

# 熱揺らぎと結合したGPモデルにおける 超流動乱流の減衰機構

大阪市立大理 小林未知数・坪田誠

2006年3月30日 日本物理学会第61回年次大会

素励起物理学研究室  
Elementary Excitation Physics Laboratory  
(物性理論研究室)

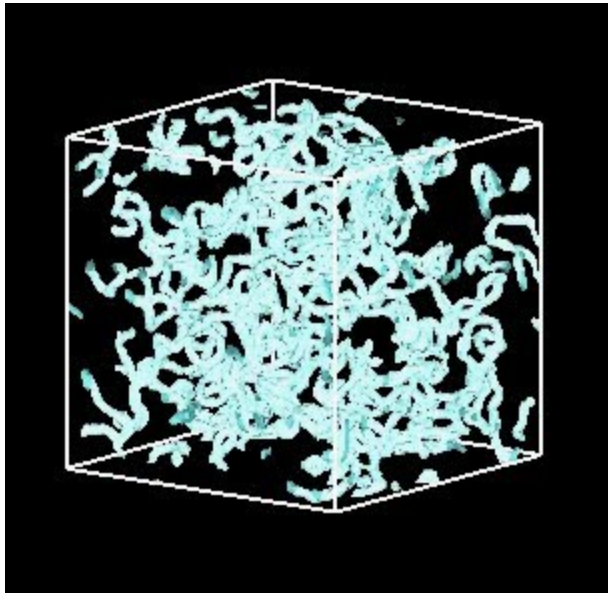
# 内容

1. 研究目的
2. 超流動乱流の散逸機構とは？
3. 散逸の量子渦への影響
4. 散逸機構を記述する有効理論
5. まとめ

# 1, 研究目的

**超流動乱流、量子乱流（絶対零度近傍の超流動乱流）に働く実際の散逸機構を解明したい**

超流動乱流：超流動 $^4\text{He}$ において実現される乱流 量子渦タングル



乱流に働く減衰機構とは？

→なぜそんな問題を考えるか？

# 前回の計算

M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005)

M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005)

我々は絶対零度の量子流体を記述するGross-Pitaevskii方程式に、渦芯(回復長 $\xi$ )よりも小さいスケールの散逸を導入することにより、量子乱流が古典流体の統計則であるKolmogorov則に従うことを明らかにした。

$$i\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial t} = \left[ -\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x})|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}) \quad \xi = 1/\sqrt{g|\bar{\Phi}|^2} : \text{回復長}$$

$\Phi(\mathbf{x})$  : 巨視的波動関数

$\mu$  : 化学ポテンシャル

$g$  : 結合定数

$$i \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial t} = \left[ -\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x})|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}) \quad \boxed{\xi = 1/\sqrt{g|\bar{\Phi}|^2} : \text{回復長}}$$

↓ フーリエ変換

$$i \frac{\partial \Phi(\mathbf{k})}{\partial t} = \left[ (k^2 - \mu)\Phi(\mathbf{k}) + \frac{g}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi(\mathbf{k}_1)\Phi^*(\mathbf{k}_2)\Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right]$$

↓ 散逸項の導入

$$[i - \gamma(k)] \frac{\partial \Phi(\mathbf{k})}{\partial t} = \left[ (k^2 - \mu)\Phi(\mathbf{k}) + \frac{g}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi(\mathbf{k}_1)\Phi^*(\mathbf{k}_2)\Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right]$$

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi) : \xi$  より小スケールでの散逸

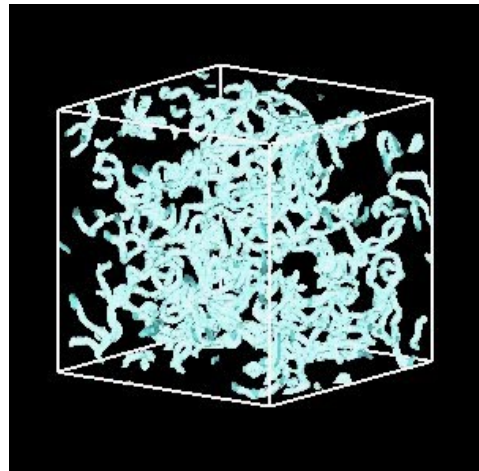
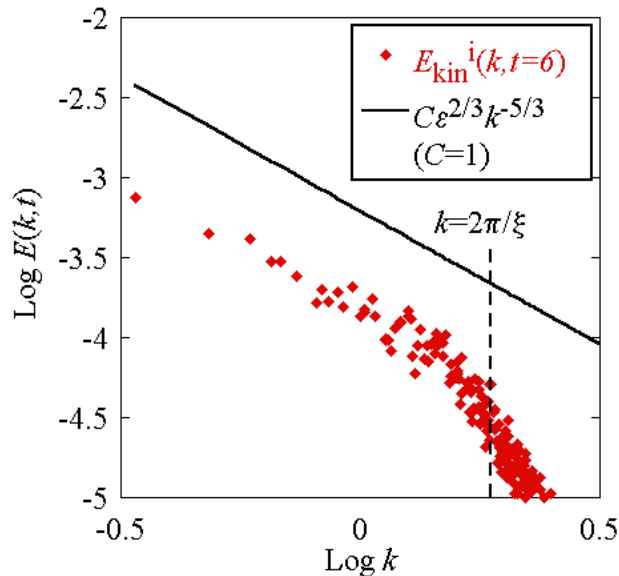
# 量子乱流のエネルギースペクトル

M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005)

M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005)

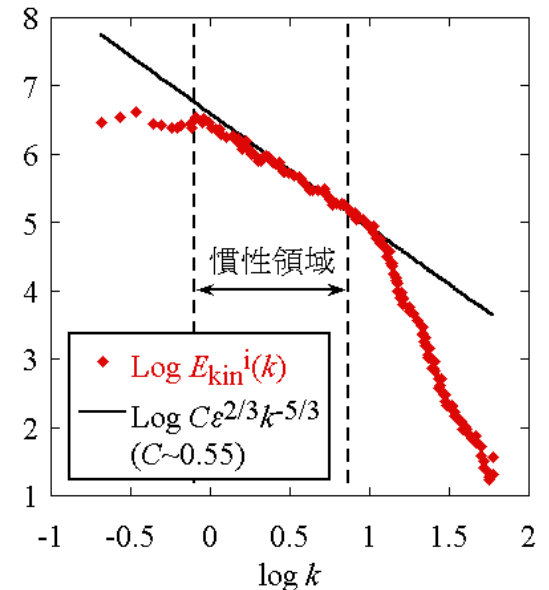
減衰乱流 (エネルギー注入無し)

減衰乱流のエネルギースペクトル



定常乱流 (エネルギー注入あり)

定常乱流のエネルギースペクトル



量子乱流と古典乱流の類似性は確かに存在する

## 2, 超流動乱流の散逸機構とは？

$$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$$

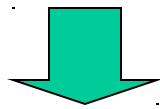
今までは渦芯よりも小さなスケールでのみ有効な散逸を仮定して計算した

- 現実の量子乱流においてこの形は正しいか？
- 有限温度においてこの形はどのように変化するか？

# 3 散逸の量子渦への影響

流れ場 $v_e$ 中の渦の運動を考える

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + i\mathbf{v}_e \cdot \nabla] \Phi(\mathbf{x}, t)$$

 渦芯近傍 :  $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|}{\xi} \exp \left[ i \tan^{-1} \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)} \right]$

散逸による渦芯の運動

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \gamma \mathbf{x}'_0 \times \mathbf{v}_e - \gamma^2 \mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{x}'_0 \times \mathbf{v}_e)$$



比較するとよく似ている

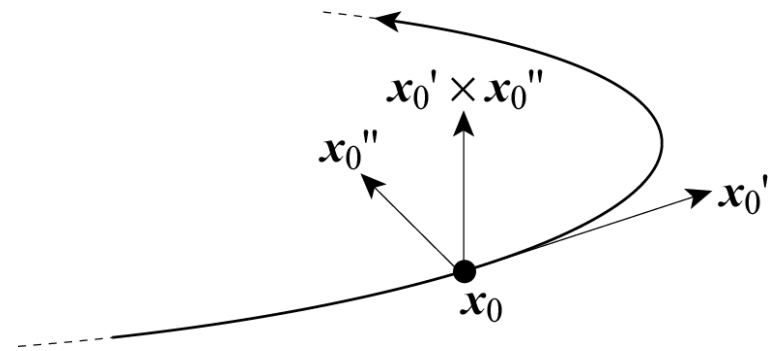
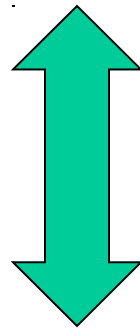
$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \alpha \mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{x}'_0 \times [\mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]$$

超流動 $^4\text{He}$ に働く相互摩擦力(mutual friction)



# $\gamma$ は超流動 $^4\text{He}$ における $\alpha, \alpha'$ と同じ効果か?

$$\dot{x}_0 = \gamma x'_0 \times v_e - \gamma^2 x'_0 \times (x'_0 \times v_e)$$



$$\dot{x}_0(t) = \alpha x'_0 \times (v_n - v_s) - \alpha' x'_0 \times [x'_0 \times (v_n - v_s)]$$

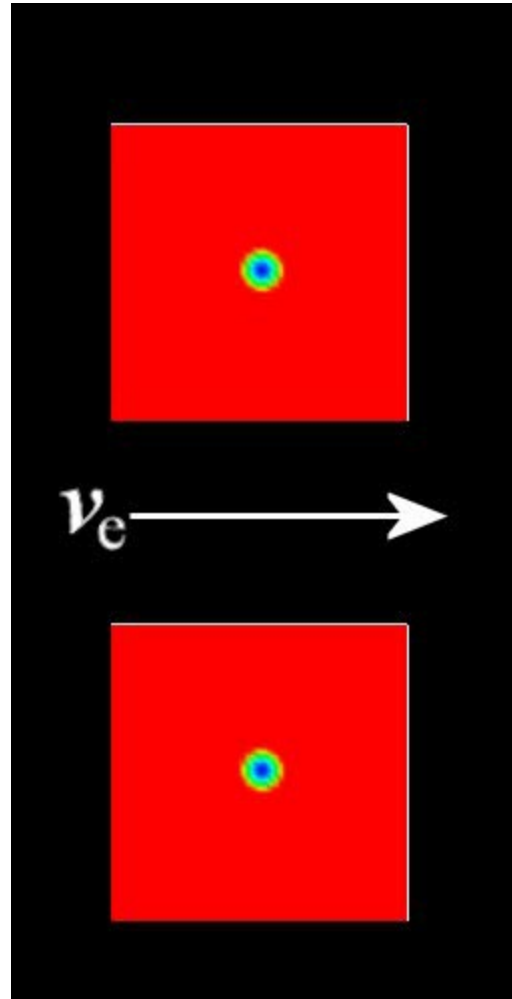
超流動 $^4\text{He}$ に働く相互摩擦力(mutual friction)

$\alpha, \alpha'$ は定数だが、 $\gamma$ は短波長でしか効かないので  
同じとはいえない

# 1本の渦のダイナミクス

短波長のみの散逸

$$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$$



全波長の散逸

$$\gamma(k) = \gamma_0$$

短波長のみの散逸は相互摩擦力として働かず、長波長の散逸が相互摩擦力として振る舞う。


↓ 振り出しに戻って..

