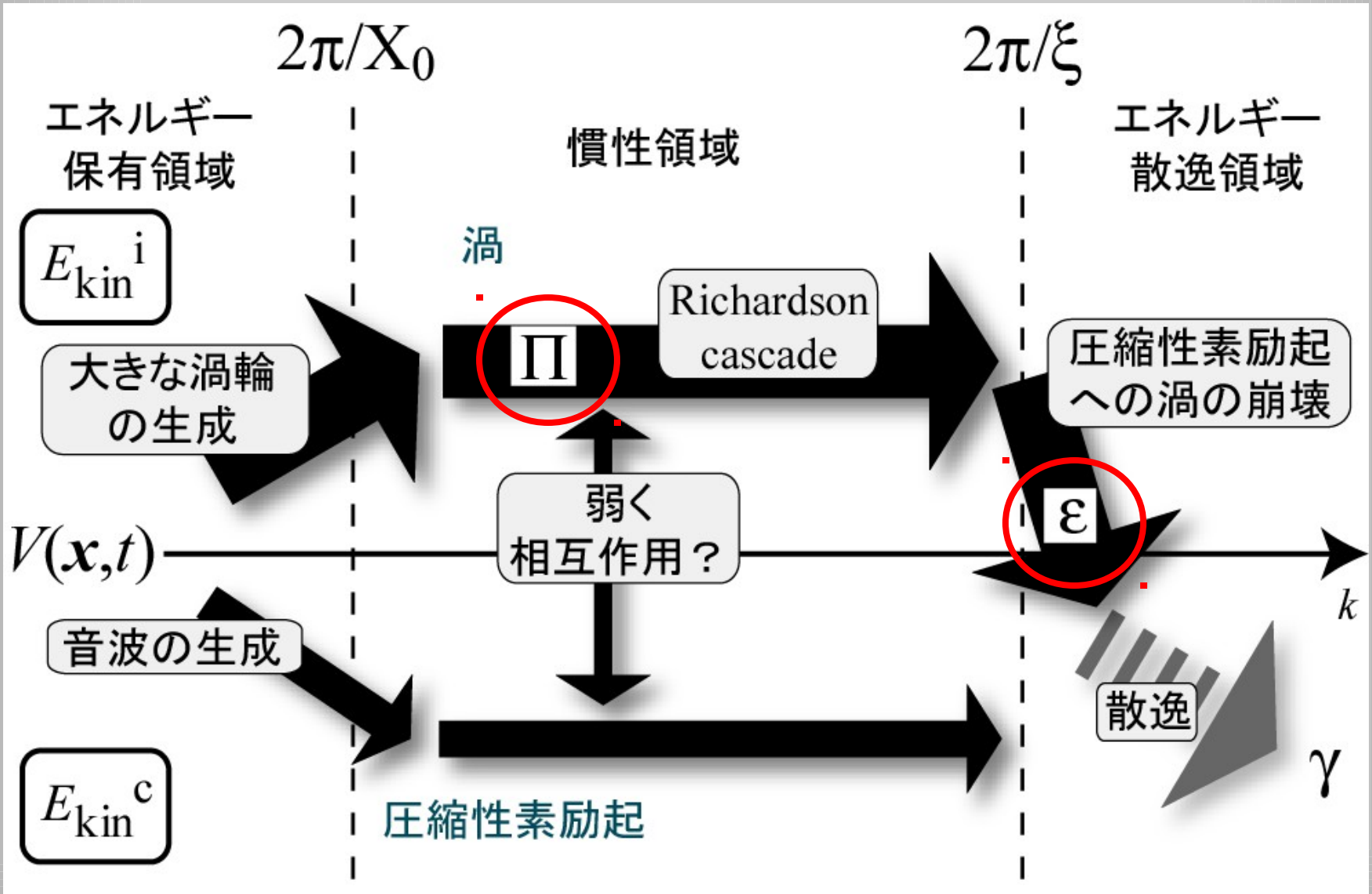
初期ステージ



定常ステージ

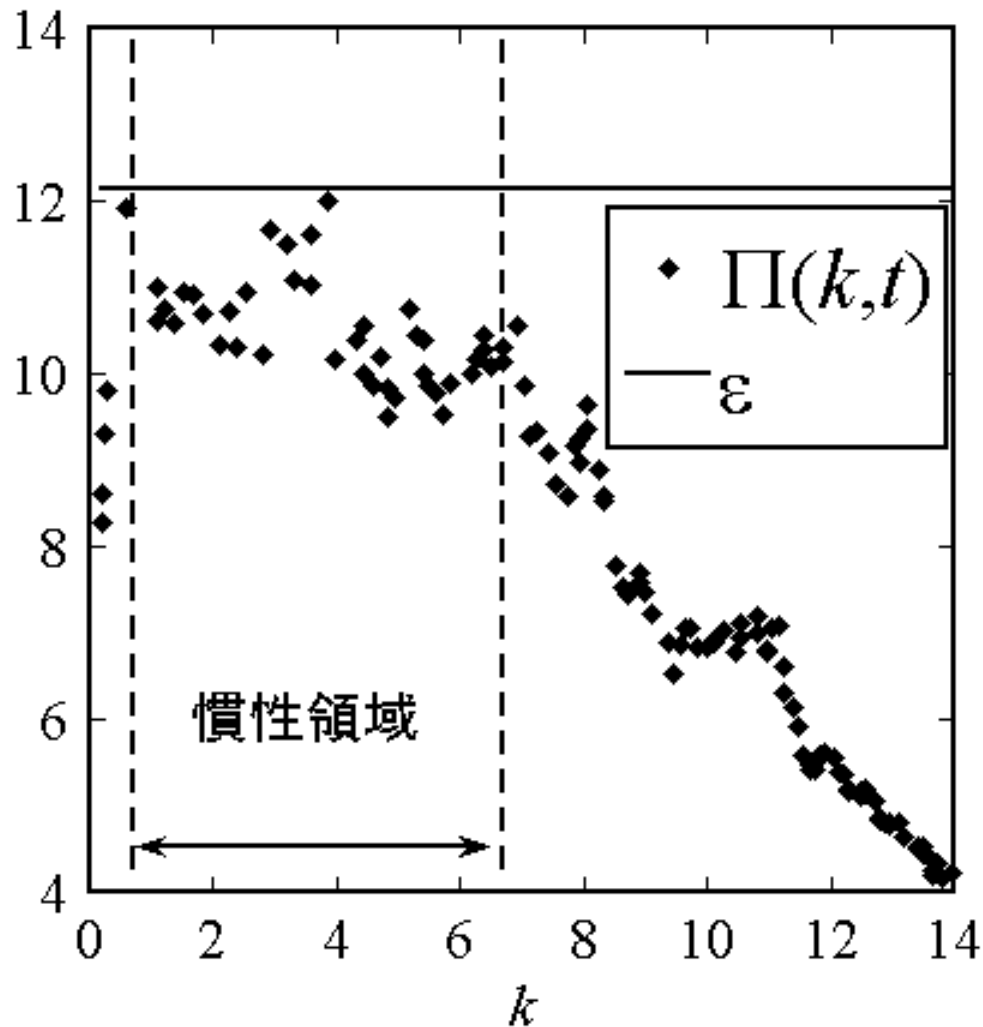


# エネルギー伝播の描像



# エネルギー流束と散逸率

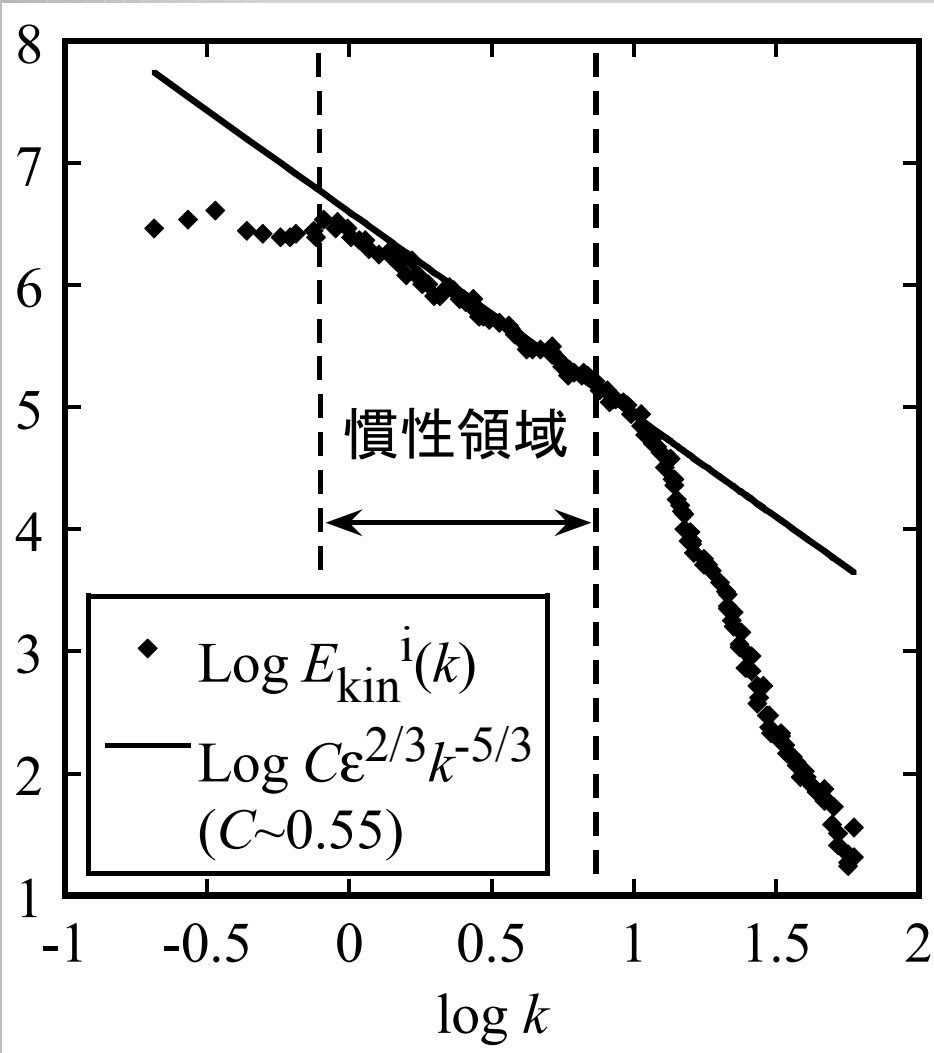
エネルギー流束の波数依存性



1. エネルギー流束 $\Pi$ は慣性領域においてほぼ一定の値をとる
2. 慣性領域におけるエネルギー流束 $\Pi$ はエネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率 $\varepsilon$ とほぼ同値をとる

⇒エネルギー伝播現象として超電流における慣性領域の存在が明らかになった!

