

量子乱流における慣性領域と コルモゴロフ則

2006年1月11日(水)～13日(金)

京都大学数理解析研究所研究集会

「混合、化学反応、燃焼の流体力学」

大阪市立大学理学部物理学科素励起物理学研究室

小林未知数

素励起物理学研究室

Elementary Excitation Physics Laboratory

(物性理論研究室)

量子乱流における慣性領域と コルモゴロフ則

1. なぜ量子乱流か
2. 量子乱流の歴史的背景
3. 研究目的
4. モデル
5. 減衰乱流
6. 定常乱流(強制乱流)
7. 量子乱流の今後の展望
8. まとめ

1, なぜ量子乱流か

超流動液体 ^4He で実現される超流動乱流(量子乱流)は低温物理学において非常に重要なトピックスの1つであった。

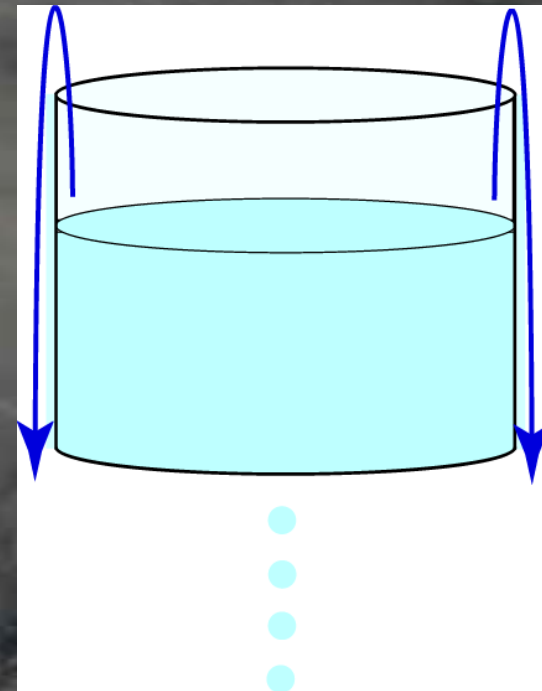
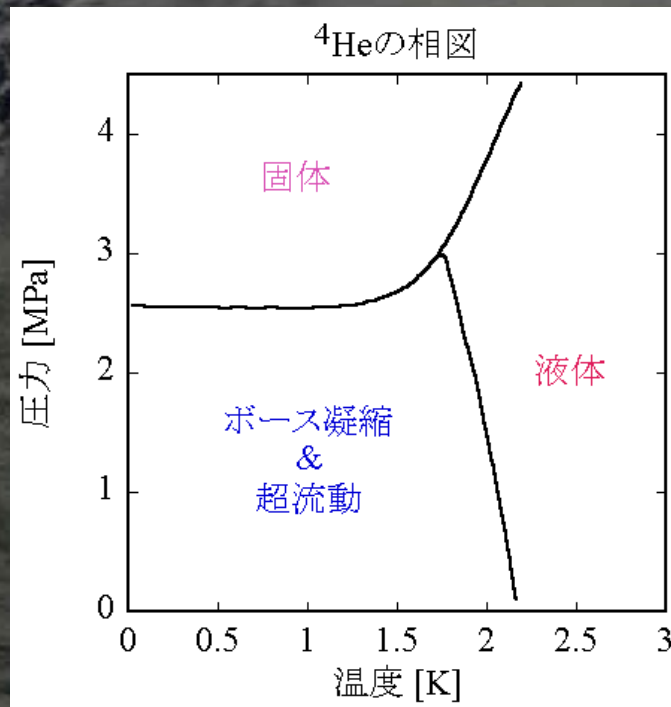


近年、超流動乱流において古典乱流との類似性が発見され、超流動乱流(量子乱流)を用いて古典乱流を要素還元的に理解するという視点において、低温物理学の範囲を超えて重要視され始めた。

超流動乱流(量子乱流)という分野は、新しい時代を迎えようとしている！

2, 量子乱流の歴史的背景

バルクの液体 ^4He はラムダ温度 $T_\lambda = 2.17$ [K]において超流動状態となり、粘性を持っていないかのように振る舞う



超流動薄膜現象

超流動のダイナミクス: 二流体モデル

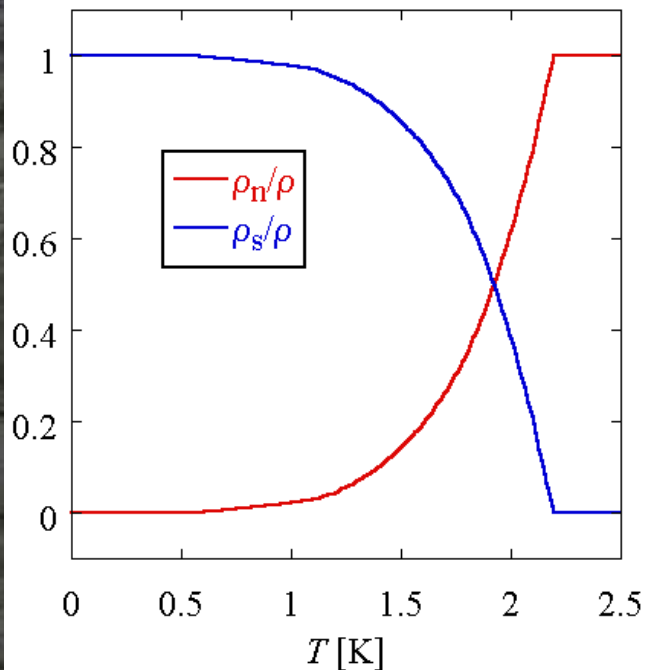
$$\rho = \rho_n + \rho_s$$

ρ : 流体の密度

ρ_n : 常流体の密度 (粘性、エントロピーあり)

ρ_s : 超流体の密度 (粘性、エントロピーなし)

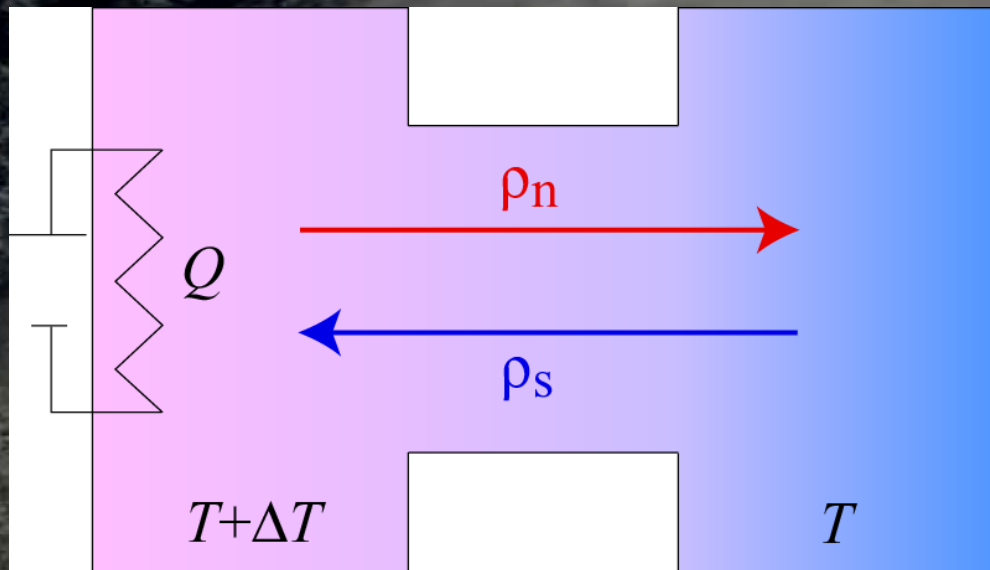
超流動の温度依存性



- 全流体は粘性のある成分(常流体)とない成分(超流体)とに分けられる。
- 粘性のない振る舞いは超流体の振る舞いを見ている
- 1 K以下では常流体はほとんどない
- 二流体モデルを用いて超流動現象の多くを説明することができる

二流体モデルを最も特徴づける現象： 熱対向流

超流動中に温度勾配をつけると・・・



常流体：低温側へ

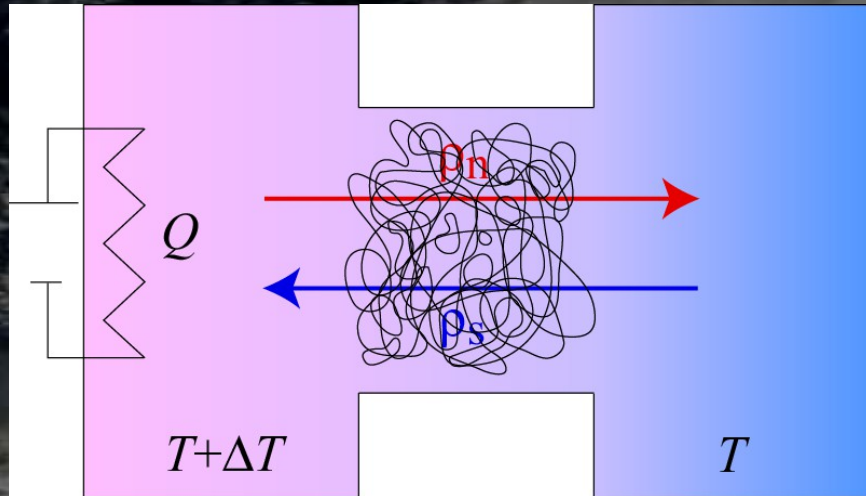
超流体：高温側へ

→エントロピーを均一化する
ように流れる

•流体全体としては流れていないように見えるが、それぞれの成分が反対方向に流れている。

•非常に大きな熱伝導度（通常の液体の約 10^6 倍）

常流体と超流体の相対速度が、ある値を超えると・・・

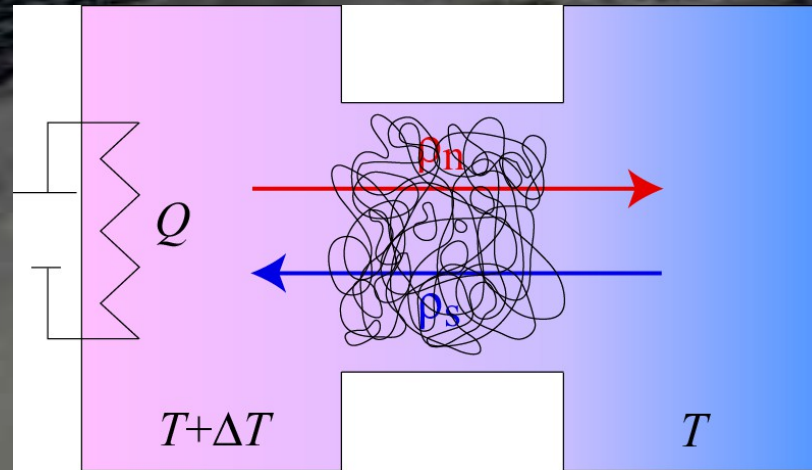


二流体の相対速度がある値を超えると、今まで散逸を伴わなかった熱対向流に散逸が生じる

Feynman

この散逸こそ超流体中の循環が量子化された量子渦のタングル状態：超流動乱流状態である！（1955）

量子渦と超流動乱流の発見

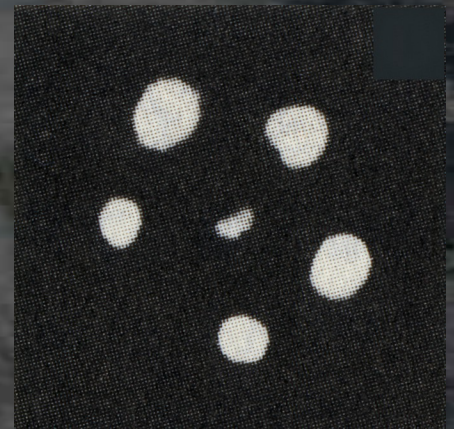


Vinen

- 超流動 ^4He における量子化された循環 $\kappa = h / m$ を観測：
量子渦の発見
- タングル状態の量子渦と常流体との摩擦である**相互摩擦力**(mutual friction)を観測：**超流動乱流の発見** (1957)