現実の形はどうなっているのか？


# 4, 散逸構造を記述する有効理論

散逸は凝縮体と揺らぎとの相互作用によって導入される

$$H = \int d\mathbf{x} [|\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - \mu + \frac{g}{2}|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)] |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$$

  $\Gamma(\mathbf{x}, t)$  : 凝縮体と揺らぎとの衝突積分

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)]\Phi(\mathbf{x}, t)$$

 平衡周りの微小揺らぎを仮定 :  $\Gamma(\mathbf{x}, t) \propto \gamma(\mathbf{x}, t) \mu$

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t)$$

相互作用の具体的な形は？

# 揺らぎとの相互作用はどのように導かれるか？

→揺らぎを含む、拡張されたGross-Pitaevskii(GP)方程式とBogoliubov-de-Gennes(BdG)方程式

**出発：ボース場のハミルトニアンと時間発**

**展**

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[ -\nabla^2 - \mu + \frac{g}{2} |\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \left[ -\nabla^2 - \mu + g \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$$

$\hat{\Psi}(\mathbf{x})$  : ボース場

$\mu$  : 化学ポテンシャル

$g$  : 結合定数

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{x},t) = [-\nabla^2 - \mu + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)]\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)$$



$\hat{\Psi}(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x},t) + \hat{\chi}(\mathbf{x},t) + \hat{\zeta}(\mathbf{x},t)$  : ボース場

$\Phi(\mathbf{x},t) = O(\sqrt{N_0})$  : BEC の巨視的波動関数 (平均場)

$\hat{\chi}(\mathbf{x},t) = O(1)$  : BEC の 1 次揺らぎ

$\hat{\zeta}(\mathbf{x},t) = O(1/\sqrt{N_0})$  : 高次揺らぎ (無視)

## 一般化されたGP方程式とBdG方程式

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2\langle\hat{\chi}^\dagger\hat{\chi}\rangle)]\Phi + g\langle\hat{\chi}\hat{\chi}\rangle\Phi^* : \text{GP}$$

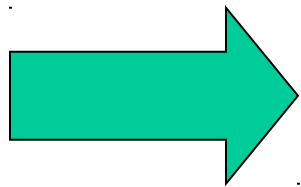
$$i\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]\hat{\chi} + g\Phi^2\chi^\dagger : \text{BdG}$$

# GP-BdG方程式における有効散逸項

衝突積分 $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ による記述

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) &= [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)]\Phi(\mathbf{x}, t) \\ [i - \gamma(\mathbf{x}, t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) &= [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

と比較



$$\gamma(\mathbf{x}, t) = -\text{Im} \left[ g \frac{\langle \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \rangle \Phi^*(\mathbf{x}, t)}{\Phi(\mathbf{x}, t)} \right]$$

GP-BdG方程式における有効散逸項

GP-BdG方程式を解くことで散逸構造が明らかになる

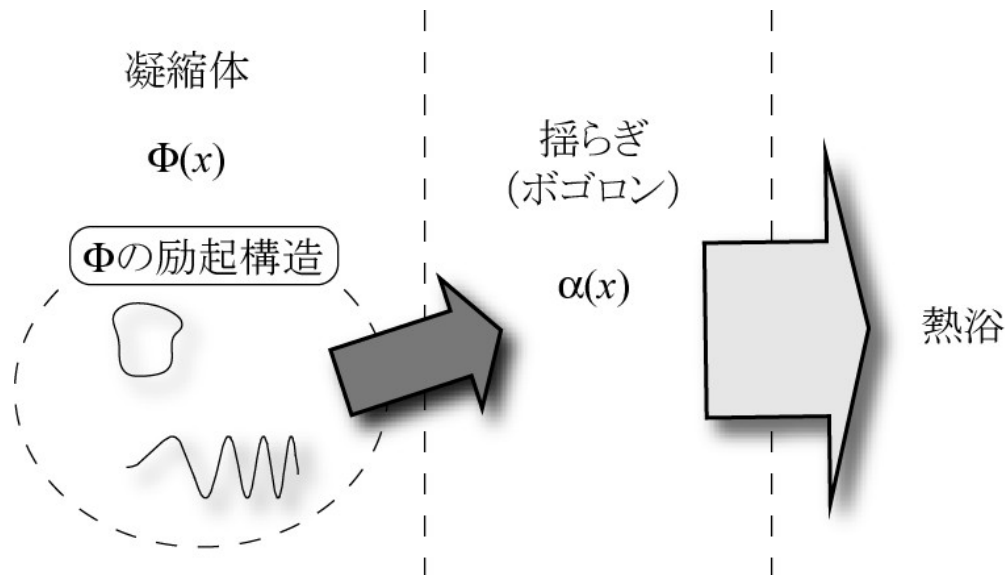
# 揺らぎに対する数値計算

Bogoliubov変換で対角化(揺らぎを素励起ボゴロンで表

$$\hat{\chi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_j \phi_j(\mathbf{x}, t) \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_j [u_j(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_j + v_j^*(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_j^\dagger]$$

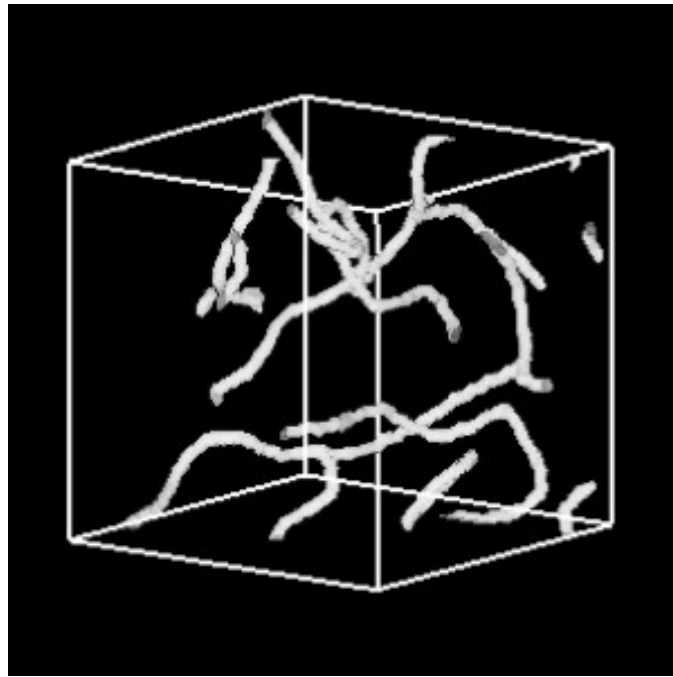
$$\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = N_j = \frac{1}{\exp[E_j/T] - 1}$$

局所平衡近似:ボゴロンは温度 $T$ の熱浴と結合しており、ボゴロンのエネルギーは熱浴へ流れる



# GP-BdG方程式の数値計算

凝縮体 $\Phi$ に対する初期状態：数本の量子渦



GP-BdG方程式を用いてしばらく時間発展させ、散逸を計算する  
→超流動乱流中の散逸の微視的構造に対する初の数値計算



# 数値計算のパラメーター

$N = 16^3$  grids :

$g = 1$        $\Delta x = 0.25$        $V = 4^3$        $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$