# エネルギースペクトル



慣性領域でエネルギースペクトルが  
Kolmogorov則と一致し  
た！

# まとめ

- Gross-Pitaevskii方程式にエネルギー散逸とエネルギー注入を導入し、定常な超流動乱流のシミュレーションに成功した。
- エネルギー散逸率とエネルギー流束を計算することで超流動乱流における慣性領域の存在とエネルギー伝播の描像を初めて明らかにした。
- 慣性領域においてKolmogorov則を満たすエネルギースペクトルを得た。
- 超流動乱流は乱流を理解するための理想的なモデルとなりうる。

# 今後の計算：乱流中の散逸構造

実際の系で散逸  $\tilde{\gamma}(\mathbf{k}) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$  なのか？  
有限温度ではどうなるのか？

凝縮体揺らぎや凝縮体からの素励起と凝縮体との相互作用(有限温度の場合)を含んだBogoliubov-de-Gennes方程式とGross-Pitaevskii方程式の連立方程式を解くことで実際の散逸構造とその温度依存性を調べる

# エネルギーの分類

$$\text{全エネルギー} : E = \frac{\int d\mathbf{x} \Phi^*(\mathbf{x}, t) [-\nabla^2 + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)}{N}$$

$$\text{運動エネルギー} : E_{\text{kin}} = \frac{\int d\mathbf{x} [|\Phi(\mathbf{x}, t)| \nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2}{N}$$

$$\text{圧縮成分} : E_{\text{kin}}^{\text{c}} = \frac{\int d\mathbf{x} [\{|\Phi(\mathbf{x}, t)| \nabla \phi(\mathbf{x}, t)\}^{\text{c}}]^2}{N}$$

$$\text{非圧縮成分} : E_{\text{kin}}^{\text{i}} = \frac{\int d\mathbf{x} [\{|\Phi(\mathbf{x}, t)| \nabla \phi(\mathbf{x}, t)\}^{\text{i}}]^2}{N}$$

$$N = \int d\mathbf{x} |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$$

$$\text{rot}\{\dots\}^{\text{c}} = 0$$

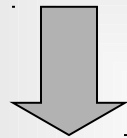
$$\text{div}\{\dots\}^{\text{i}} = 0$$



# エネルギー流束の計算

Gross-Pitaevskii方程式からエネルギー収支方程式へ

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + V(\mathbf{x}, t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



M. K. and M. T., cond-mat, 0508624 (2005)

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \Pi(\mathbf{k}, t) = -\Omega(\mathbf{k}, t) + \mathcal{F}(\mathbf{k}, t)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$  : 0 から  $k$  までのエネルギーの総和