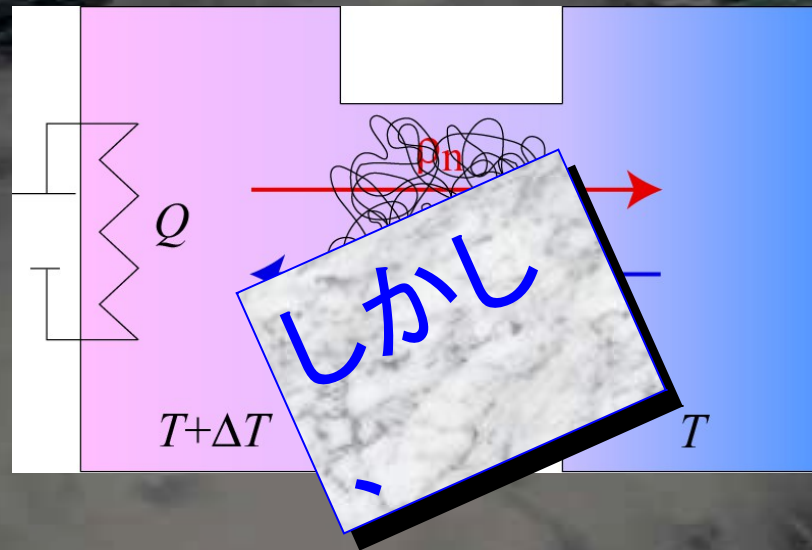
量子渦の特徴

- すべての量子渦はいたるところで同じ循環 $\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = n h / m$ を持つ(実際には $n \geq 2$ の渦は不安定で $n = 1$ の渦へと分裂する)。
- 渦の粘性拡散がなく、安定に存在する。
- 渦芯のサイズは数Å(液体⁴He): 非常に微視的な渦→古典流体の渦では最も粗雑な近似である渦糸近似が、量子渦ではRealisticとなる。



回転容器中における量子渦糸格子の観測
(Packard 1982)

熱対向流を用いて超流動乱流に関する膨大な数の理論計算、実験が行われた



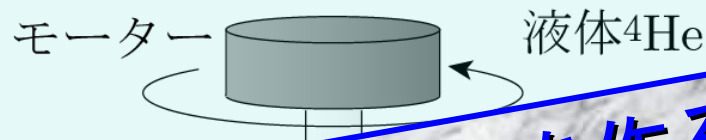
熱対向流は超流動固有の現象であり、よって熱対向流によって作り出された超流動乱流は古典乱流との対応を全く持っていない！

超流動乱流の古典乱流との関係は全く謎のままであった！

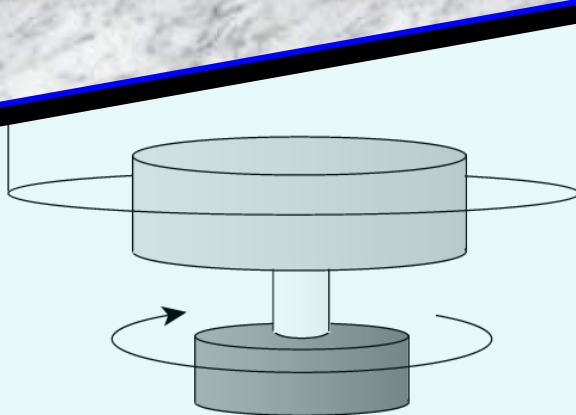
超流動乱流の新しい幕開けへ

近年、状況は一変する

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. 43 (1), 29 (1998)



古典流体にて乱流を作る方法と同じ方法である。
→古典乱流との対応を議論することが可能になっ
た

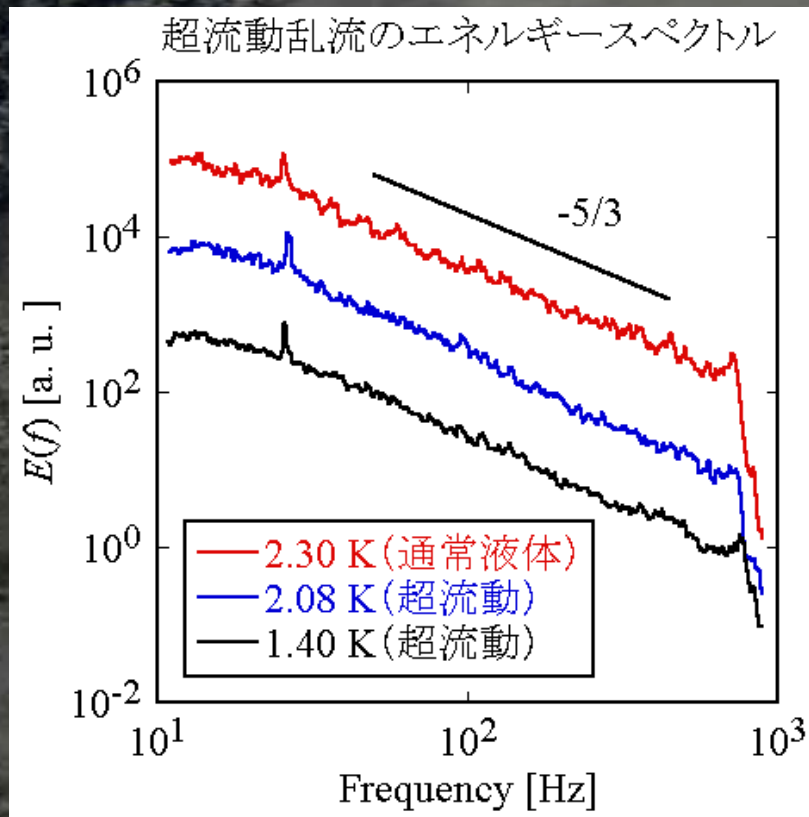


実験条件

$T > 1.4 \text{ K}$

古典乱流と超流動乱流の関係は？

エネルギースペクトルの測定: ある1点の圧力(の時間変化)を測定し、運動エネルギーを計算する。



$T > 1$ Kでの超流動乱流中において古典乱流の統計則であり、通常液体の ^4He でも観測されるKolmogorovの $-5/3$ 乗則が観測された

⇒ 超流動乱流と古典乱流の類似性が観測された

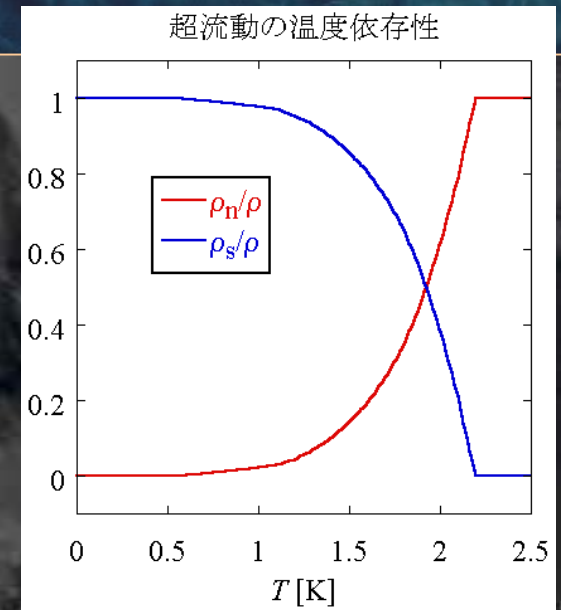
古典乱流と量子乱流の類似性は？

古典乱流のように振る舞う
常流体 (粘性あり)

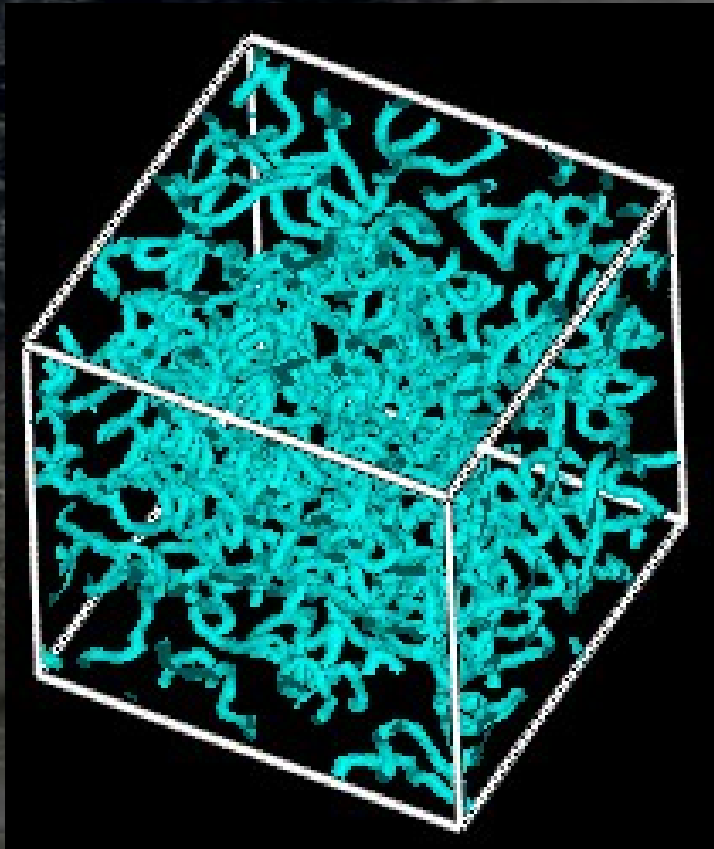
超流体 (粘性なし)

両者が相互摩擦力 (mutual friction) を通して結合し、古典乱流のように振る舞うという描像で理解されてきた。

常流体のない絶対零度近傍の超流動乱流：量子乱流でも古典流体との類似性はあるのか？



量子渦の特徴



- 循環 $\kappa = h / m$ が量子化されている。
- 位相欠陥であるため、安定に存在できる(粘性拡散がない)
- 位相欠陥であるため、渦輪の形でのみ生成消滅し、渦輪の形でのみ存在する
- 渦芯のサイズは回復長 ξ で与えられ ($\xi^2 = \hbar^2 / 2m\mu$)、絶対零度近傍では回復長 ξ よりも短いスケールでのみ渦散逸機構(高温では相摩擦による散逸機構)働く。

低温物理学における興味を超えた量子乱流

量子渦は古典流体の渦と異なって安定かつ循環がそろっており、明確に定義できる

→ぼやけてはっきりしない古典流体の渦にまわりついているよけいな自由度を取り除いた、渦の本質のみの形



量子渦を構成要素とする量子乱流は構成要素がはっきりしない古典乱流の理想系となりうる(乱流の量子化)。

量子乱流こそがKolmogorov則とRichardsonカスケードの関係を明らかにするかもしれない。

→量子乱流もKolmogorov則を示す可能性がある

3, 研究目的

Gross-Pitaevskii方程式を用いて絶対零度近傍の量子乱流のダイナミクスとエネルギースペクトルを計算し、量子乱流と古典乱流の類似性を調べる。

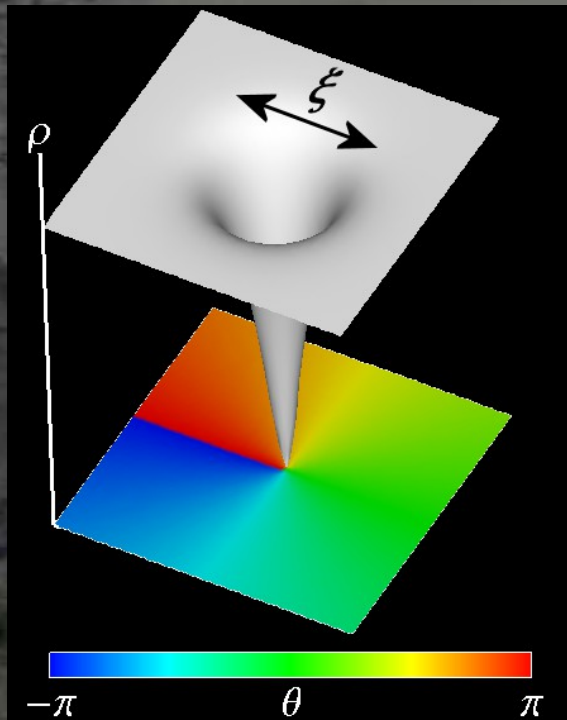
4, モデル: Gross-Pitaevskii方程式

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

渦芯のサイズ (回復長) $\xi = 1/\sqrt{2mg\rho}$



量子渦

Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

Φ : 巨視的波動関数

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間斥力相互作用の結合定数

長さ: L

エネルギー: $E = \hbar^2/2mL^2$

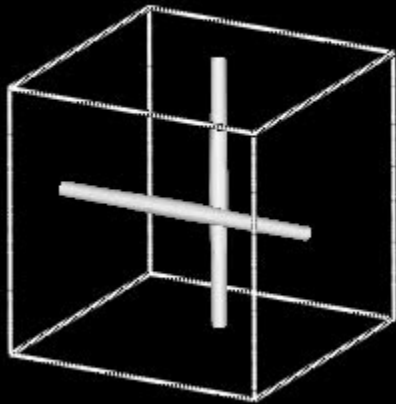
時間: \hbar/E

で無次元化

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

短波長圧縮性素励起の影響

渦の再結合



GP方程式は圧縮性流体の方程式であり、渦の再結合時や渦芯の大きさまで小さくなった渦輪の消滅時に回復長より短いスケールの短波長圧縮性素励起を放出する(絶対零度における量子渦の唯一の散逸機構)⇒渦と相互作用し乱流のダイナミクスに影響を与える