計算方法: スペクトル法 + Runge-Kutta-Verner法

揺らぎに対する初期状態: 一様定常

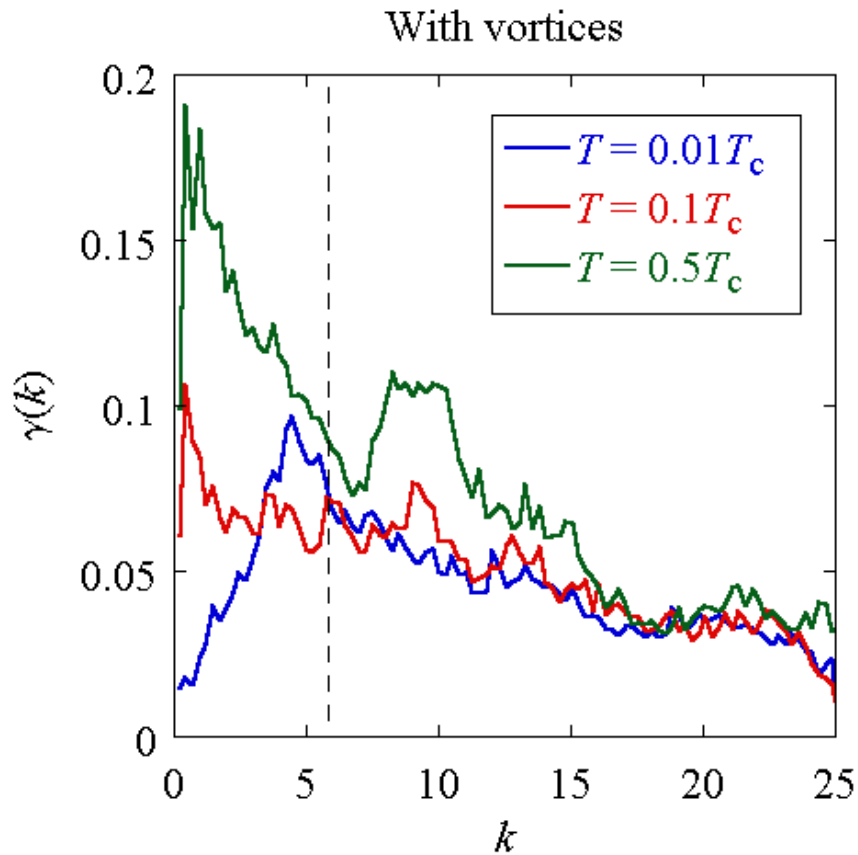
$$\mu = g(|\Phi|^2 + 2n_e)$$

$$u_j = \sqrt{\frac{1}{2V} \frac{k_j^2 + g|\Phi|^2}{E_j}} + 1e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}}$$

$$v_j = \sqrt{\frac{1}{2V} \frac{k_j^2 + g|\Phi|^2}{E_j}} - 1e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}}$$

$$E_j = k_j \sqrt{k_j^2 + 2g|\Phi|^2}$$

# 計算結果



$k$ の小さなところで $\gamma$ は  
低温では小さい  
高温では大きい

→ 高温における散逸は  
確に相摩擦として働ける

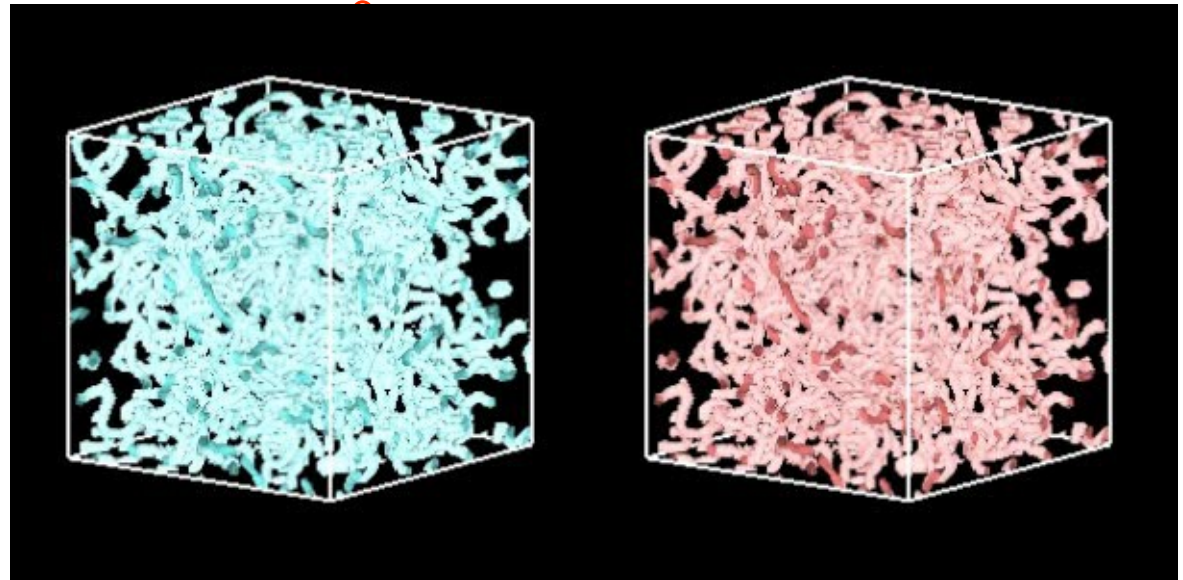
# 結論

小さな $k$ における $\gamma$ が相互摩擦  
力として振る舞う

小さな $k$ における $\gamma$ は高温にお  
いて大きくなる

→ 高温の $\gamma$ のみが相互摩擦力として振る舞う

得られた $\gamma$ を用い  
た減衰流のシミュレーション



$$T = 0.01T_c$$

$$T = 0.5T_c$$

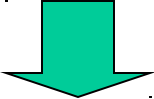
## 5, まとめ

- 凝縮体と揺らぎとの相互作用を考慮したGP-BdG方程式から得られる散逸が、絶対零度において階段関数型の散逸を良く記述すること、有限温度において相互摩擦力を定性的に記述することを明らかにした。

# 3 散逸の量子渦への影響

流れ場  $v_e$  中の渦の運動を考える

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + i\mathbf{v}_e \cdot \nabla] \Phi(\mathbf{x}, t)$$

  $\Phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \exp[i\phi(\mathbf{x}, t)]$

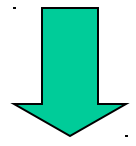
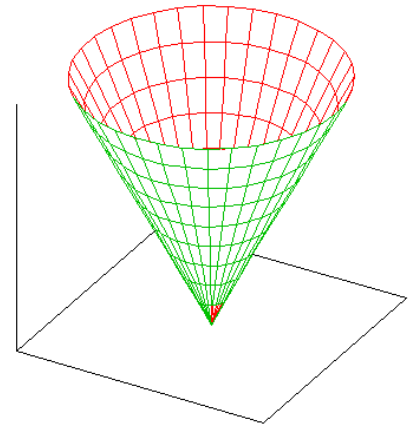
$$\underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}_e \cdot \nabla \right) f(\mathbf{x}, t)}_{= D/Dt : \mathbf{v}_e \text{ とともに動く系}} = \gamma(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_e \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \gamma(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t)$$

$= D/Dt : \mathbf{v}_e$  とともに動く系

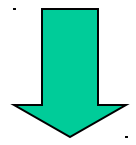
右辺第1項:  $\mathbf{v}_e$  に垂直な力を及ぼす散逸

右辺第2項:  $\mathbf{v}_e$  に平行な力を及ぼす散逸

渦芯近傍 :  $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|}{\xi} \exp \left[ i \tan^{-1} \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)} \right]$



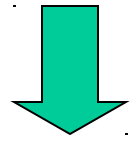
$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}_e \cdot \nabla \right) f(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_e \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \gamma(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t)$$



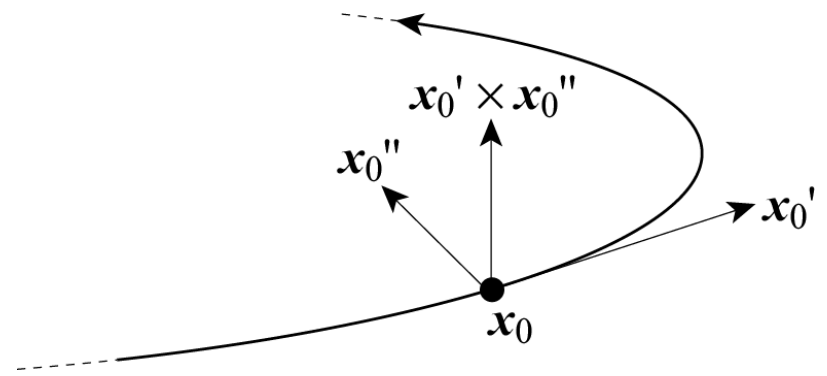
$$\dot{x}_0(t) = -\gamma v_{e,y} + \gamma^2 v_{e,x}$$