$\Pi(\mathbf{k}, t)$  :  $k$  におけるエネルギー流束

$\Omega(\mathbf{k}, t)$  :  $k$  におけるエネルギー散逸

$\mathcal{F}(\mathbf{k}, t)$  :  $k$  におけるエネルギー注入

# 数値計算のパラメータ

回復長で長さを規格化  $\xi = 1$

$$g = 0.125 \quad \gamma_0 = 1$$

$$V_0 = 50 \quad X_0 = 4 \quad T_0 = 6.4 \times 10^{-2}$$

計算の空間  $L = 32$  の周期的な箱

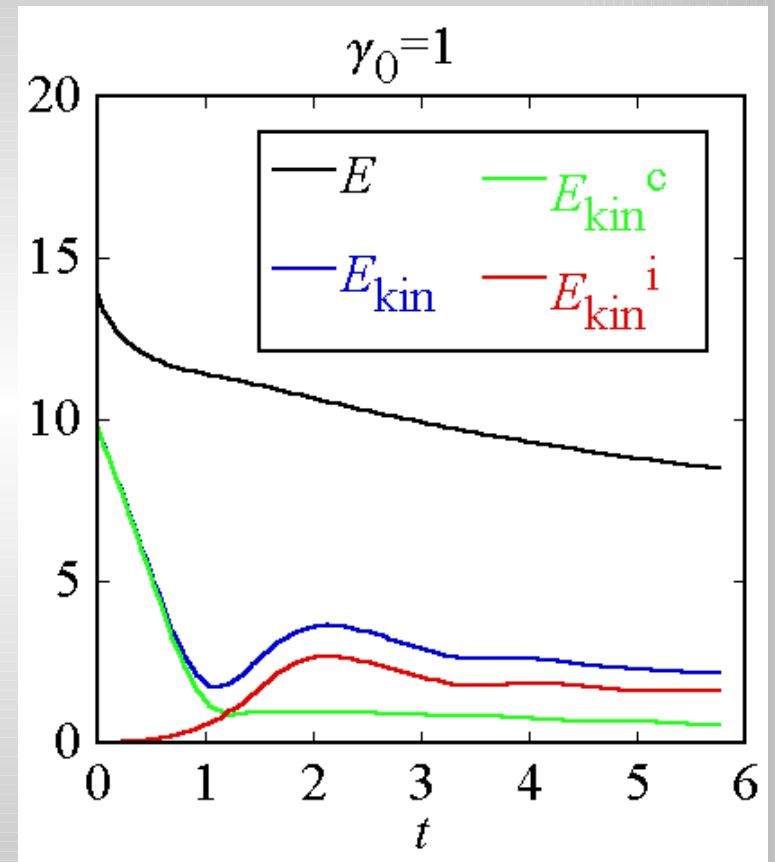
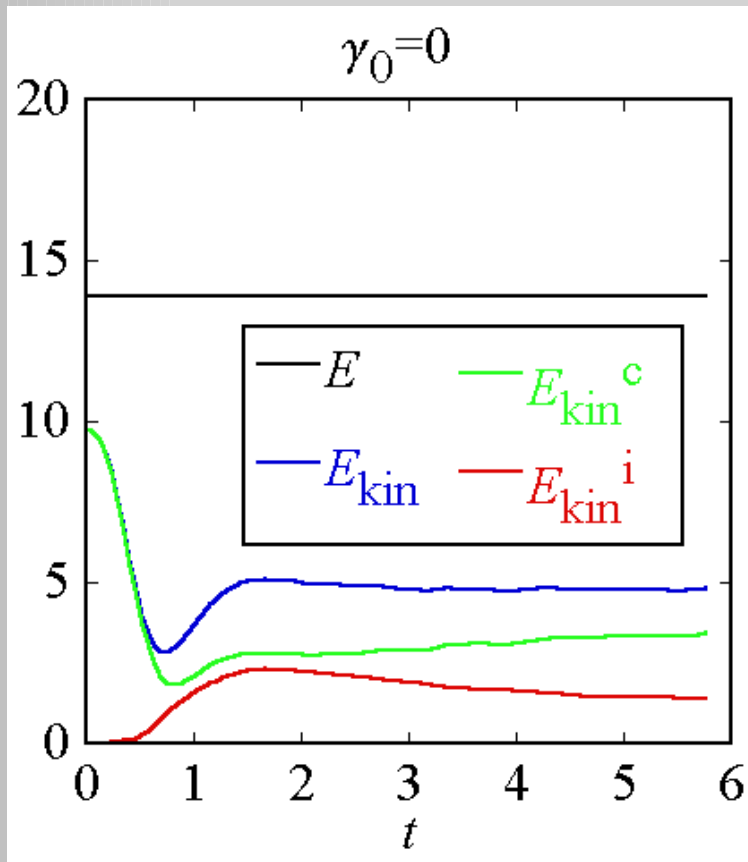
$$N_{\text{grid}} = 256^3 \quad \Delta x = 0.125 \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4}$$

(時間発展は Runge-Kutta-Verner 法によって得られる)