この短波長圧縮性素励起を散逸させる必要がある！

散逸項の導入

$$i \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left[(k^2 - \mu) \Phi(k) + \frac{g}{V^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2) \right]$$



$$[i - \gamma(k)] \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left[(k^2 - \mu) \Phi(k) + \frac{g}{V^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2) \right]$$

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$: 回復長 ξ より短いスケールで効く散逸

渦は芯（回復長 ξ ）よりも小さな構造を持たないのでこの散逸項は渦は効かず圧縮性擾乱のみ散逸される

⇒量子渦のみよって作られる量子乱流のプロトタイプ
ができあがる！

計算のパラメータ

(長さは回復長で規格化: $\xi = 1$)

全格子点数 256^3 (512^3 でも計算し、結果がほとんど変わらないことからこの値を用いている)

空間解像度 $\Delta x = 1/8$: 回復長 ξ あたり 8 格子点、系の体積 $V = 32^3$

波数の解像度 $\Delta k = 2\pi/32 = 0.196$

結合定数 $g = 1$

時間解像度 $\Delta t = 0.0001$

空間: 周期境界条件における擬スペクトル法

時間: Runge-Kutta-Verner法

5, 減衰乱流

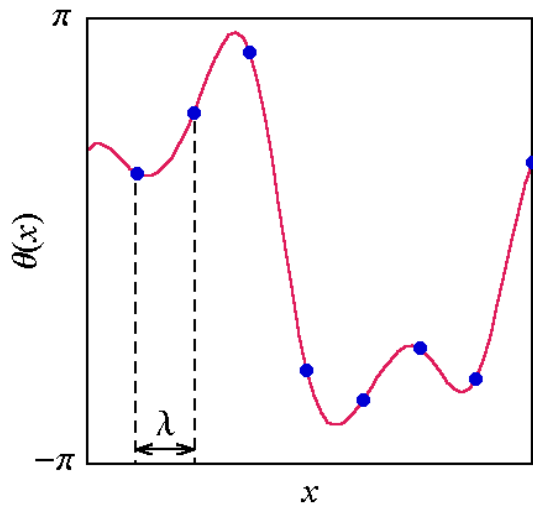
初期状態: ランダムな位相

$$\Phi = \sqrt{\rho} \exp(i\theta)$$

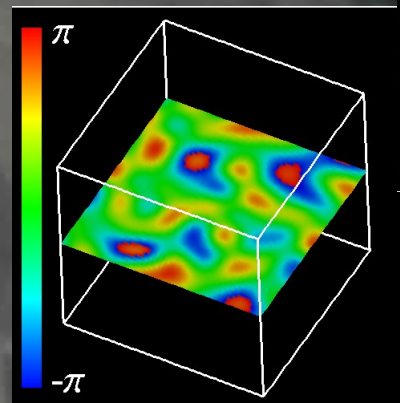
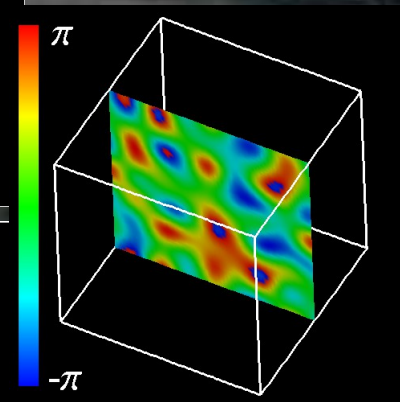
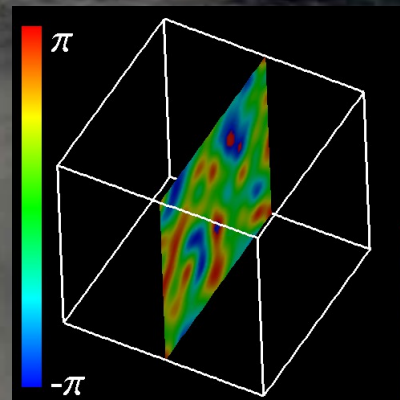
$\rho(t=0)$ は一様

$\theta(t=0)$ は空間に対してランダム

ランダムな位相の例(1次元)



3次元に応用(多次元周期的スプライン)



空間に等間隔 $\lambda = 4$ 毎に $-\pi$ から π までの乱数を振り、周期的スプライン補間で滑らかにつなぐ

初期の速度場はランダムな大きさと向きを持ち、系はすぐに多くの渦を作って一様等方な乱流となる

計算結果

渦

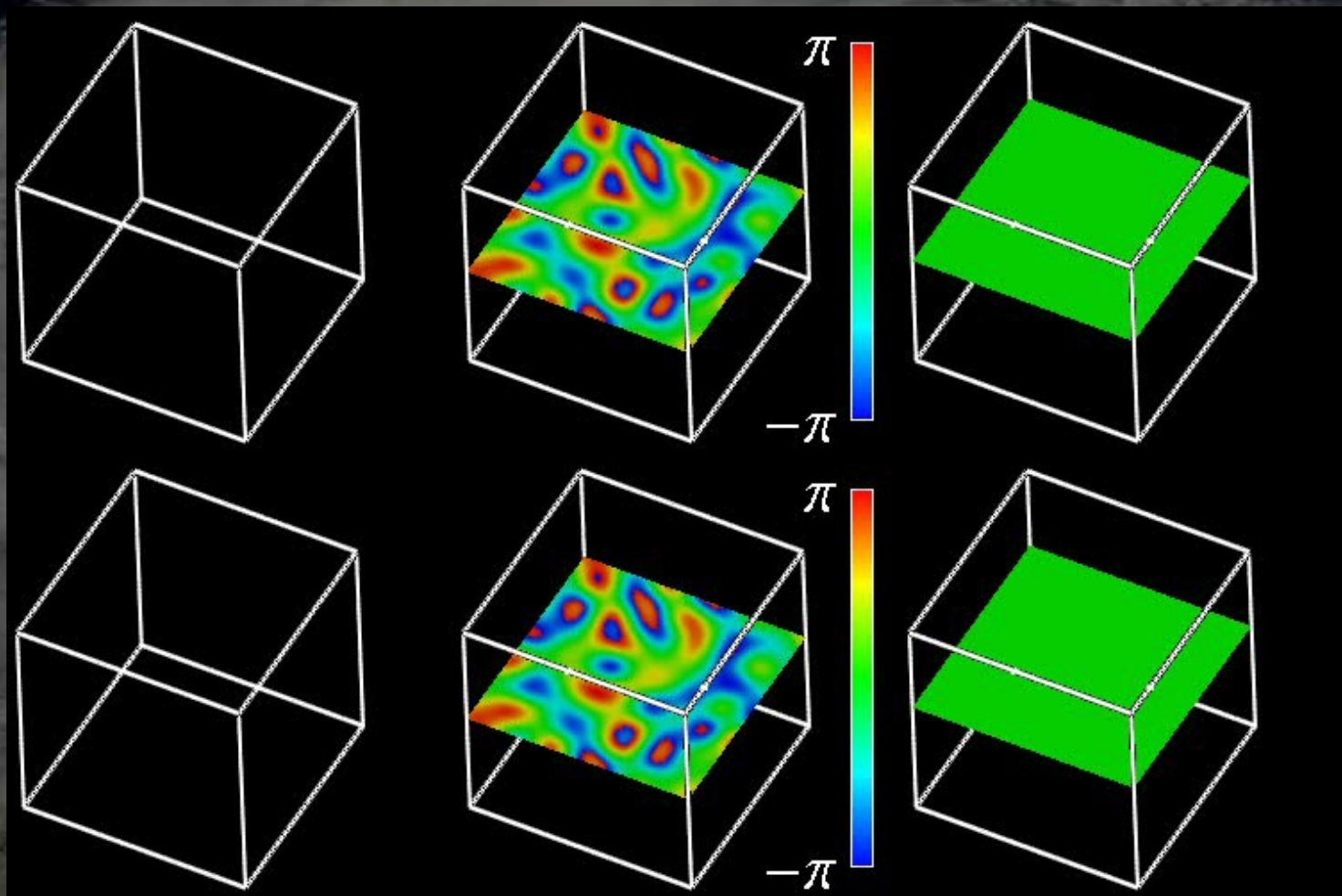
位相 θ

密度 ρ

$0 < t < 6$

$\gamma_0 = 0$
(散逸なし)

$\gamma_0 = 1$
(散逸あり)



散逸あり($\gamma_0=1$)となし($\gamma_0=0$)の比較

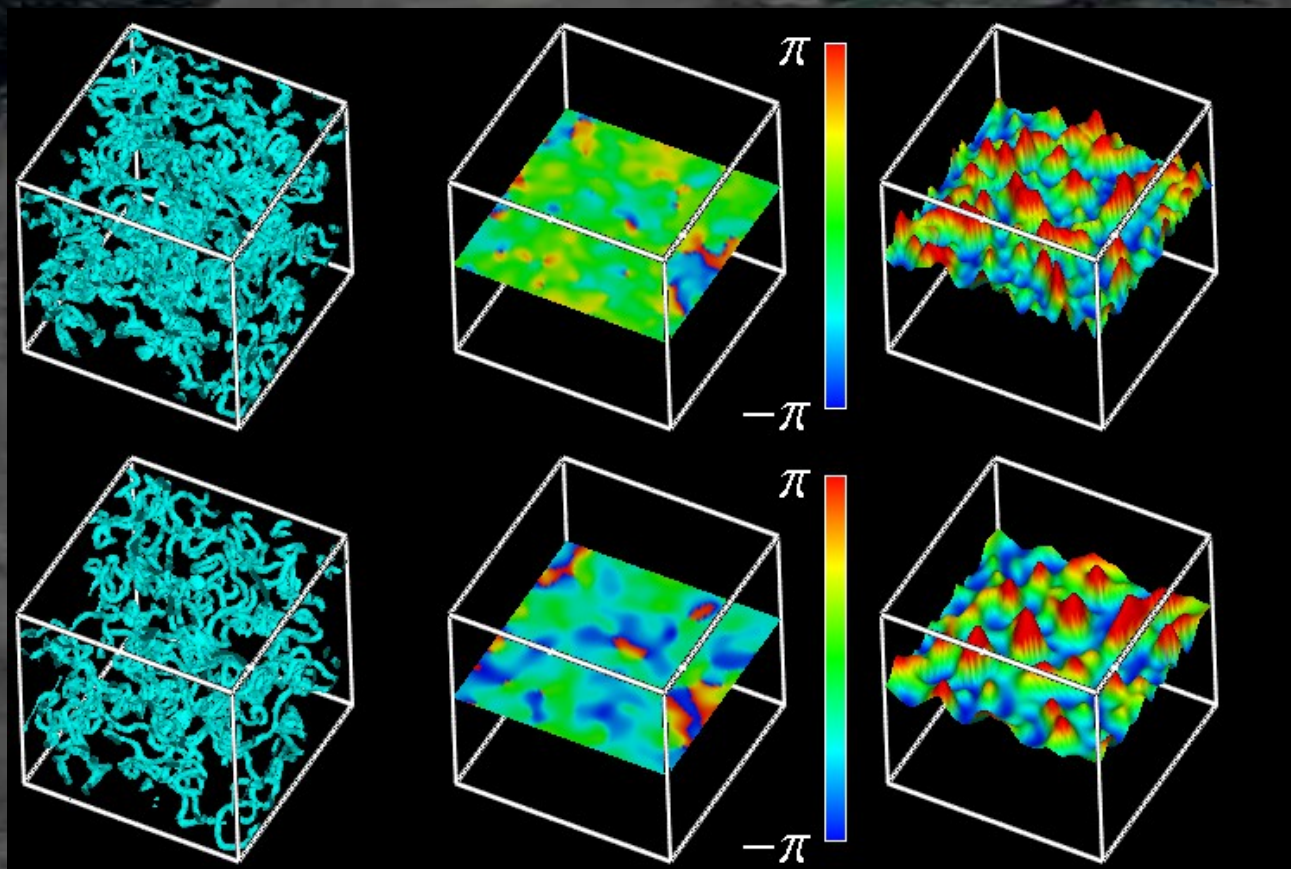
$t=5$

$\gamma_0=0$
(散逸なし)

$\gamma_0=1$
(散逸あり)