$$\dot{y}_0(t) = \gamma v_{e,x} + \gamma^2 v_{e,y}$$

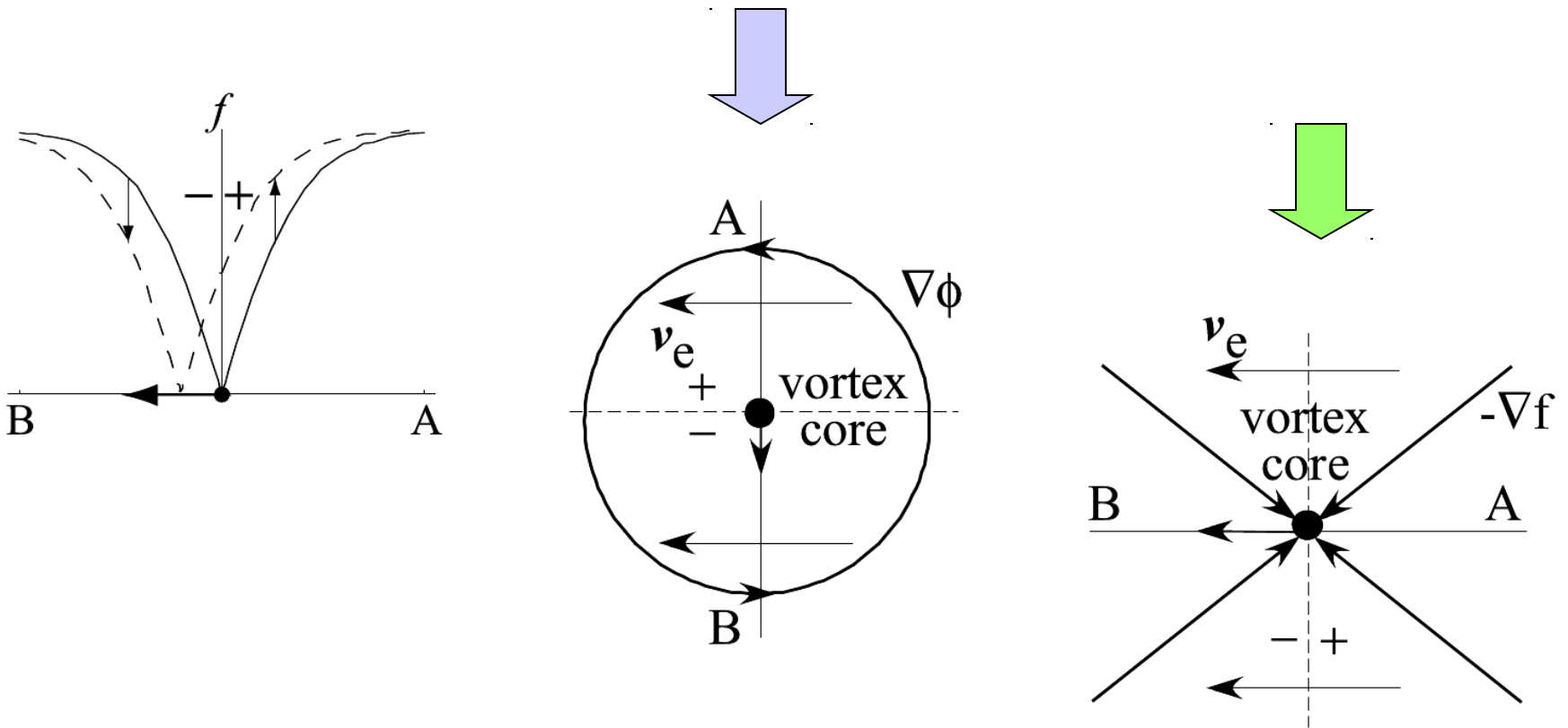
3D渦への拡張



$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \gamma \mathbf{x}'_0 \times \mathbf{v}_e - \gamma^2 \mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{x}'_0 \times \mathbf{v}_e)$$

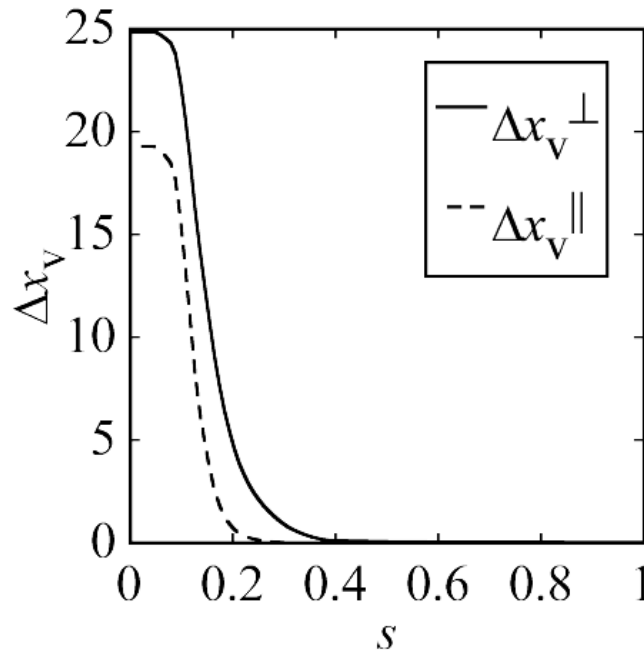


$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}_e \cdot \nabla\right) f(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_e \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \gamma(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t)$$



# 散逸のスケール依存性

$t = 5$ における $\gamma(k) = 0$ と $\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi s / \xi)$ の散逸での渦の位置の相違



$\gamma$  は  $s \sim 0.4$  付近において、相互摩擦力として振る舞い始める



$$\rho = \langle \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \rangle \quad \mathbf{j} = \frac{1}{i} \langle \hat{\Psi}^\dagger \nabla \hat{\Psi} - \hat{\Psi} \nabla \hat{\Psi}^\dagger \rangle = \rho \mathbf{v}$$

$$\rho_c = \Phi^\dagger \Phi \quad \mathbf{j}_c = \frac{1}{i} [\Phi^\dagger \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^\dagger] = \rho_c \mathbf{v}_c$$

$$\rho_n = \langle \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle \quad \mathbf{j}_n = \frac{1}{i} \langle \hat{\chi}^\dagger \nabla \hat{\chi} - \hat{\chi} \nabla \hat{\chi}^\dagger \rangle = \rho_n \mathbf{v}_n$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

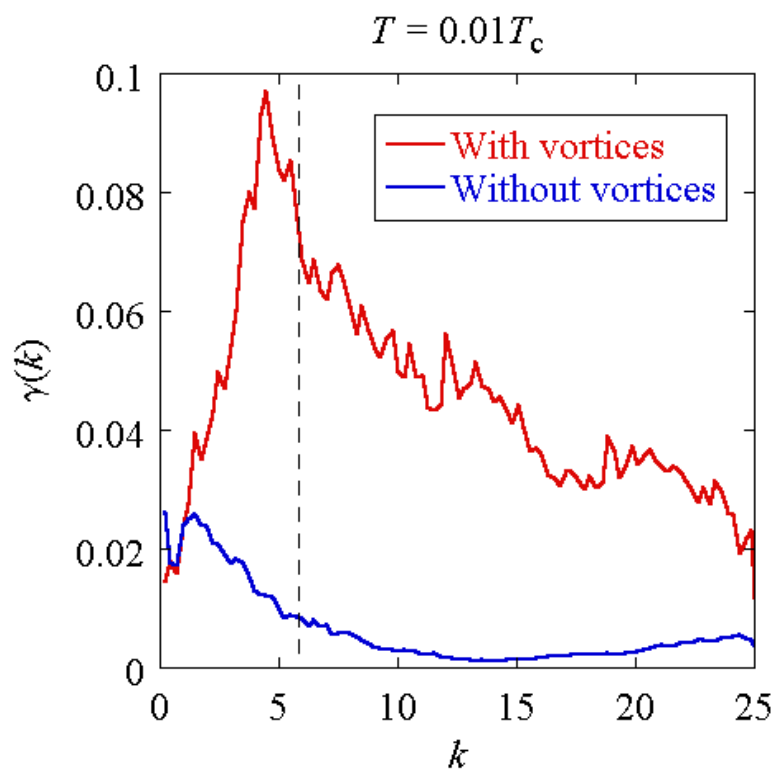
$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_c = 2g \operatorname{Im}[\langle \hat{\chi} \hat{\chi} \rangle \Phi^{*2}]$$

Effective viscosity

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_n = 2g \operatorname{Im}[\langle \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi}^\dagger \rangle \Phi^2]$$

揺らぎと凝縮体との相互作用により、散逸が自然に導入される(ただし凝縮体の粒子数は保存しない)

# 計算結果



渦がないときには $\gamma$ は非常に  
小さい(散逸ほとんど無)

# 解くべき方程式

$$i\partial\Phi/\partial t = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2n_e)]\Phi + gm_e\Phi^*$$

$$i\partial u_j/\partial t = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]u_j - g\Phi^2 v_j$$

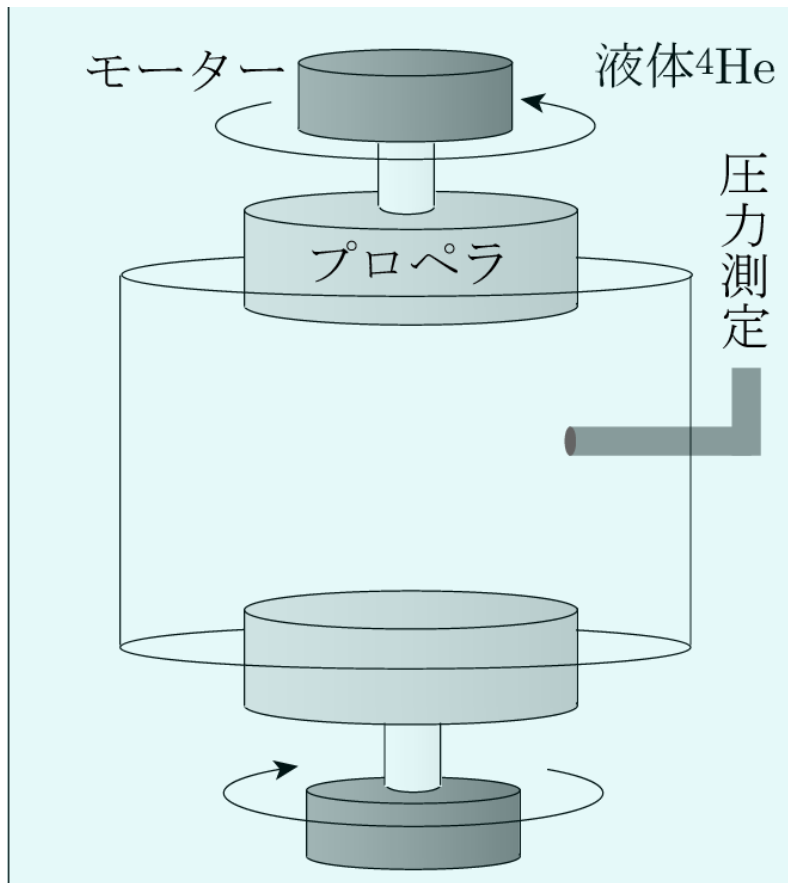
$$i\partial v_j/\partial t = -[-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]v_j + g\Phi^{*2}u_j$$

$$n_e = \sum_j [ |u_j|^2 N_j + |v_j|^2 (N_j + 1) ]$$

$$m_e = - \sum_j [ u_j v_j^* (2N_j + 1) ]$$

# 超流動<sup>4</sup>Heを用いた超流動乱流の実験

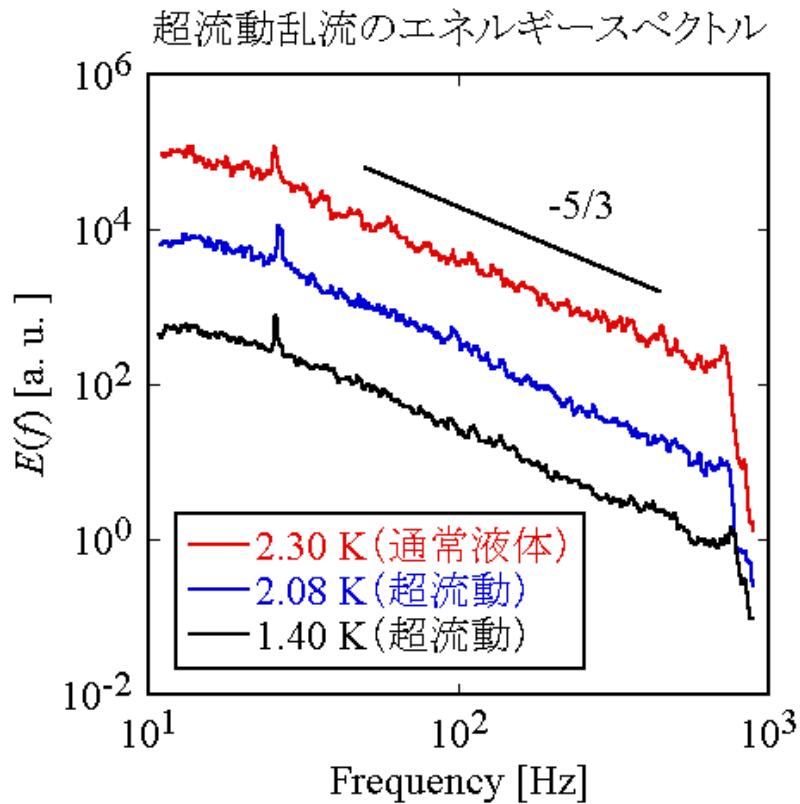
J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)