$$N_{\text{grid}} = 512^3 \quad \Delta x = 0.0625$$

としても結果は  $10^{-13}$  の精度で変化しない：エリアジングエラーは小さい

# 減衰乱流における散逸の効果

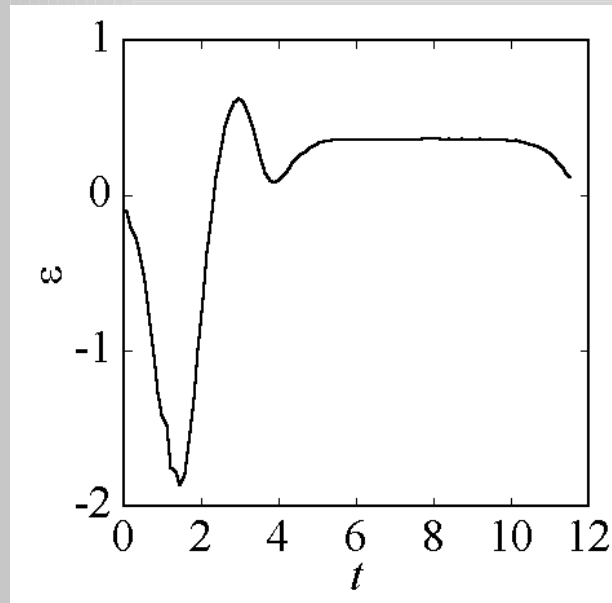


散逸がないと圧縮性素励起がダイナミクスを支配する

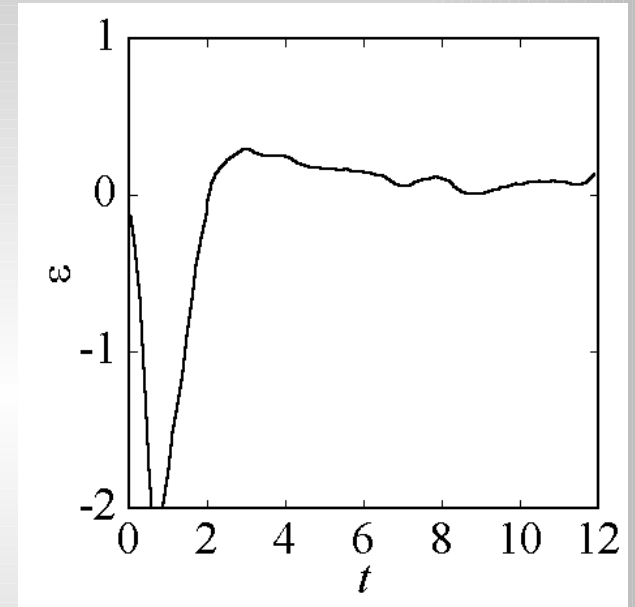
## 渦のエネルギーの散逸率

$$\varepsilon = -\frac{\partial E_{\text{kin}}^i}{\partial t}$$

$\gamma_0=1$



$\gamma_0=0$



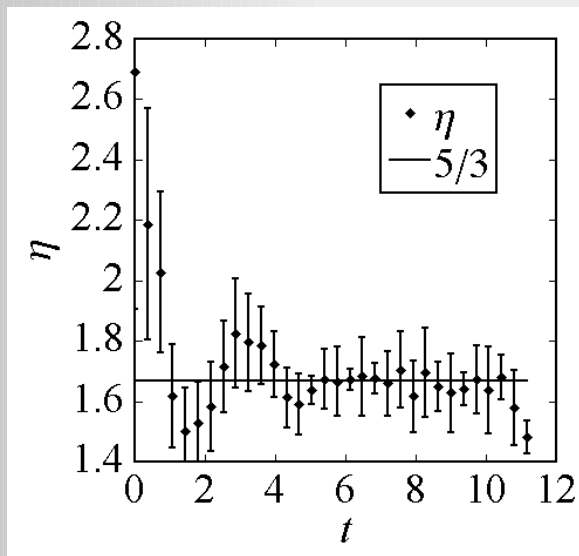
散逸がないと散逸率は負符合になりうる: 圧縮性素励起から渦へのエネルギーの逆流が生じる

# エネルギースペクトルの指数

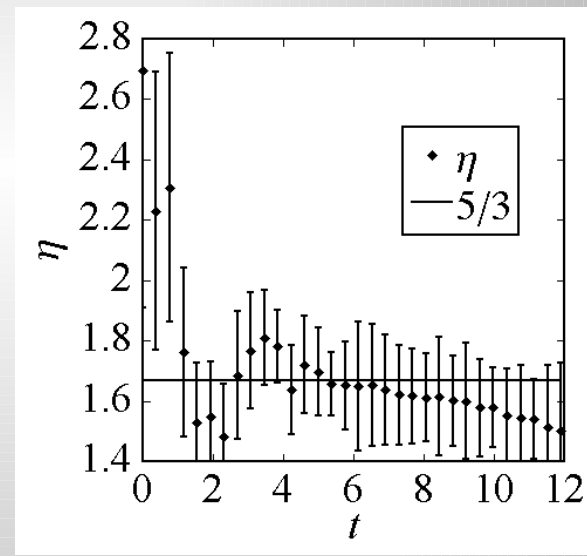
$$E_{\text{kin}}^i = \int dk E_{\text{kin}}^i(k)$$
$$E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^{-\eta} \text{ (慣性領域)}$$