位相 θ

密度 ρ



渦の配置はほとんど同じであるが、密度の中に見られるように $\gamma_0=0$ のときに現れる細かい構造が $\gamma_0=1$ では消えている

散逸あり($\gamma_0=1$)となし($\gamma_0=0$)の比較

$$E = \int dx \Phi(x)^* [-\nabla^2 + g/2|\Phi(x)|^2] \Phi(x)$$

散逸がないと全エネルギーは保存するものの**圧縮性素励起のエネルギー**がどんどん増え、dominantになる。

散逸を導入することで**圧縮性素励起のエネルギー**が散逸し、**渦のエネルギー**がdominantになる。

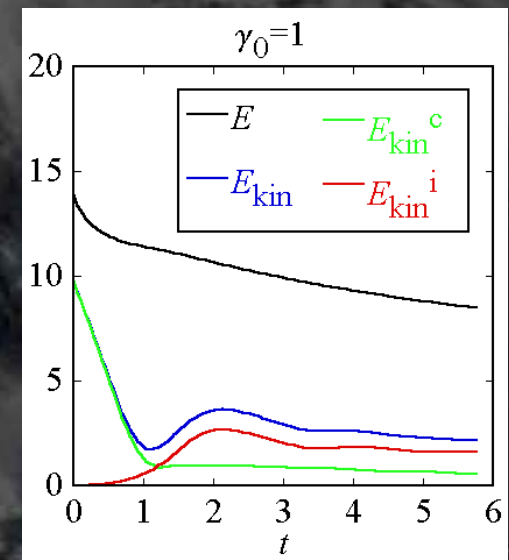
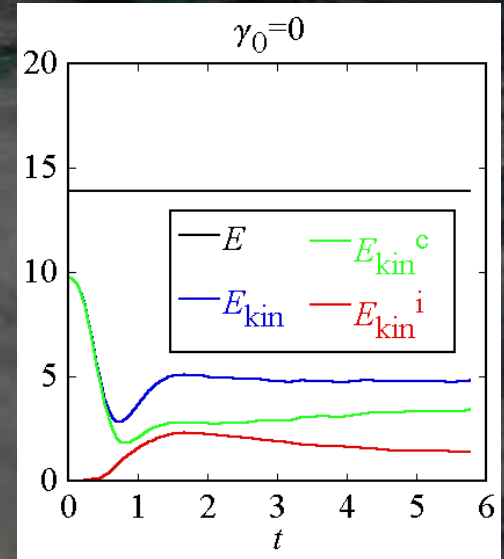
→散逸による圧縮性素励起のみの抑制が有効となっている！

$$\text{rot}\{|\Phi(x)|\nabla\theta(x)\}^c = 0$$

E_{kin} の圧縮成分 (圧縮性素励起の運動エネルギー)

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{q}} + E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^i + E_{\text{kin}}^c$$



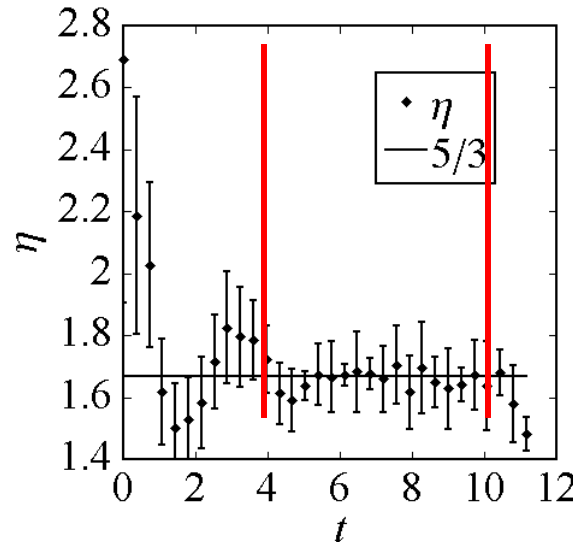
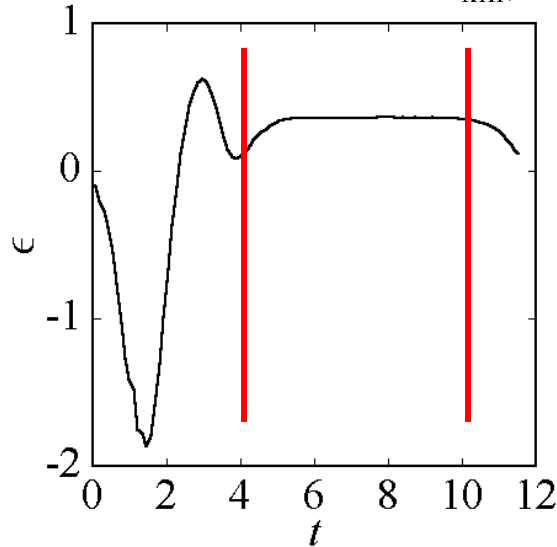
Kolmogorov則との比較

4 < t < 10においてエネルギー散逸率 ϵ とエネルギースペクトルの指数 η が一定 \Rightarrow 乱流の準定常状態

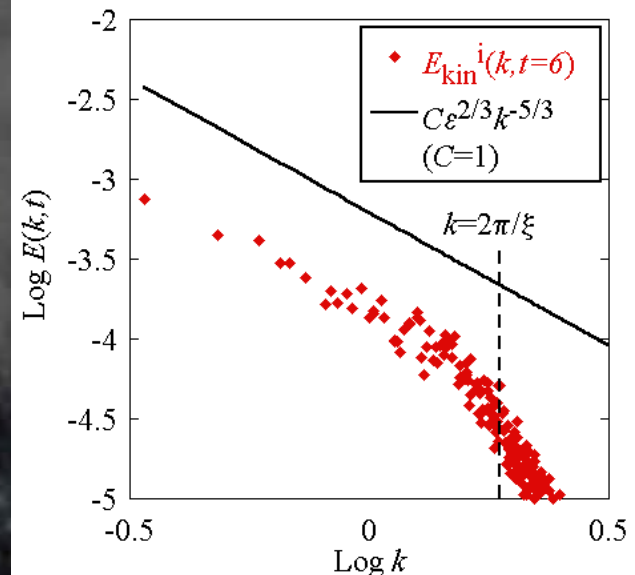
エネルギーが散逸しないスケール $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ (0.20 < k < 6.3) : 慣性領域

エネルギー散逸率 $\epsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i / \partial t$

スペクトルの指数 $E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^{-\eta}$

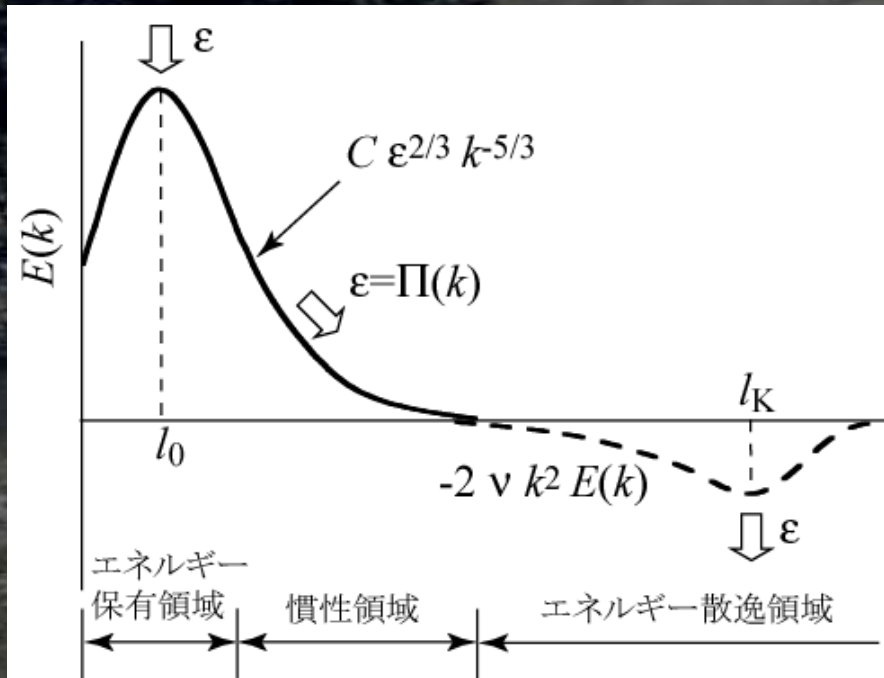


減衰乱流のエネルギースペクトル



圧縮性素励起の影響を取り除くことで、量子乱流中の量子渦ダイナミクスは古典乱流との類似性を示した。

6, 定常乱流

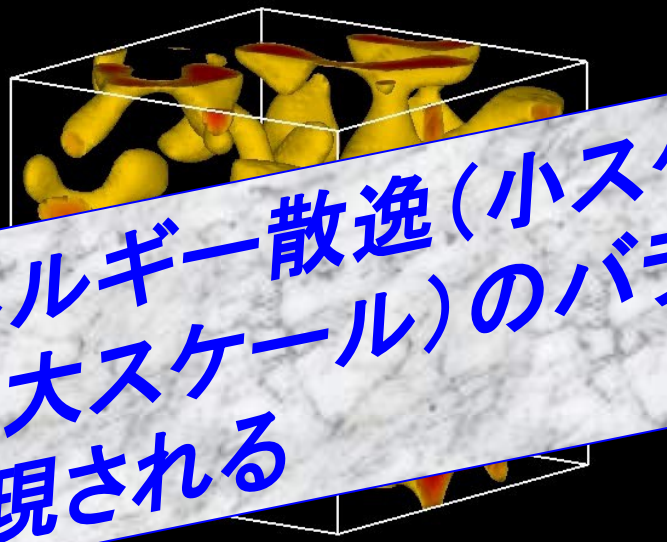


エネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の統計や慣性領域におけるエネルギー流束 Π の振る舞いをより詳しく調べるためには、乱流の定常状態が必要

古典乱流におけるKolmogorov則

大スケールからのエネルギー注入

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + U(\mathbf{x}, t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



エネルギー散逸 (小スケール) とエネルギー注入 (大スケール) のバランスにより定常乱流が実現される

エネルギーを注入する

$$\langle U(\mathbf{x}, t) U(\mathbf{x}', t') \rangle = V_0^2 \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2X_0^2} - \frac{(t - t')^2}{2T_0^2} \right]$$

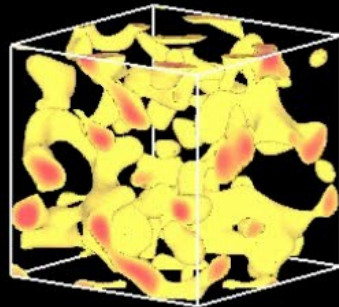
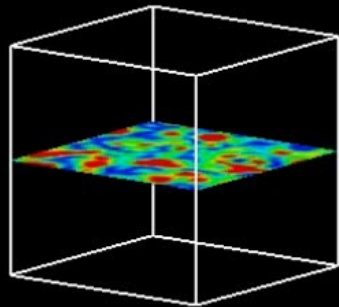
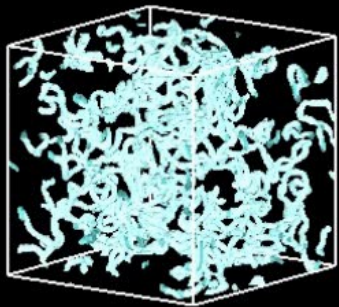
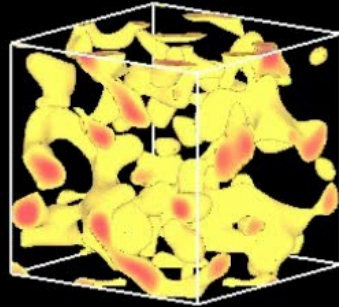
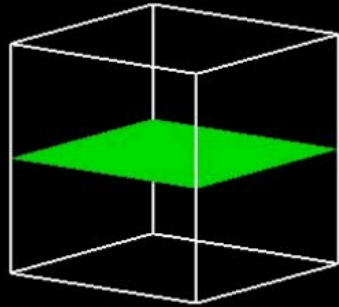
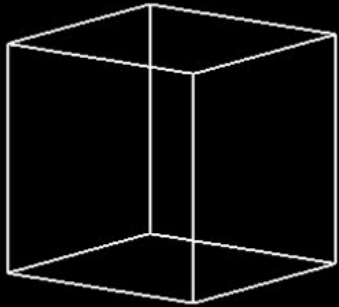
X_0 : エネルギー注入の特徴的スケール (このスケールで量子渦が生成する)