実験の温度領域 :  $T > 1.4$  K

→量子渦の運動は常流体の影響を受け、量子乱流を研究するには温度が高い？

# 超流動 $^4\text{He}$ を用いた超流動乱流の実験



$^4\text{He-I}$ と $^4\text{He-II}$ の両方においてKolmogorov則が観測された。

しかしこの温度領域では粘性を持った常流体が支配的であり、その運動を見ている可能性が強い？

常流体のない絶対零度近傍の超流動乱流：量子乱流でも古典流体との類似性はあるのか？

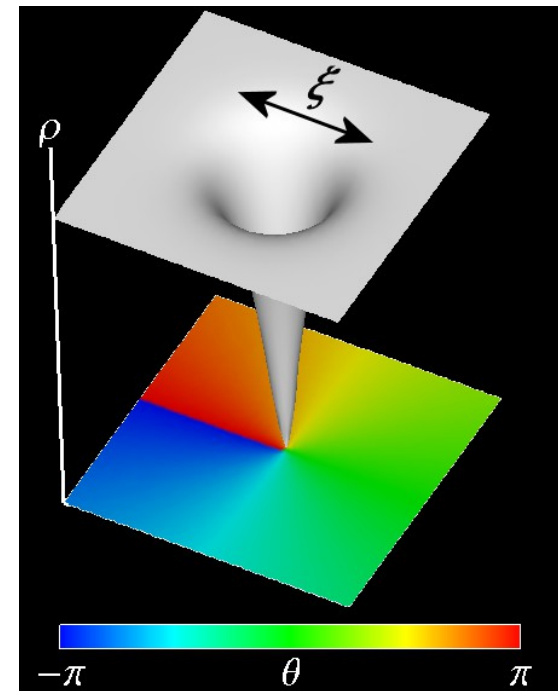
## 2. モデル —Gross-Pitaevskii方程式—

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t)$$

$\Phi(\mathbf{x})$  : 巨視的波動関数  
 $\mu$  : 化学ポテンシャル  
 $g$  : 結合定数

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= |\Phi(\mathbf{x})| \exp[i\theta(\mathbf{x})] \\ \rho(\mathbf{x}) &= |\Phi(\mathbf{x})|^2 : \text{流体の密度} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 2\nabla\theta(\mathbf{x}) : \text{流体の速度場} \\ \xi &= 1/\sqrt{g\rho} : \text{回復長}\end{aligned}$$

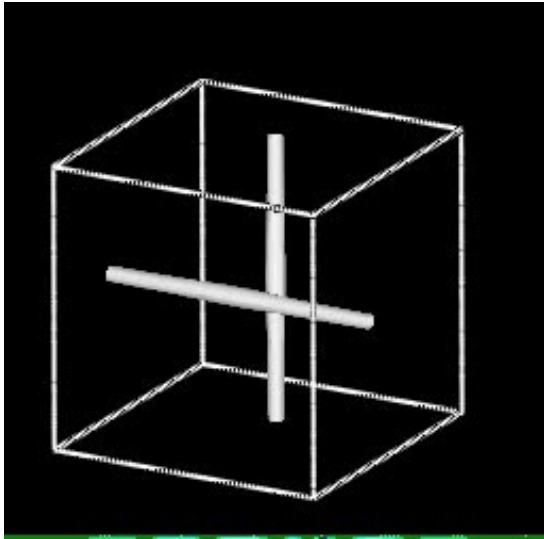
GP乱流を数値的に調べる



量子渦

# 短波長圧縮性素励起

## 渦の再結合

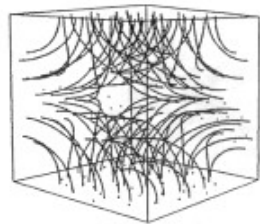


渦の再結合時や小さい渦輪の消滅時に、回復長よりも短い波長の圧縮性素励起が放出される！

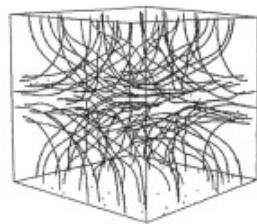
→量子渦のダイナミクスに影響を与え渦カスケードが誘起される！

# もし散逸がなければ...

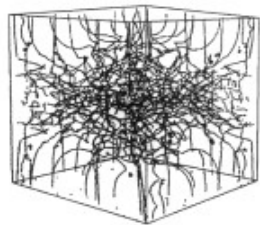
C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896  
(1997)