両対数プロットの直線フィッティングにより  $\eta$  を求める

$\gamma_0=1$



$\gamma_0=0$



散逸がないとエネルギースペクトルはKolmogorov則からすぐに外れる

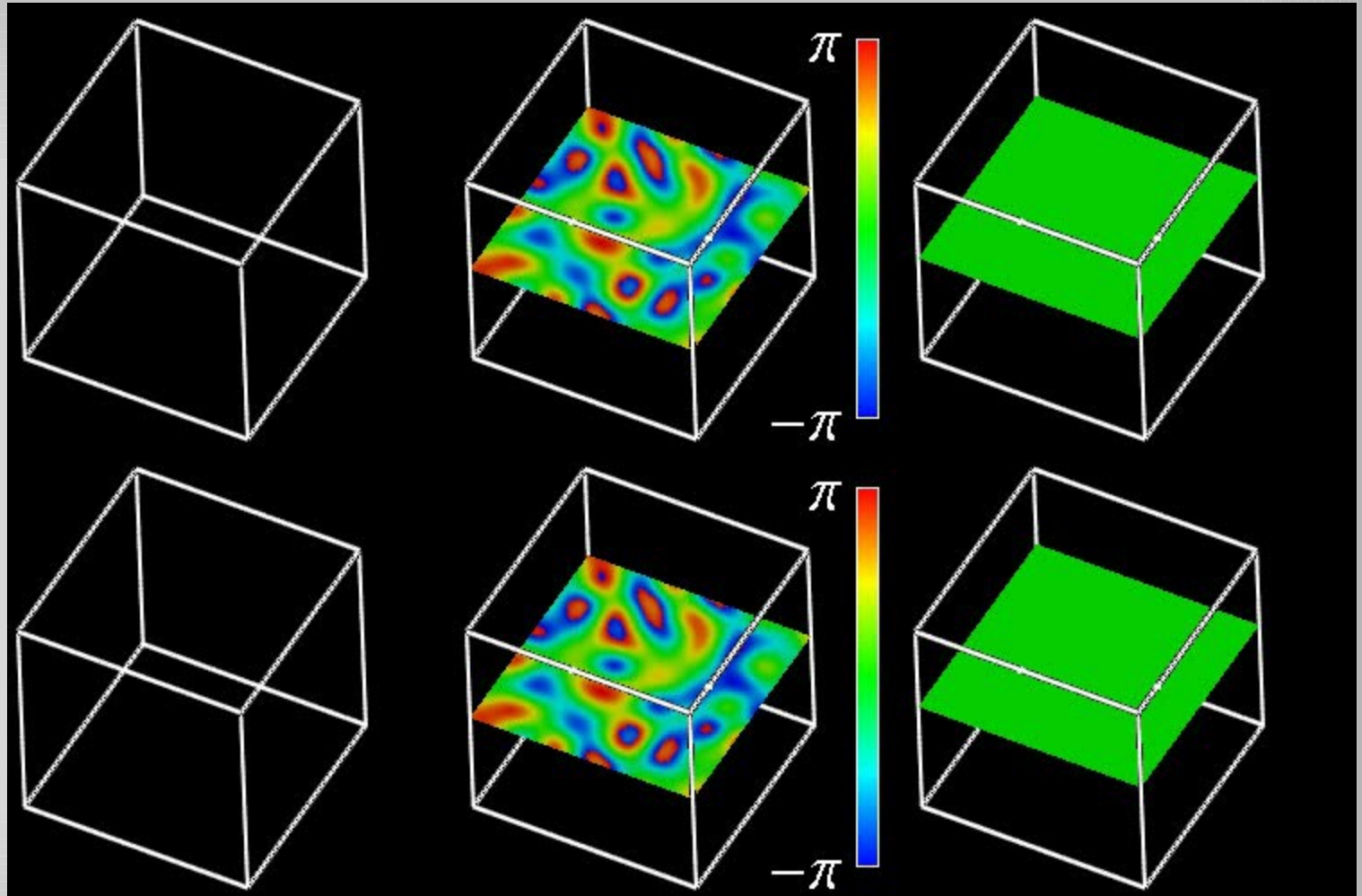
渦

位相

密度

$0 < t < 6$

$\gamma_0 = 0$   
(散逸なし)



$\gamma_0 = 1$   
(散逸あり)