初期状態：一様

渦

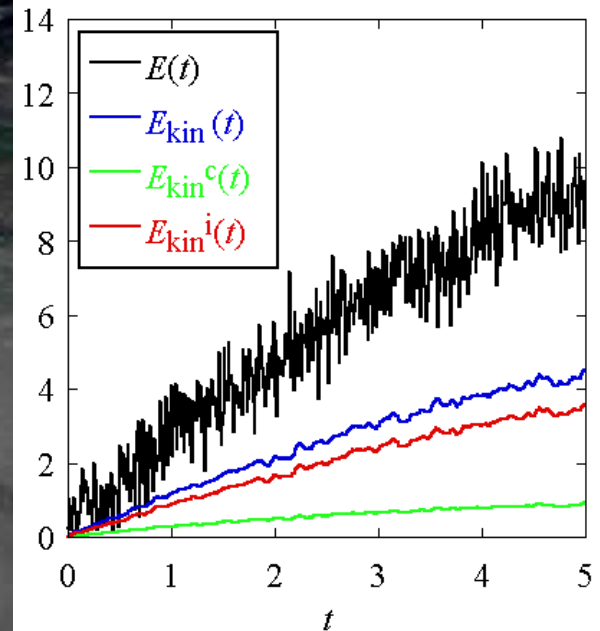
密度

ポテンシャル

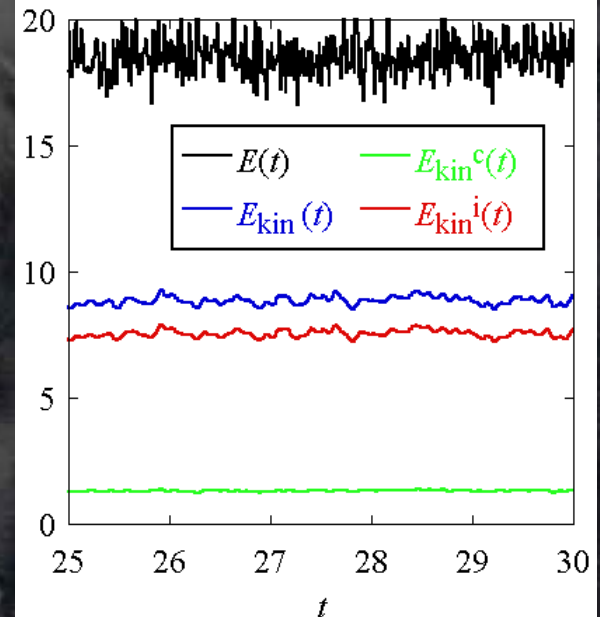


$t > 25$ にて定常乱流が実現される
非圧縮エネルギーが常に運動エネルギーを支配している

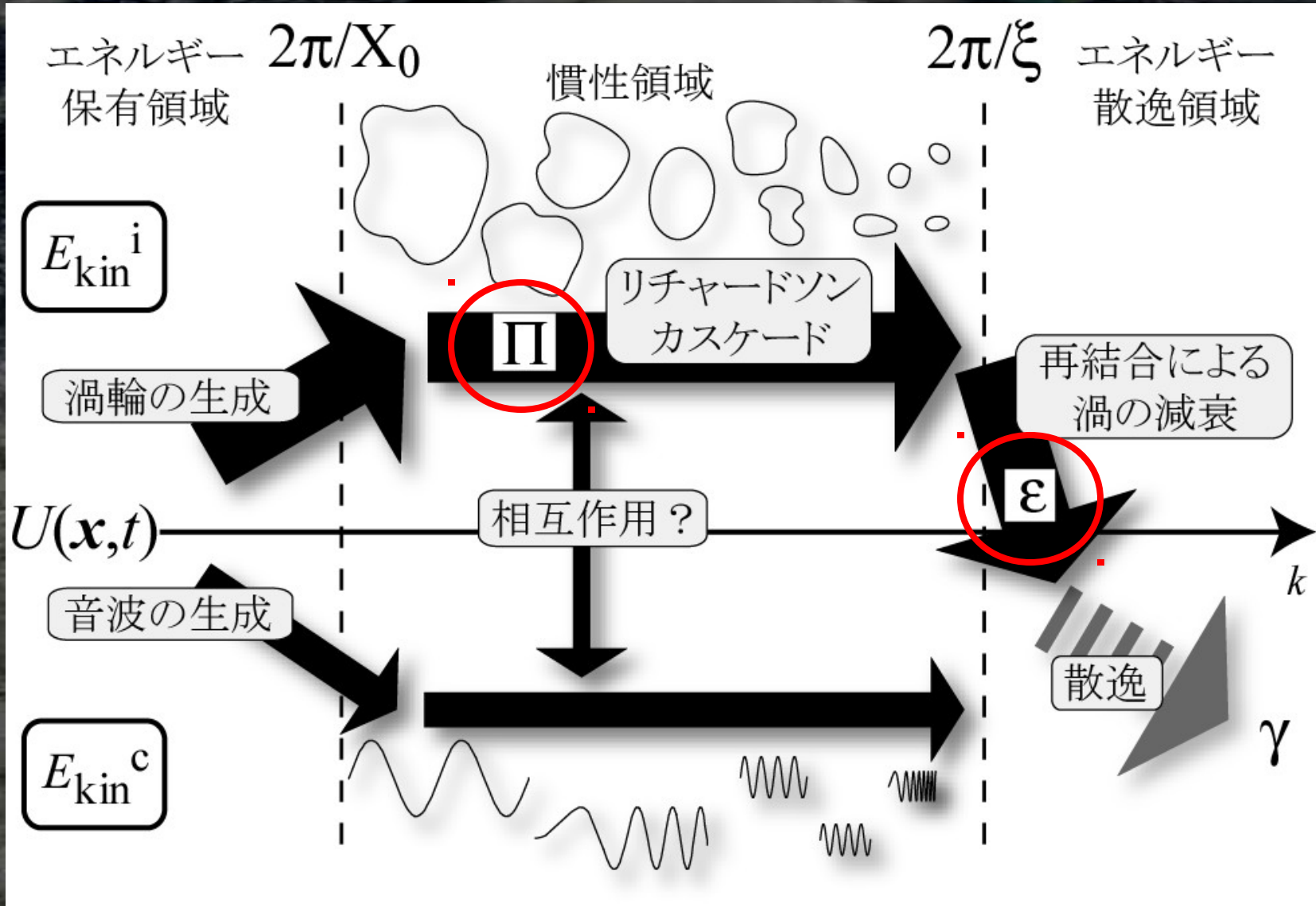
初期ステージ



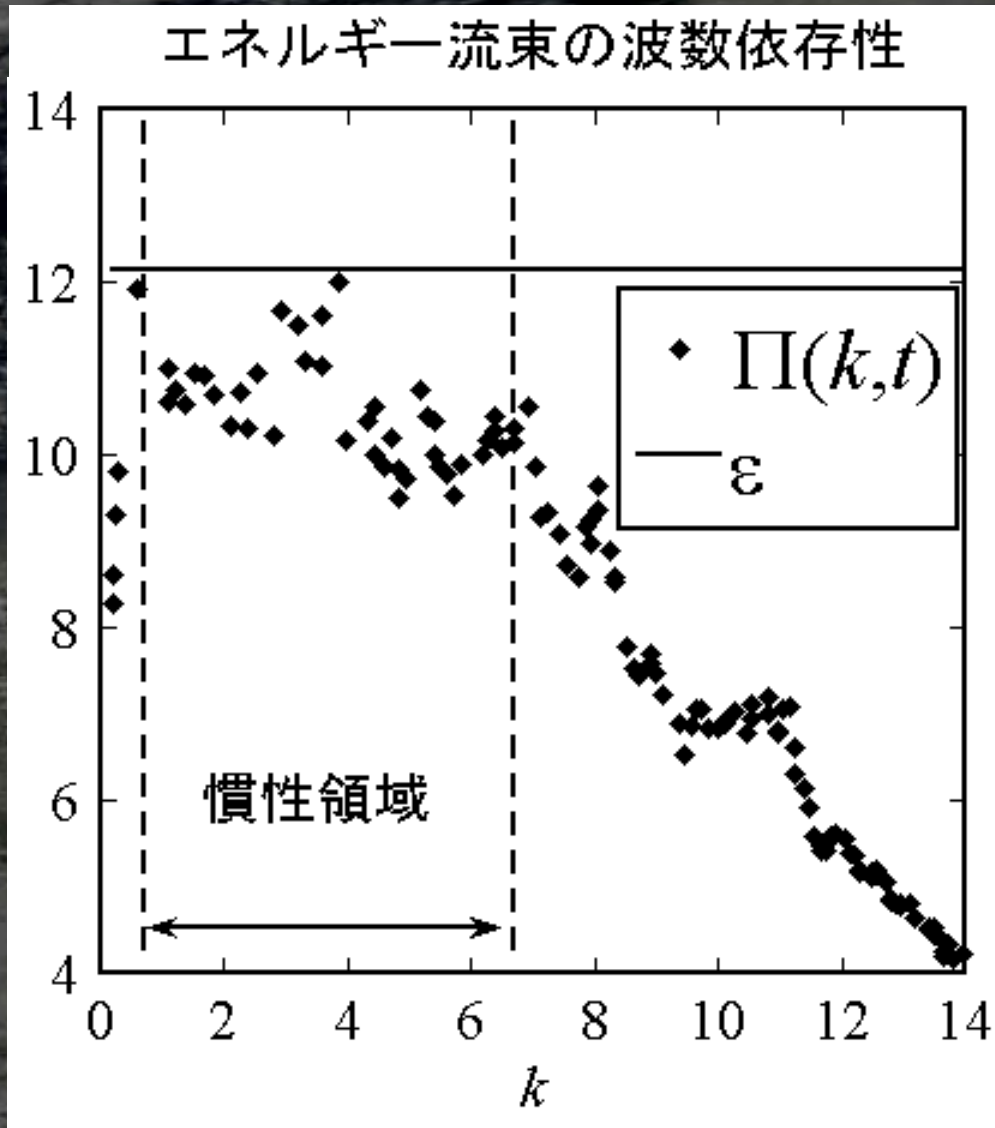
定常ステージ



エネルギー伝播の描像



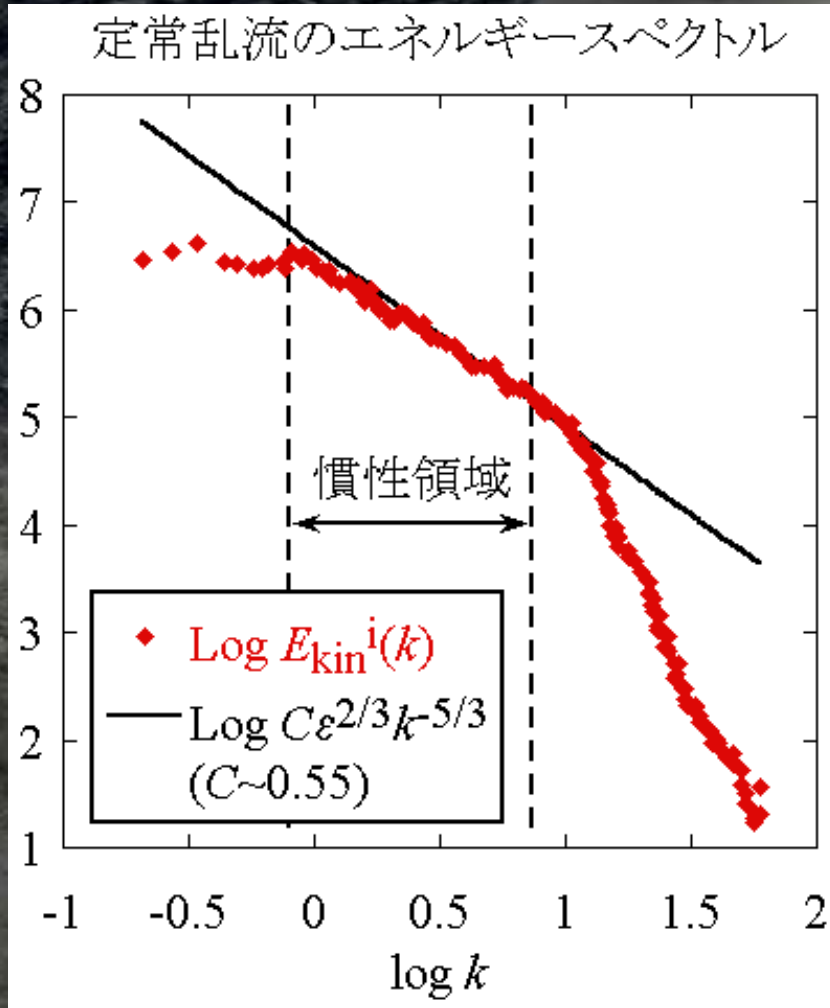
エネルギー流束と散逸率



1. エネルギー流束 Π は慣性領域においてほぼ一定の値をとる
2. 慣性領域におけるエネルギー流束 Π はエネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率 ε ?
ほぼ同様とる

⇒エネルギー伝播の描像
および量流における慣性領域の存在が明らか
なりました!