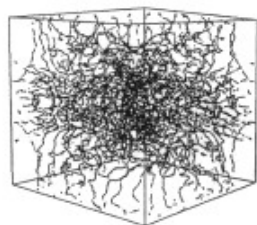
(a)  $t = 2$



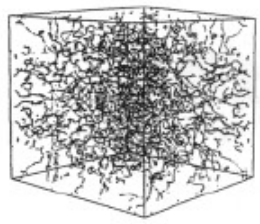
(b)  $t = 4$



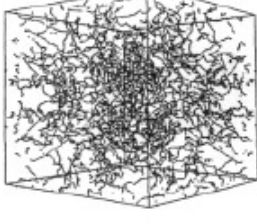
(c)  $t = 6$



(d)  $t = 8$



(e)  $t = 10$



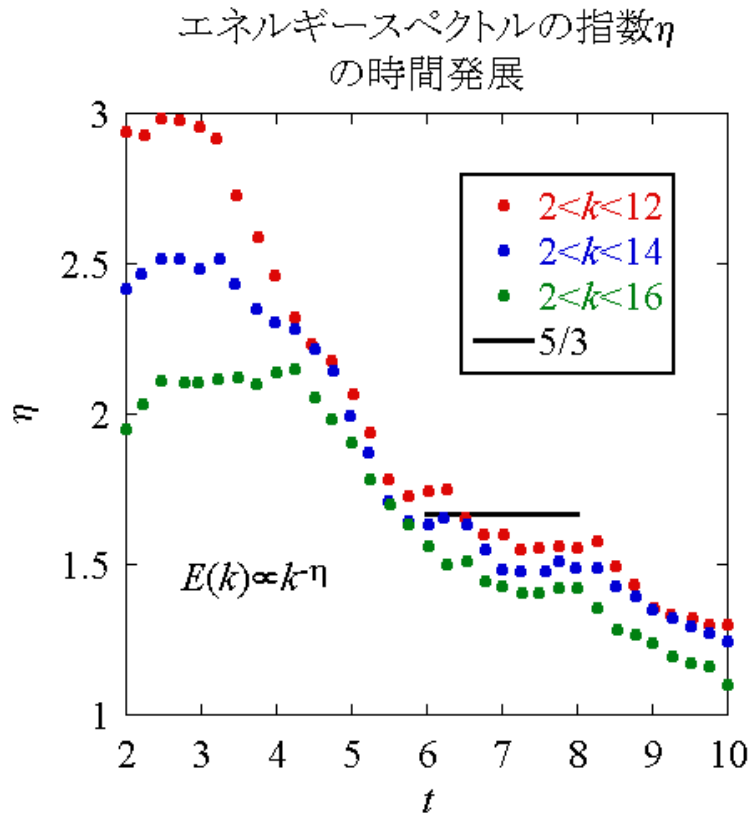
(f)  $t = 12$

## GP乱流の数値シミュレーション

全エネルギーは保存するものの、非圧縮性の運動エネルギーが圧縮性の運動エネルギーへと転化してゆく。



# もし散逸がなければ...



エネルギースペクトルが非常に短い間だけKolmogorov則と一致しているように見えなくもない。

→この一致は圧縮性素励起の増加とともにすぐ破れる

**短波長圧縮性素励起を散逸する必要がある。**

# 前回の計算 一減衰乱流

$0 < t < 6$

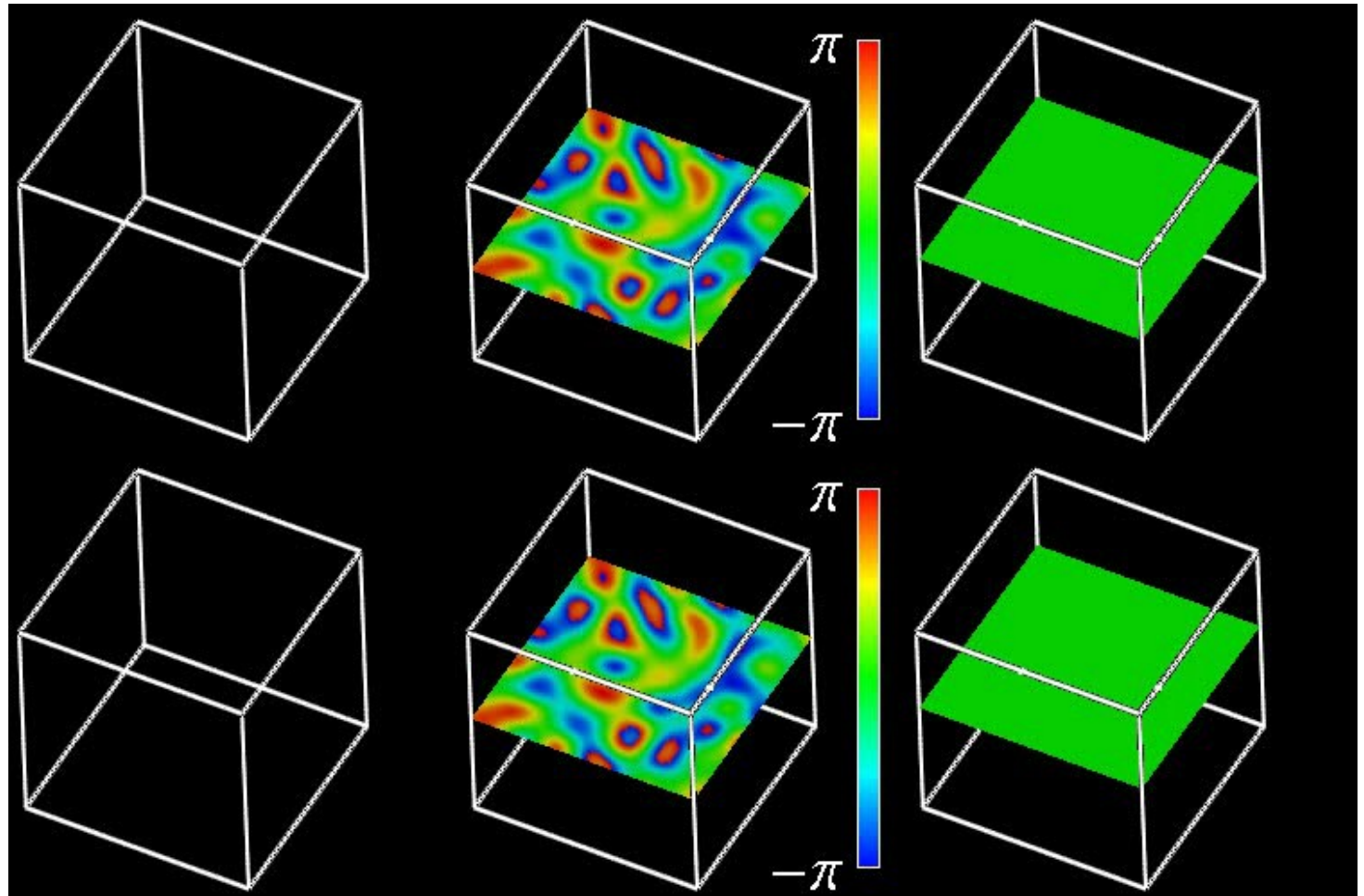
渦

位相

密度

$\gamma_0=0$

$\gamma_0=1$



# 乱流のエネルギー

$$E_{\text{kin}} = \int d\mathbf{x} [|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})|^2]$$

運動エネルギー

$$E_{\text{kin}}^i = \int d\mathbf{x} [\{|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})\}^i]^2$$

$$\text{div}\{|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})\}^i = 0$$

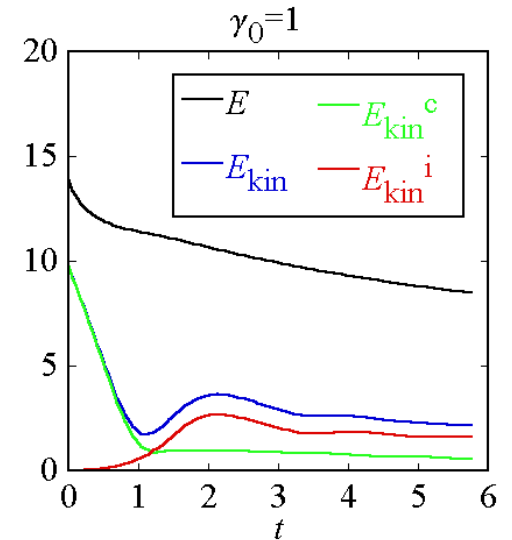
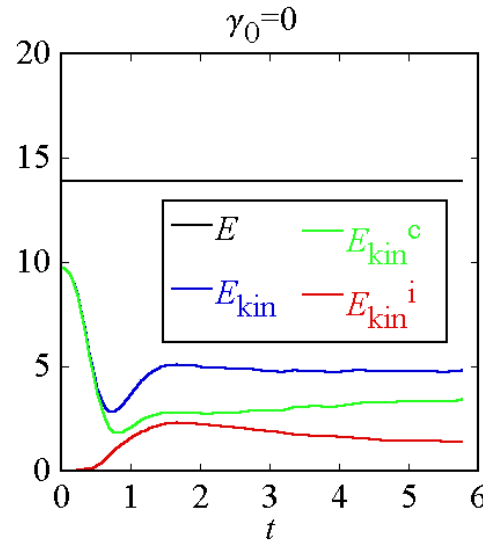
非圧縮性部分 (渦)

$$E_{\text{kin}}^c = \int d\mathbf{x} [\{|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})\}^c]^2$$

$$\text{rot}\{|\Phi(\mathbf{x})|\nabla\theta(\mathbf{x})\}^c = 0$$

圧縮性部分 (圧縮性素励起)

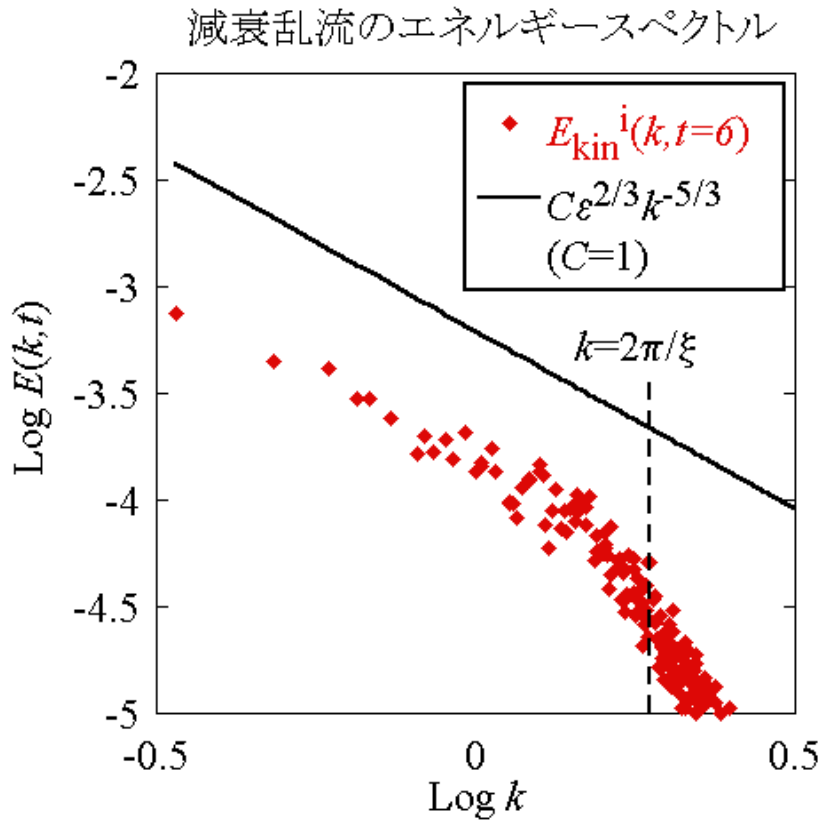
$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^i + E_{\text{kin}}^c$$



散逸がないと圧縮性素励起のエネルギーが支配的となる。

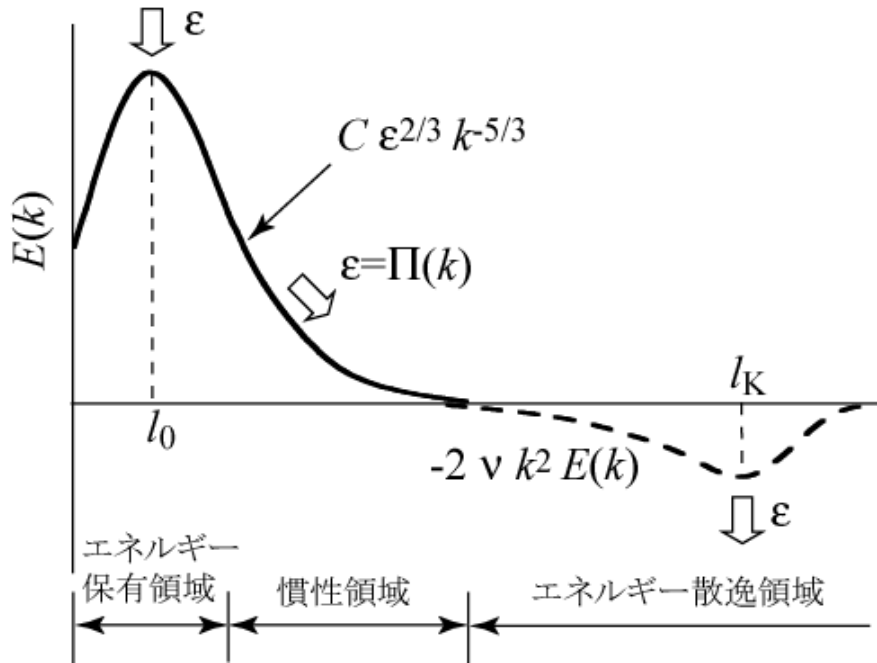
散逸を導入することで圧縮性素励起のエネルギーが散逸し、渦のエネルギーが支配的となる。