渦配置はほとんど同じであるが、密度も  $\gamma_0 = 0$  のときに現れる細かい構造が  $\gamma_0 = 1$  では消えている

## 渦の再結合のダイナミクスを比較

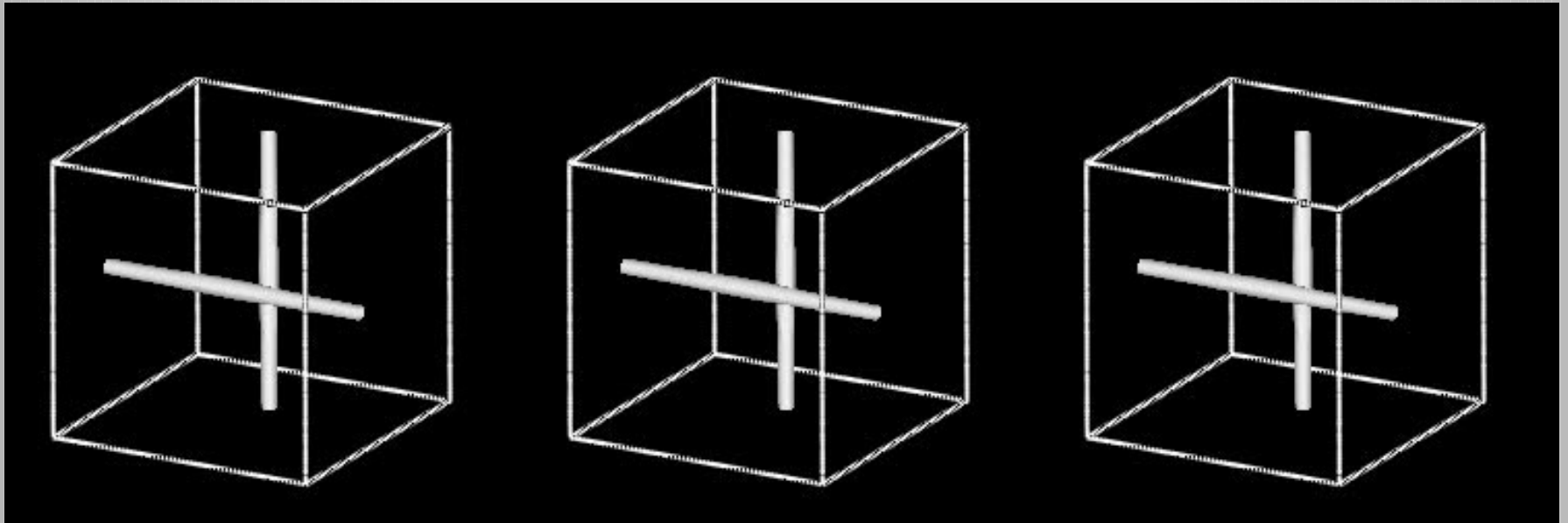
$\gamma(k) = \gamma_0$  : 全てのスケールで効く散逸

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$  : 短いスケールのみで効く散逸

$$\gamma(k) = 0$$

$$\gamma(k) = \gamma_0$$

$$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi /$$



波数に依存しない散逸は圧縮性素励起のみならず渦まで散逸させる

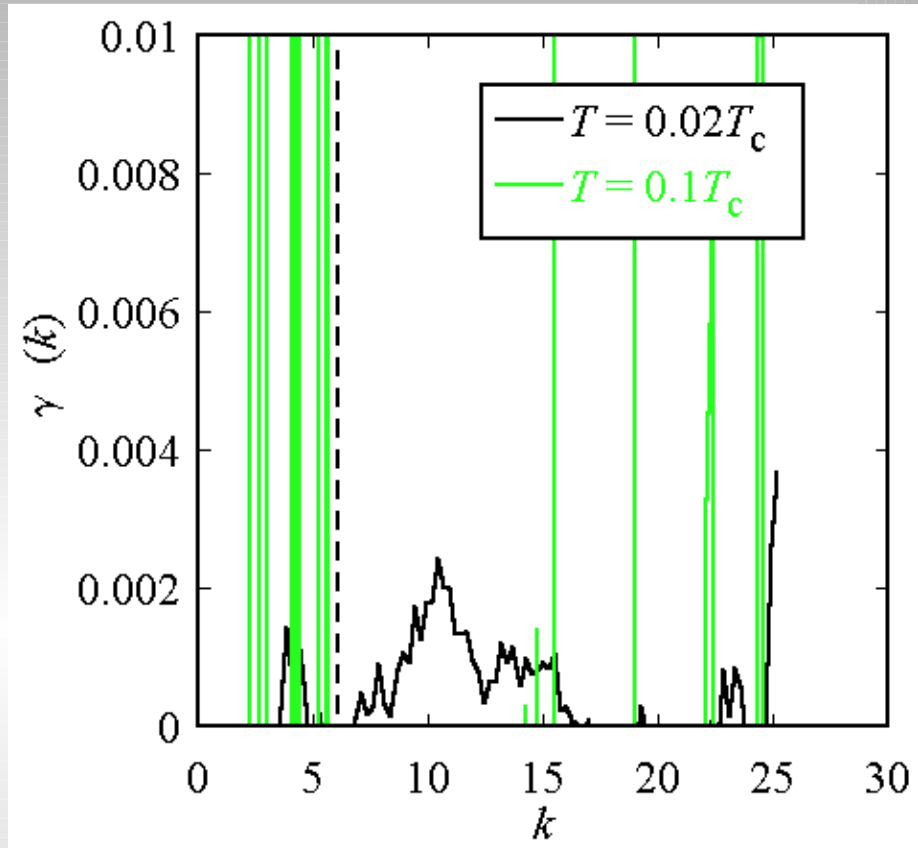
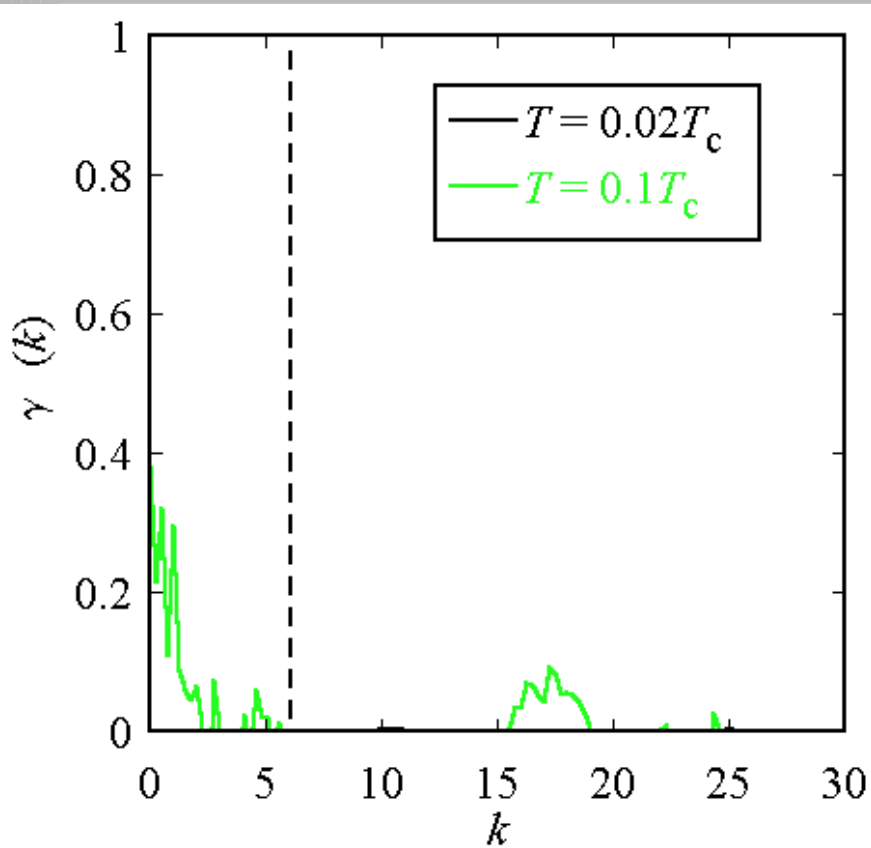
# 乱流中の散逸構造とBdG方程式