エネルギースペクトル

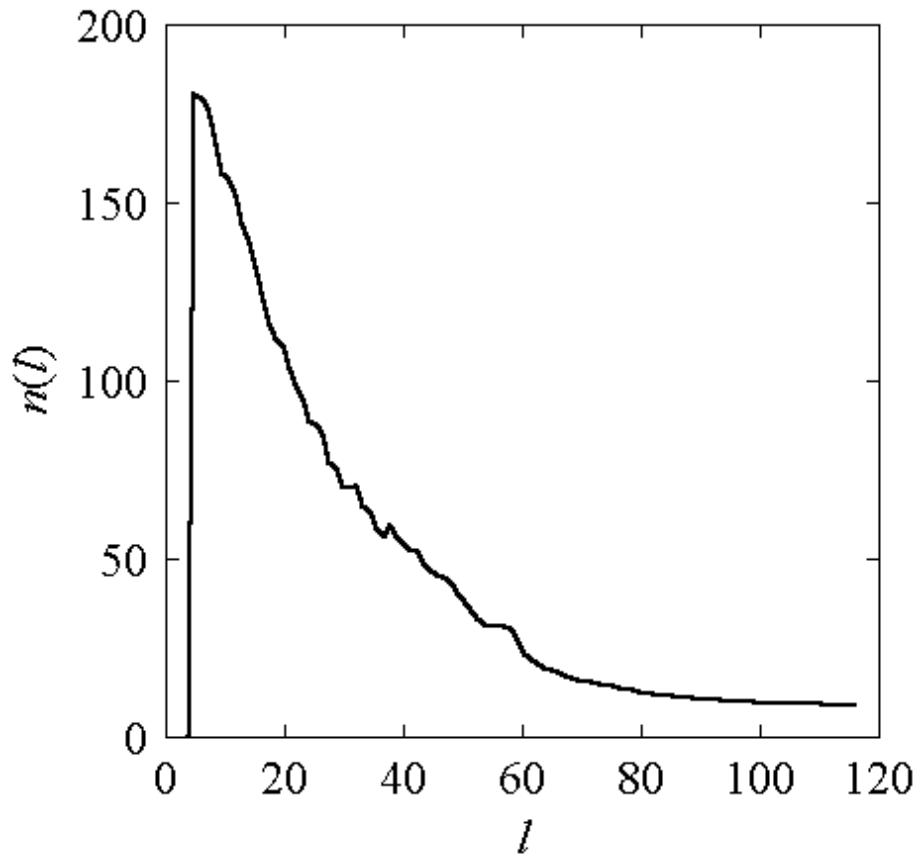


慣性領域でエネルギースペクトルがKolmogorov則と一致した！

：量子乱流と古典乱流の類似性は確かに存在する

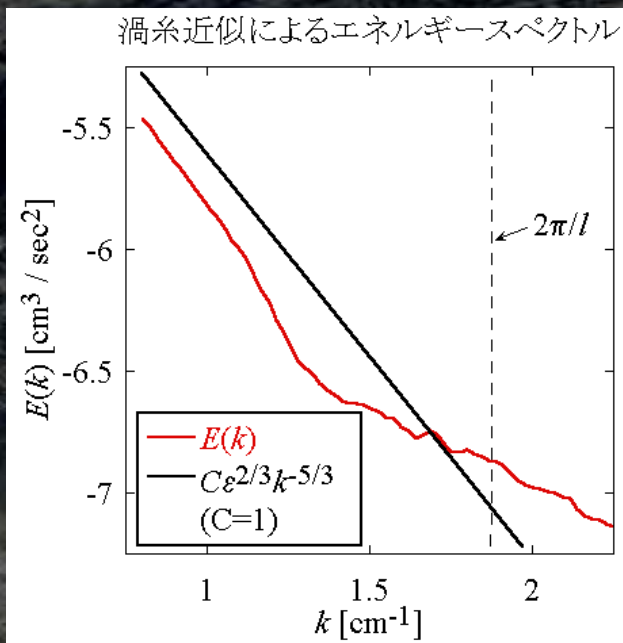
渦輪のサイズ分布

l と $l+1$ の間にある渦輪の長さの分布

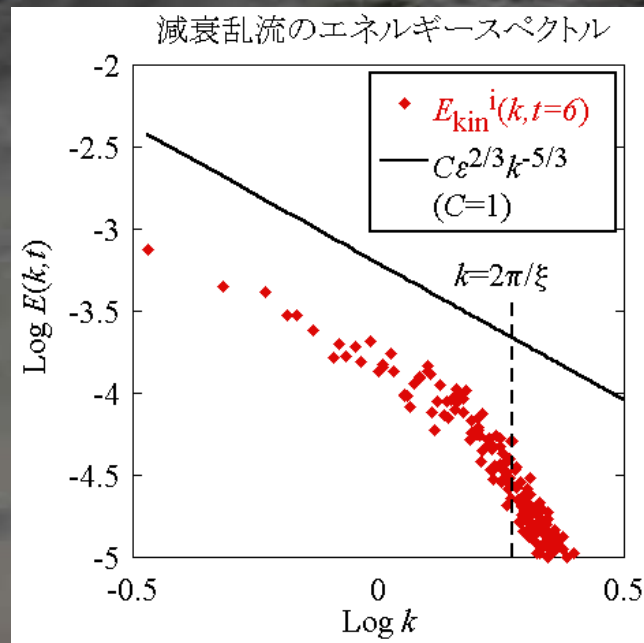


- 渦芯の大きさ($l=1$)よりも小さな渦は存在しない。
- $l > 1$ においては小さな渦ほどたくさん存在する。
- かすかに $n(l) \propto l^{-3/2}$ のべき乗が見える
- べき乗とKolmogorov則との関係はよく分かっていない

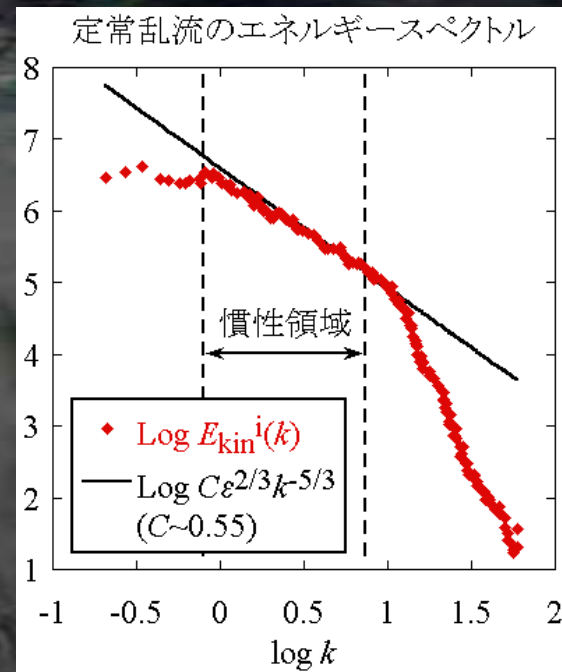
Kolmogorov定数



渦糸近似: $C \sim 0.7$



減衰乱流: $C \sim 0.32$



定常乱流: $C \sim 0.55$

古典乱流: $1.4 < C < 1.8 \rightarrow$ 明らかに古典乱流より小さな値が得られている: 量子乱流に特有の性質かも知れない(導出可能?)

7, 量子乱流の今後の展望

量子力学と量子乱流

量子力学は固体の謎の多くを解き明かし、近代科学の基礎となってきた。



次はより複雑な「流体」が量子力学の恩恵を受ける番である

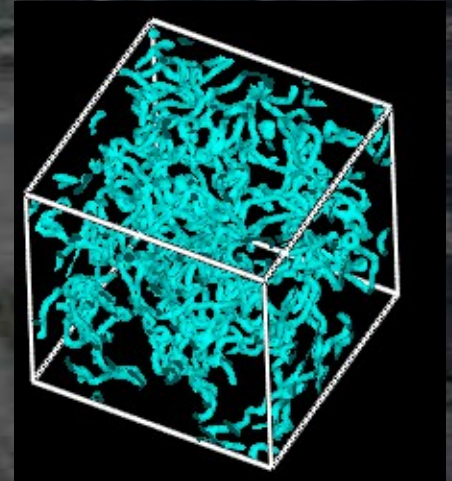
物質は要素から成る、エネルギーはエネルギー量子から成る、

量子乱流は量子渦から成る

7, 量子乱流の今後の展望

量子乱流と古典乱流

今まで量子乱流と古典乱流は全く別の分野であった



量子渦から成る量子乱流は古典流体最大の問題である古典乱流を要素還元的に理解するプロトタイプである可能性が本研究で示された！

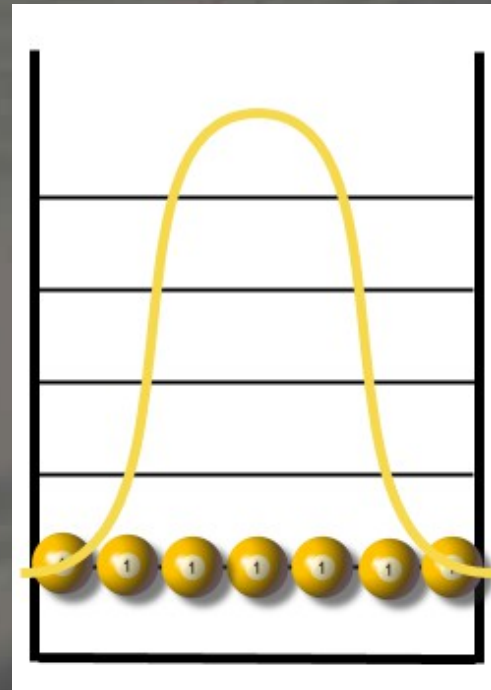
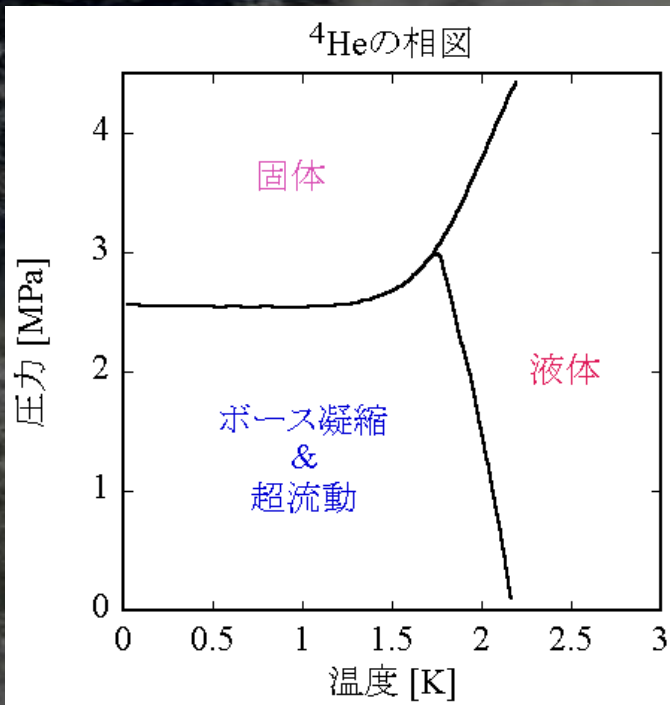
量子乱流、古典乱流の垣根を越えた新しい乱流の分野でもって、乱流の理解にブレイクスルーが生まれることを期待する

まとめ

- GP方程式を用いて量子乱流と古典乱流の類似性を調べた。
- 渦芯よりも小さな散逸を導入することで、短波長圧縮性素励起を散逸させ、量子渦のみによって作られる量子乱流を得ることに成功した。
- 減衰乱流、定常乱流ともにエネルギースペクトルがKolmogorov則を示し、よって量子乱流が古典乱流との類似性を持っていることを明らかにした。
- 定常乱流においてエネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の存在と、そのエネルギー伝播の描像を明らかにした。

超流動とボース・アインシュタイン凝縮

超流動はボース・アインシュタイン凝縮によって引き起こされる



ボース凝縮

^4He はボース粒子

→低温でボース・アインシュタイン凝縮を起こし、巨視的波動関数を作る

→巨視的波動関数として粒子がコヒーレントに運動する

→超流動は巨視的波動関数によって作られる

巨視的波動関数と量子渦

ボース場のハミルトニアン

(デルタ関数型の短距離反発芯相互作用)

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$$

$\hat{\Psi}(\hat{\Psi}^\dagger)$: ボース場の消滅 (生成) 演算子

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間反発芯の結合定数

ボース凝縮している系では

$\hat{\Psi} \rightarrow \Phi$ (凝縮体の巨視的波動関数) + $\hat{\phi}$ (非凝縮体の演算子)

絶対零度近傍において $\hat{\phi}$ を無視する。

巨視的波動関数と量子渦

ハミルトン方程式を用いることで Φ の時間発展を得る

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial h}{\partial \Phi^*} - \nabla \cdot \frac{\partial h}{\partial (\nabla \Phi^*)}$$

$$h = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Phi^*) (\nabla \Phi) - \mu |\Phi|^2 + \frac{g}{2} |\Phi|^4 : \text{ハミルトン密度}$$



Gross-Pitaevskii(GP)方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g |\Phi|^2 \right] \Phi$$