# エネルギースペクトル



短波長圧縮性素励起を消すことで、量子乱流は古典乱流との類似性を示した。

# 3. 計算結果 一定常乱流

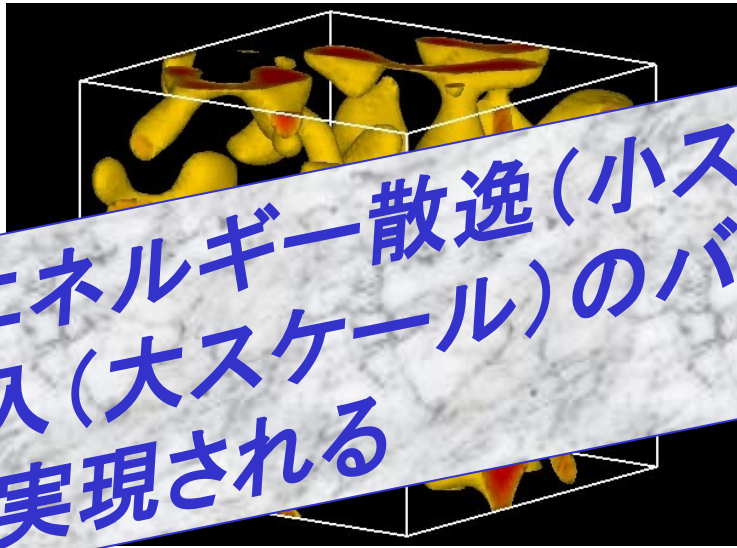


エネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の統計や慣性領域におけるエネルギー流束 $\Pi$ の振る舞いをより詳しく調べるためには、乱流の定常状態が必要

古典乱流におけるKolmogorov則

# 大スケールからのエネルギー注入

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + U(\mathbf{x}, t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



エネルギー散逸 (小スケール) とエネルギー注入 (大スケール) のバランスにより定常乱流が実現される

エネルギーを注入する

$$\langle U(\mathbf{x}, t) U(\mathbf{x}', t') \rangle = V_0^2 \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2X_0^2} - \frac{(t - t')^2}{2T_0^2} \right]$$

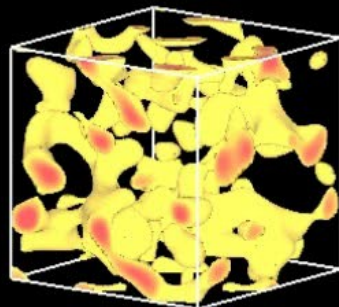
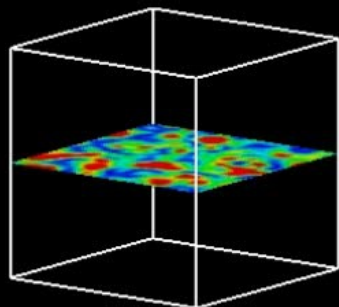
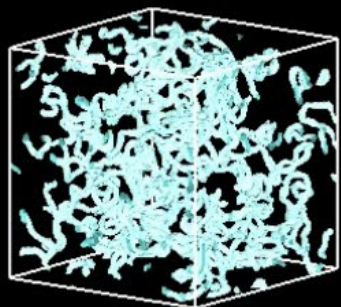
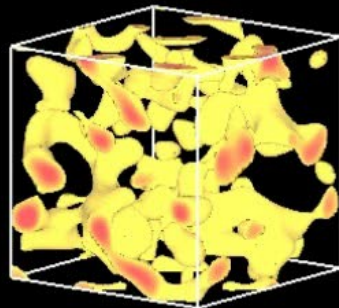
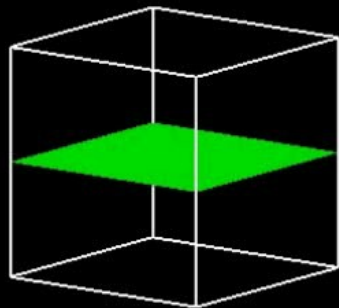
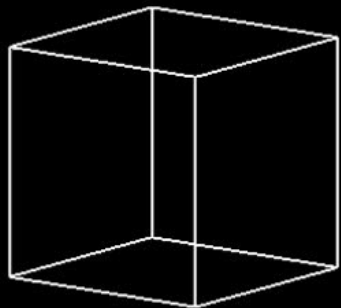
$X_0$ : エネルギー注入の特徴的スケール (このスケールで量子渦が生成する)