乱流中の散逸は凝縮体揺らぎや素励起(有限温度の場合)と凝縮体の相互作用によって生じると考えられる。

BdG方程式を解くことで散逸の具体的な形が分かる？

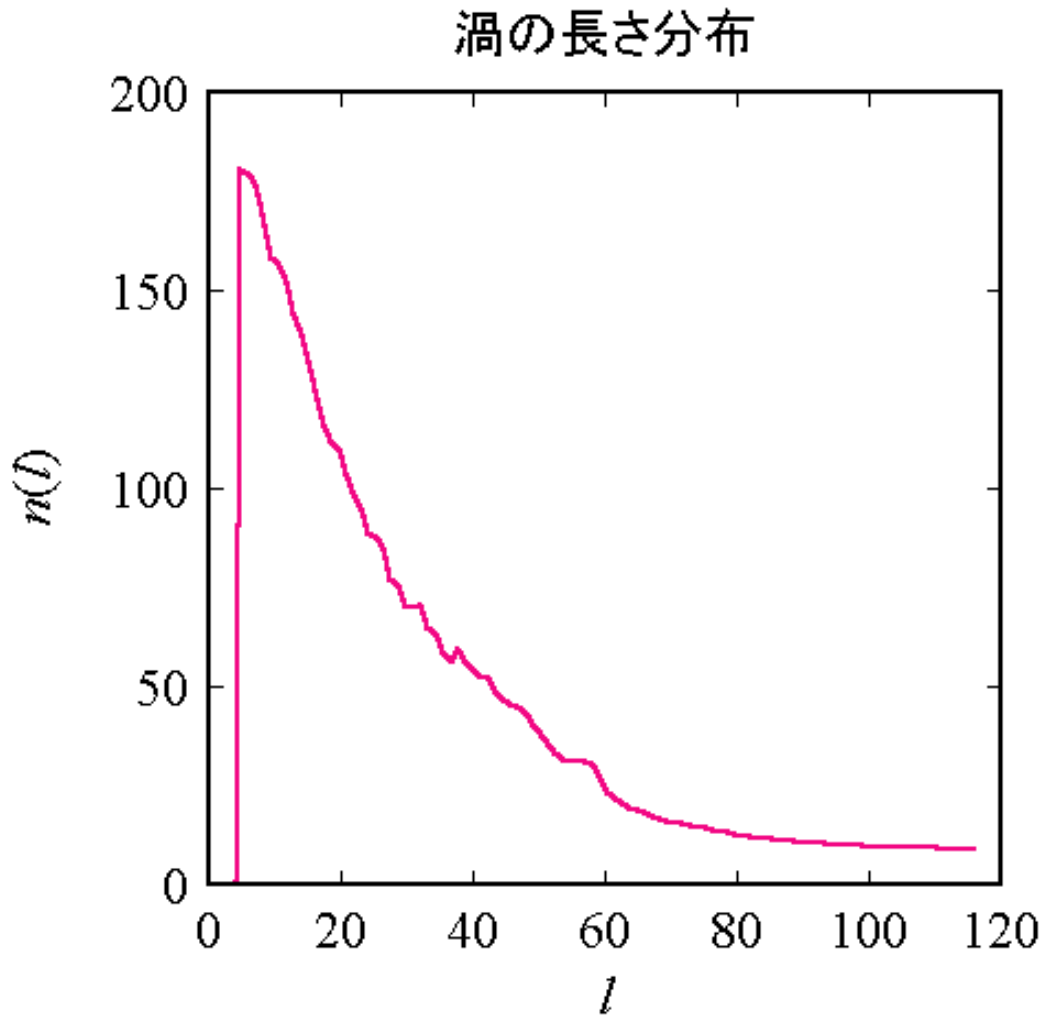
$$\begin{aligned}i\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= [-\nabla^2 - \mu + V + g\{|\Phi|^2 + 2n_e\}]\Phi - gm_e\Phi^* \\i\frac{\partial u_j}{\partial t} &= [-\nabla^2 - \mu + V + 2g\{|\Phi|^2 + n_e\}]u_j - g\{\Phi^2 + m_e\}v_j \\-i\frac{\partial v_j}{\partial t} &= [-\nabla^2 - \mu + V + 2g\{|\Phi|^2 + n_e\}]v_j - g\{\Phi^{*2} + m_e^*\}u_j \\n_e &= \sum_j \{|u_j|^2 N_j + |v_j|^2 (N_j + 1)\} \\m_e &= \sum_j \{u_j v_j^* (2N_j + 1)\} \\N_j &= \frac{1}{\exp(E_j/T) - 1}\end{aligned}$$





温度が低いと確かに高波数成分にのみ散逸がある。  
 温度が高いと低波数成分へと散逸が移る⇒散逸が渦にも効いてくる( ${}^4\text{He}$ の相互摩擦力と関係あり?)

# 渦の長さ分布



渦のサイズ分布は

$$n(l) \propto l^{-3/2}$$