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

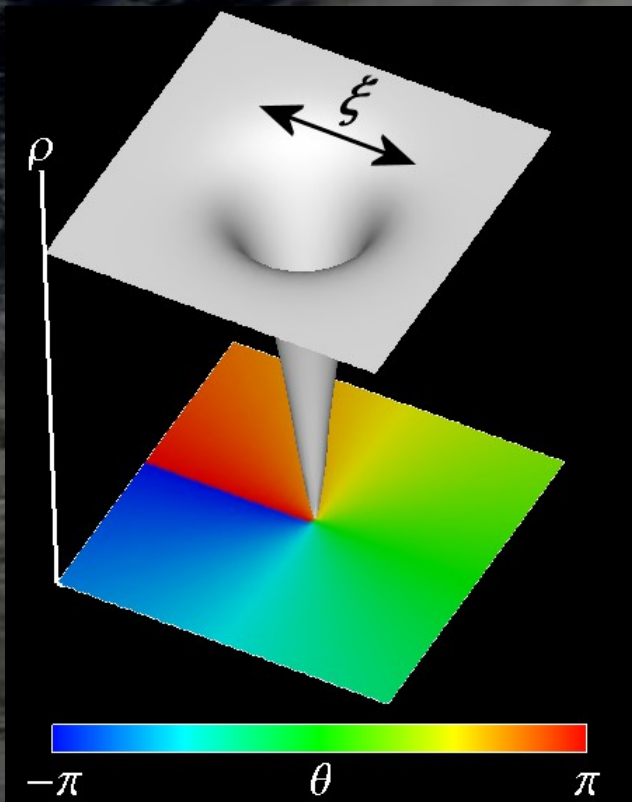
密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

流れはポテンシャル流：
渦なし状態

巨視的波動関数と量子渦

波動関数の零点: 位相欠陥



巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

渦芯のサイズ (回復長) $\xi = 1/\sqrt{2mg\rho}$

量子渦回りの循環

$$\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = h/m$$

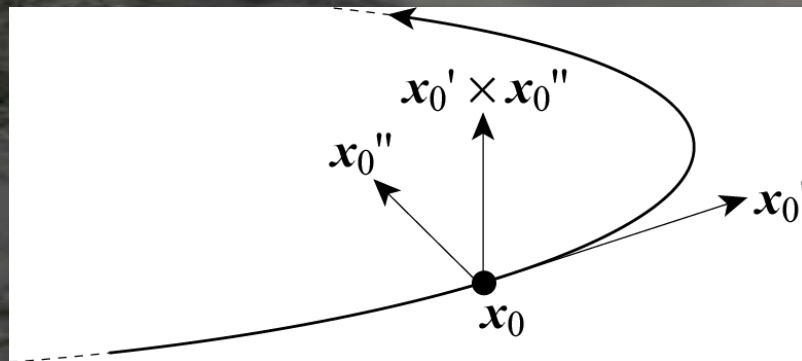
位相欠陥で流体は回転する(量子渦)

渦糸近似による超流動乱流のシミュレーション

量子渦: 渦糸近似が有効

渦糸要素の時間発展

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_0)$$
$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{\text{sa}}(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}] \times d\mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}|^3}$$
$$\mathbf{v}_m(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{x}'_0 \times [\mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]$$



\mathbf{x}_0 : 渦糸要素の位置ベクトル

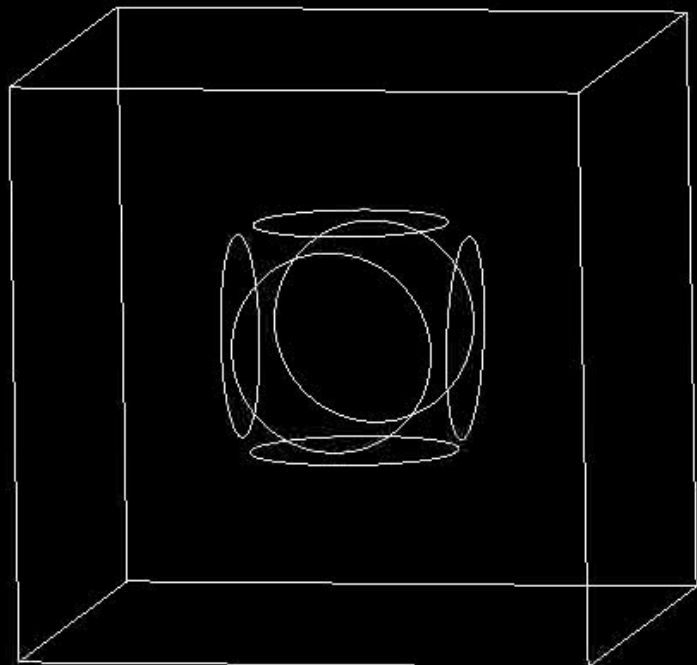
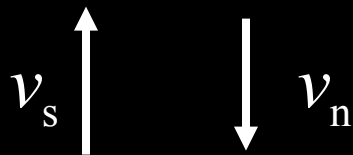
\mathbf{v}_{ind} : 渦糸が作る超流動速度場 (ビオ・サバル則で与えられる)

\mathbf{v}_{sa} : 外部から駆動する超流動速度場

\mathbf{v}_m : 量子渦と常流体の相互摩擦力

渦糸近似による超流動乱流のシミュレーション

熱対向流中の渦糸タングル



渦糸近似を用いて量子渦のダイナミクスを計算し、熱対向流中における超流動乱流との定量的な一致を得た (Schwarz 1988)。

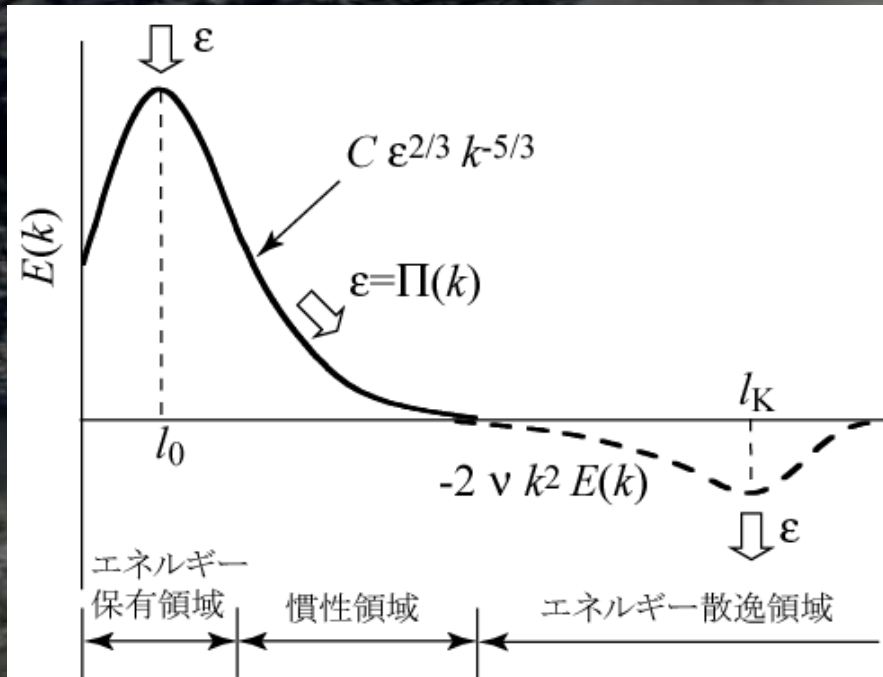
「超流動乱流＝量子渦糸タングル」という描像が裏付けられた。

境界条件 横方向：固体壁

縦方向：周期的

このシミュレーションは素励起物理学研究室で作られたものです。

Kolmogorov則: 一様等方な非圧縮性古典乱流において成り立つ統計則



慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトルがKolmogorov則で与えられる

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (C \sim 1)$$

k : 波数

ϵ : エネルギー散逸率

$\Pi(k)$: エネルギー流束

C : Kolmogorov定数

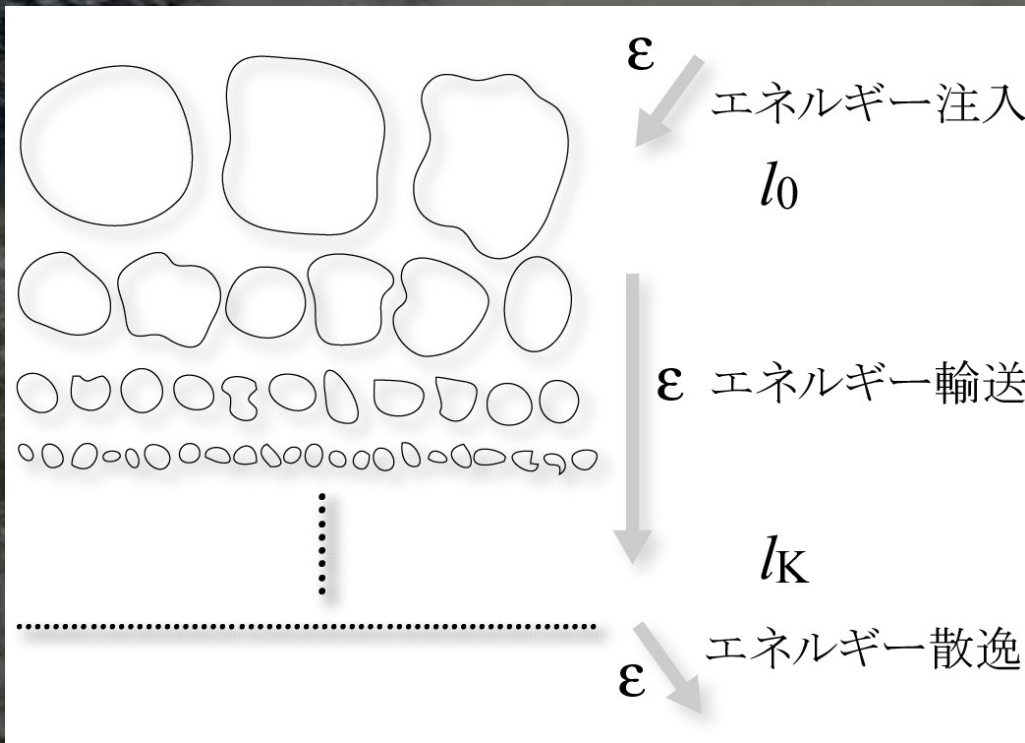
l_0 : エネルギー注入のスケール

l_K : エネルギー散逸のスケール
(Kolmogorov長)

$E(k)$: エネルギースペクトル

Kolmogorov則とRichardsonカスケード

定常乱流 { ϵ : エネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率
 慣性領域におけるエネルギー輸送率
 領域におけるエネルギー注率 } = エネルギー保率 } において



渦のRichardsonカスケード

エネルギー注入領域にて、
大きな渦が作られる

→ 慣性領域にて、渦がより
小さな渦へと分裂してゆく

→ エネルギー散逸領域にて、
小さな渦が粘性により消滅する

量子乱流：過去の計算1

T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301

(2002)

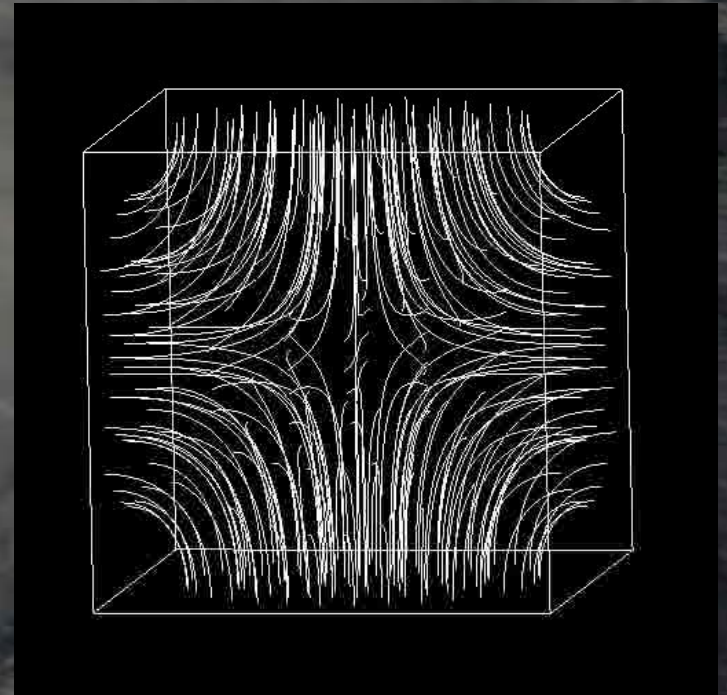
渦糸近似によって量子乱流のダイナミクスを計算し、エネルギースペクトルを求める(初期状態: Taylor-Green-flow)。

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{\text{sa}}(\mathbf{x})$$

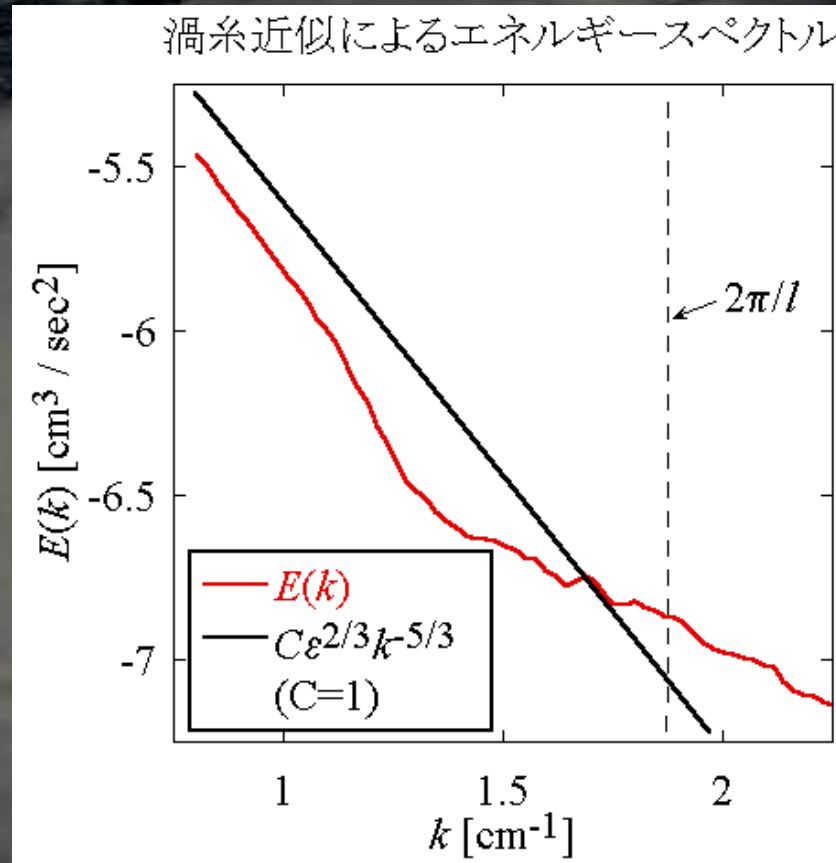
$$\mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}] \times d\mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}|^3}$$

相互摩擦力を考慮しない



量子乱流のシミュレーション
境界条件: 固体壁

量子乱流：過去の計算1

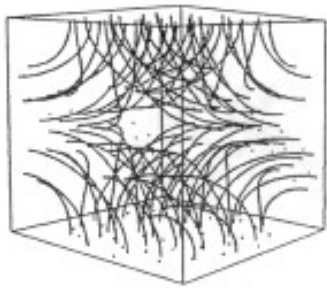


低波数側でエネルギースペクトルがKolmogorov則と一致した！ ($C \approx 0.7$)

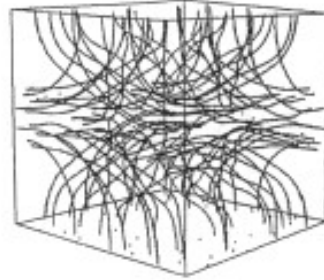


量子乱流：過去の計算2

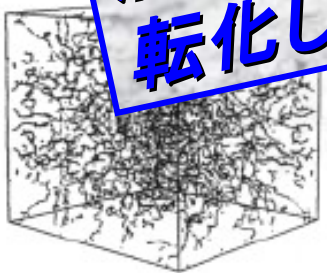
C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. 78, 3896 (1997)



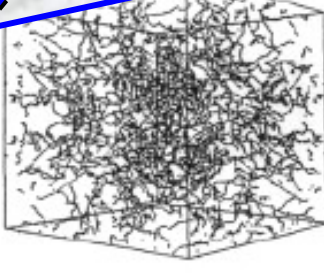
(a) $t = 2$



(b) $t = 4$



(e) $t = 10$



(f) $t = 12$

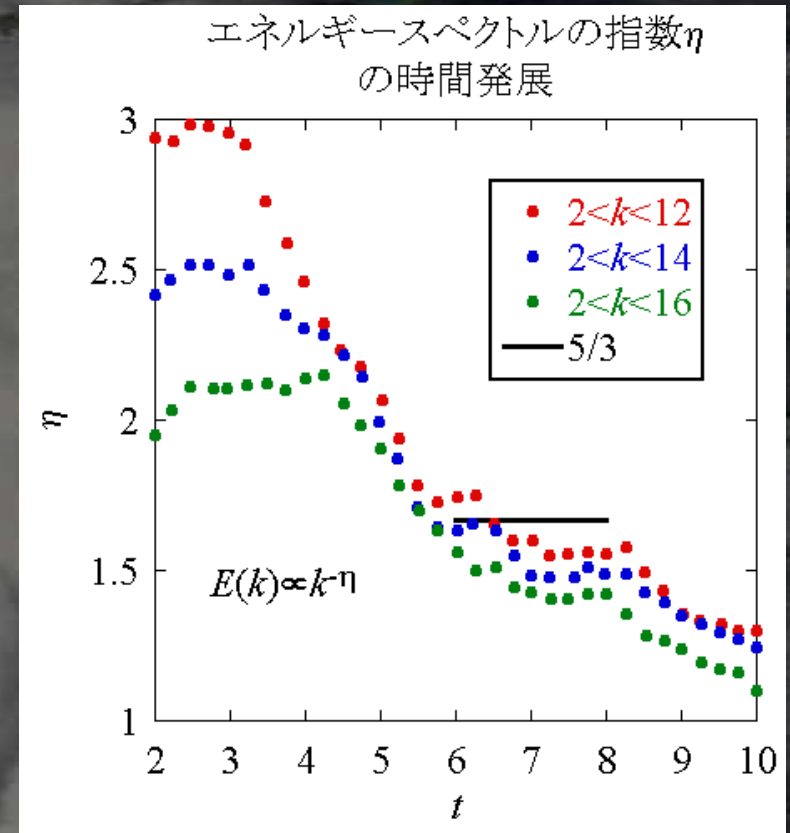
Gross-Pitaevskii方程式は圧縮性流体の方程式であるため、全系のエネルギーは保存するものの、渦のエネルギーはどんどん圧縮性の素励起へと転化してゆく！

(Taylor-Green-flow)。

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

量子乱流：過去の計算2

系の運動エネルギーを圧縮性
(圧縮性素励起)と非圧縮性
(量子渦)とに分け、非圧縮の
エネルギースペクトルの指数を
求める



時間発展の途中でエネルギースペクトルがKolmogorov則を示すが、その後素励起放出の圧縮性効果が顕著になることでスペクトルはKolmogorov則から外れてゆく。

散逸は凝縮体と揺らぎとの相互作用によって導入される

$$H = \int d\mathbf{x} [|\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - \mu + \frac{g}{2}|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)] |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$$



$\Gamma(\mathbf{x}, t)$: 凝縮体と揺らぎとの衝突積分

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)]\Phi(\mathbf{x}, t)$$



平衡周りの微小揺らぎを仮定 : $\Gamma(\mathbf{x}, t) \propto \gamma(\mathbf{x}, t) \mu$

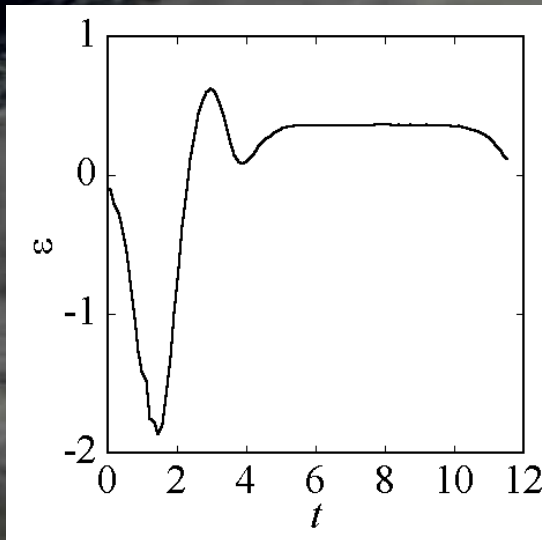
$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t)$$

エネルギー散逸率

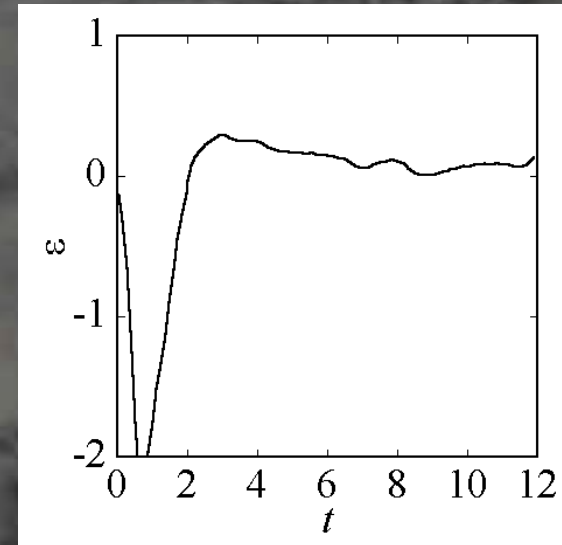
渦のエネルギーの散逸率

$$\varepsilon = - \frac{\partial E_{\text{kin}}^i}{\partial t}$$

$\gamma_0=1$



$\gamma_0=0$



$\gamma_0 = 1$ の場合、エネルギー散逸率 ε は $4 < t < 10$ でほぼ一定

$\gamma_0 = 0$ の場合 ε は落ち着かずに時には負になることもある

⇒ 圧縮性素励起のエネルギーが渦の運動エネルギーへと逆流している (圧縮性素励起が渦のダイナミクスに影響している)

エネルギーースペクトル

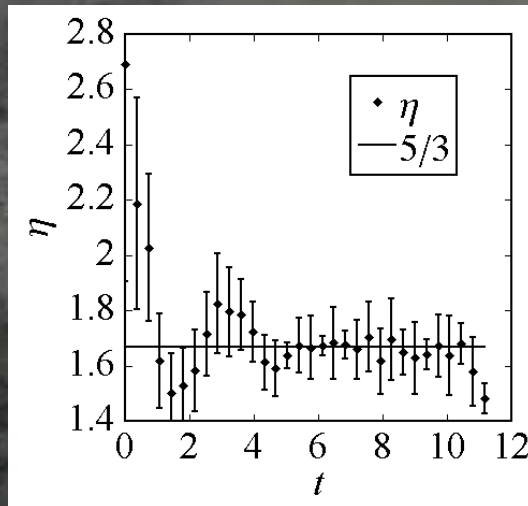
エネルギーースペクトルの指数

$$E_{\text{kin}}^i = \int dk E_{\text{kin}}^i(k)$$

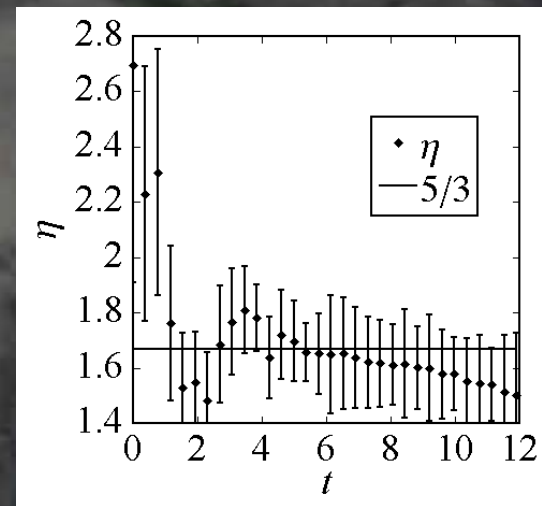
$$E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^{-\eta} \text{ (慣性領域)}$$

エネルギーが散逸しないスケール $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ ($0.20 < k < 6.3$) を慣性領域として定義し、両対数プロットの直線フィッティングにより η を求める

$\gamma_0 = 1$



$\gamma_0 = 0$



$\gamma_0 = 1$ の場合、 $4 < t < 10$ で Kolmogorov 則とほぼ一致

$\gamma_0 = 0$ の場合、 $4 < t < 7$ で Kolmogorov 則とほぼ一致

⇒ 圧縮性素励起の影響が効いてくるため、Kolmogorov 則との一致は短くなる

数値計算の精度

	1	2	3
時間分解能	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 2 \times 10^{-5}$
空間分解能	256^3 grids	512^3 grids	256^3 grids

1 : 現行の数値シミュレーション

$0 < t < 12$ のシミュレーションにおいてシミュレーション間の相対誤差の最大値 $F_{ij}(E) = |(\langle E \rangle_i - \langle E \rangle_j) / \langle E \rangle_i|$ を計算する ($\epsilon_0 = 0$)

	F_{12}	F_{13}
E	2.4×10^{-11}	6.3×10^{-13}
E_{int}	3.7×10^{-11}	8.8×10^{-13}
E_q	2.6×10^{-11}	6.9×10^{-13}
E_{kin}	5.1×10^{-11}	9.4×10^{-13}

エネルギー保存

$$|[E(t=0) - E(t=12)] / E(t=0)| \simeq 6.5 \times 10^{-13}$$

異なる分解能間で、また時間発展においてエネルギーが10桁以上保存している⇒高い精度