# 初期状態: 一様

渦

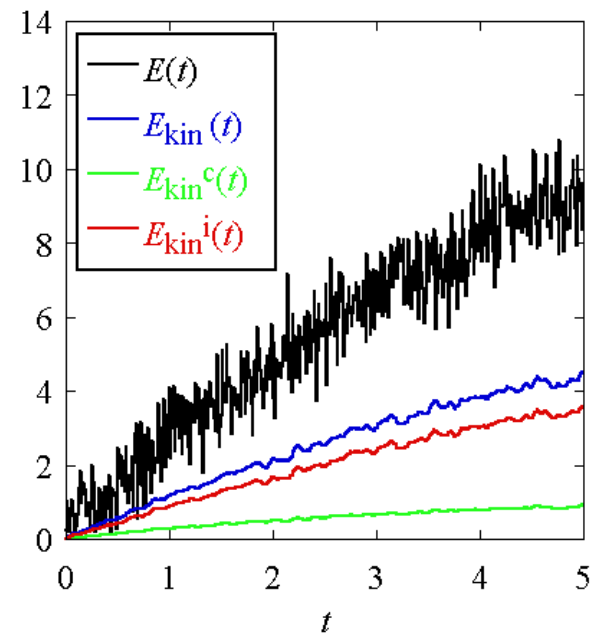
密度

ポテンシャル

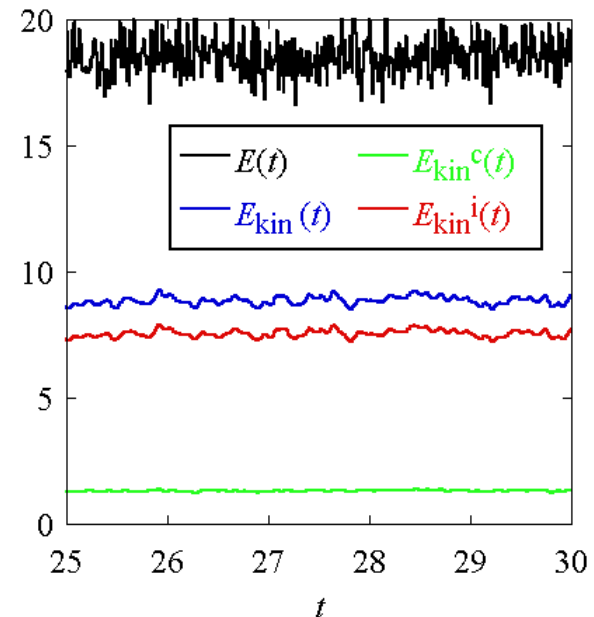


$t > 25$ にて定常乱流が実現される  
非圧縮エネルギーが常に運動エネルギーを支配している

初期ステージ

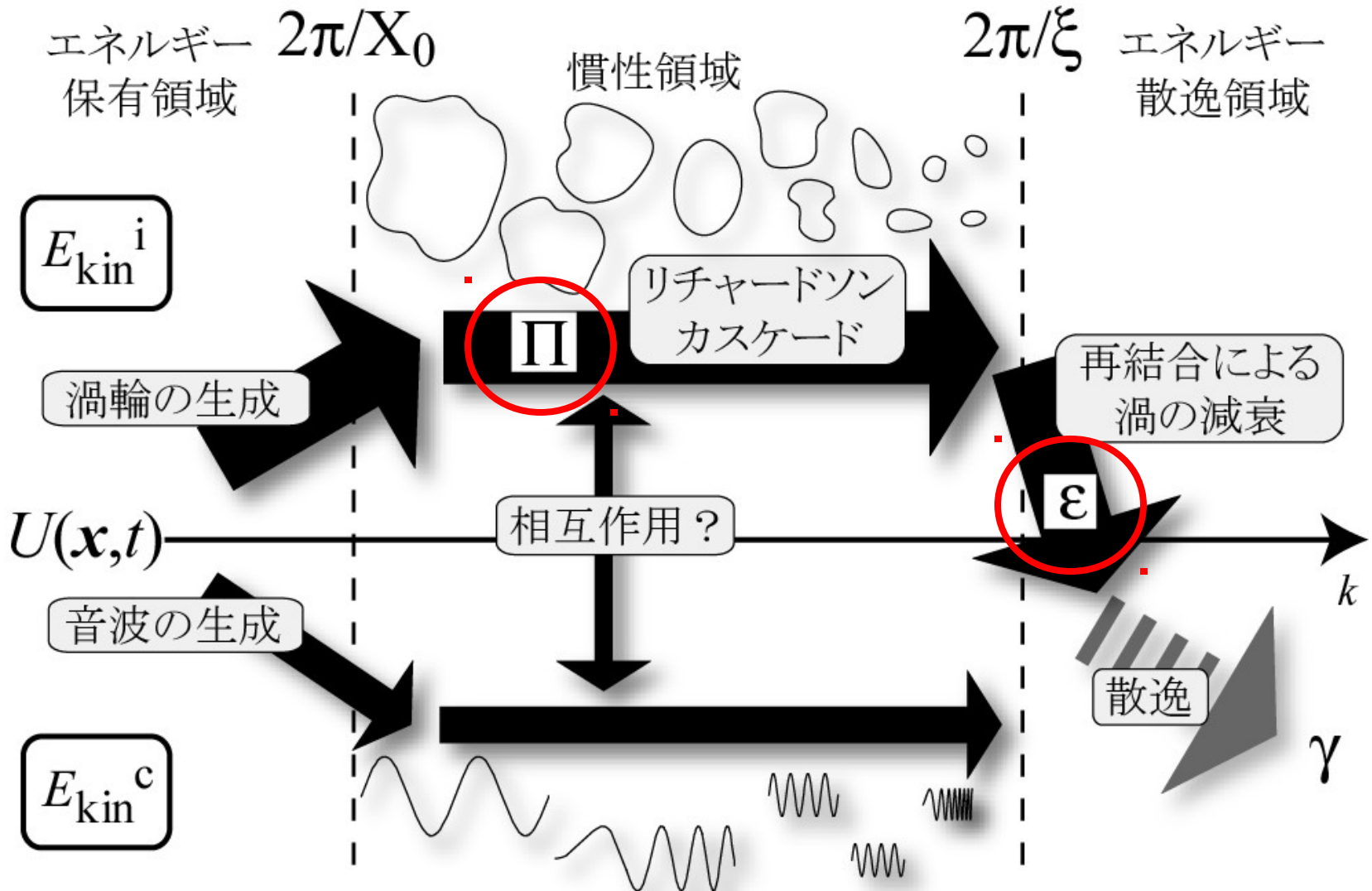


定常ステージ





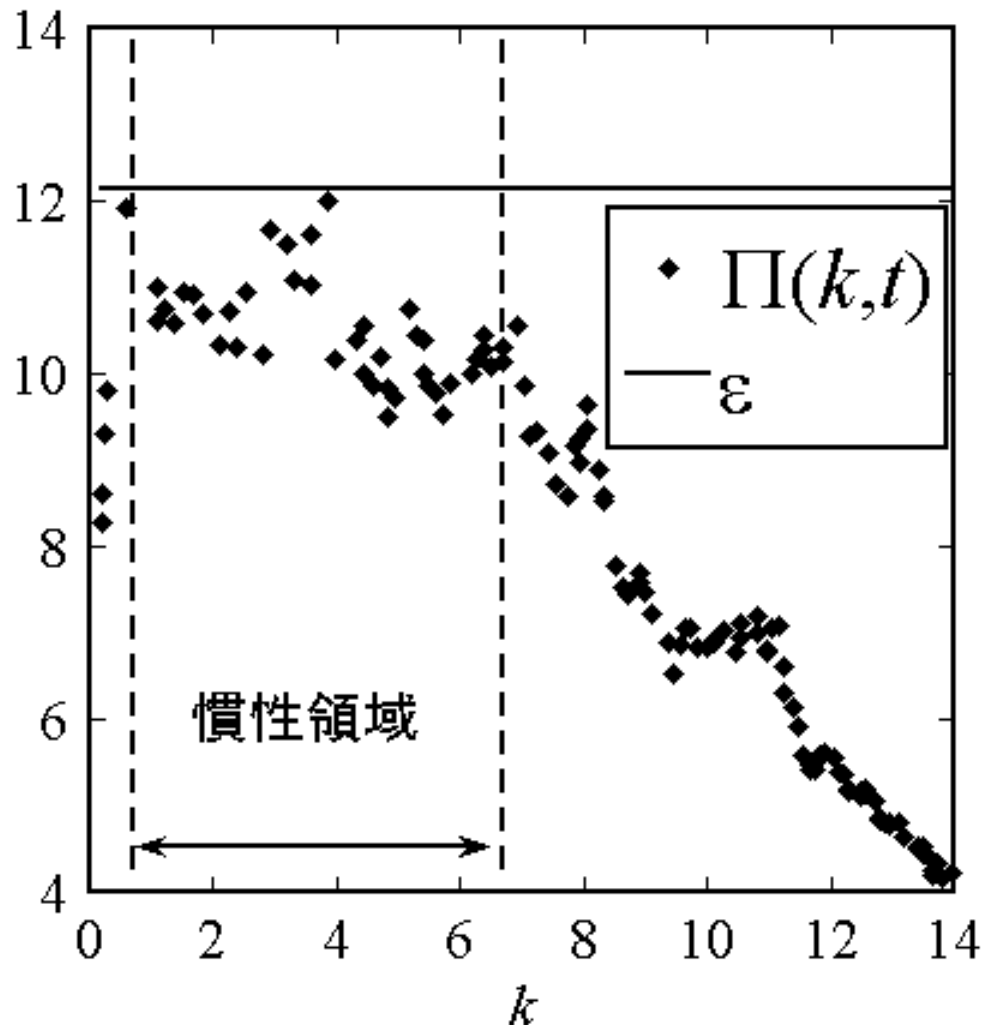
# エネルギー伝播の描像





# エネルギー散逸率とエネルギー流束

エネルギー流束の波数依存性

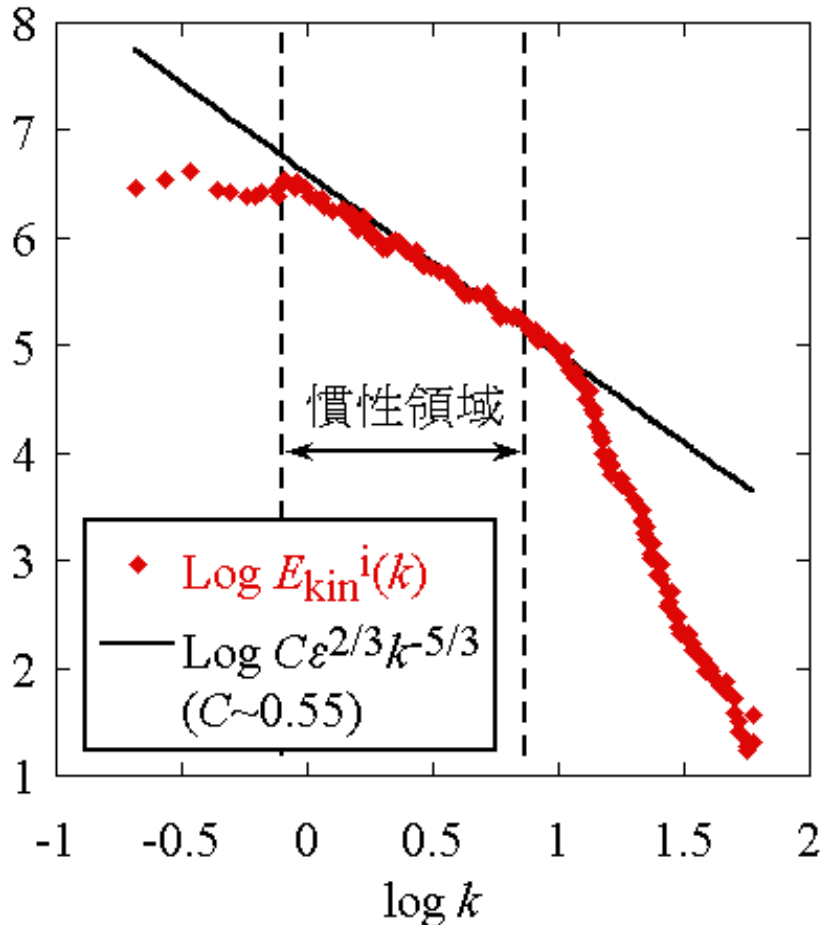


1. エネルギー流束 $\Pi$ は慣性領域においてほぼ一定の値をとる
2. 慣性領域におけるエネルギー流束 $\Pi$ はエネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率 $\varepsilon$ ?  
ほぼ同じ値をとる

⇒エネルギー伝播の描像  
および量流における慣性領域の存在が明らかになった!

# エネルギースペクトル

定常乱流のエネルギースペクトル

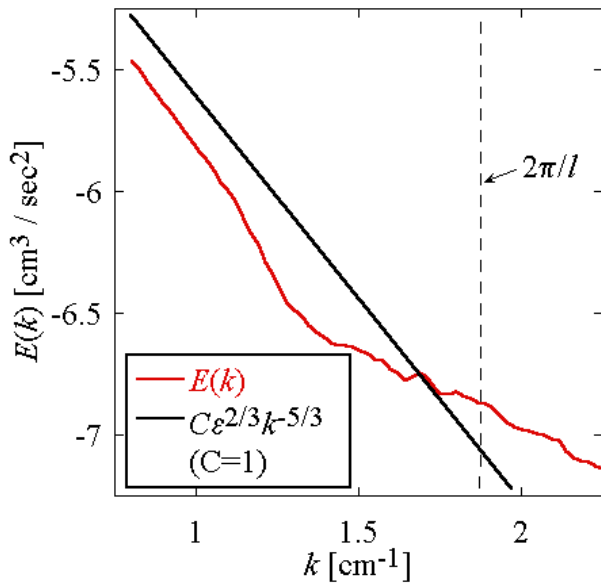


慣性領域でエネルギースペクトルがKolmogorov則と一致した！

：量子乱流と古典乱流の類似性は確かに存在する

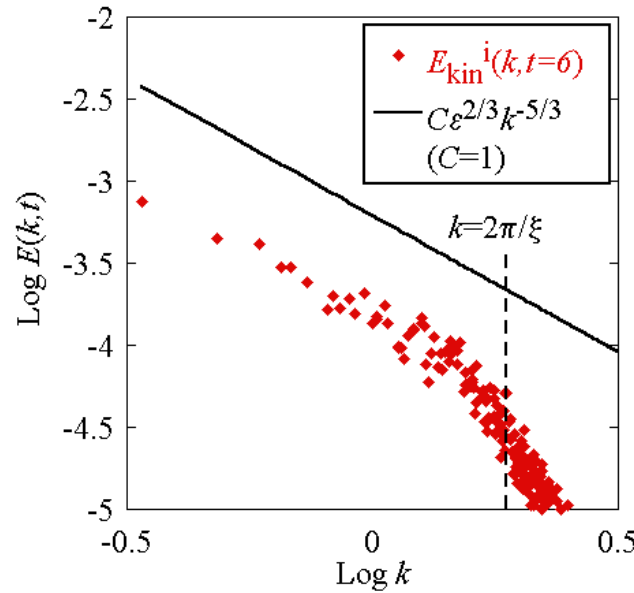
# Kolmogorov定数

渦糸近似によるエネルギースペクトル



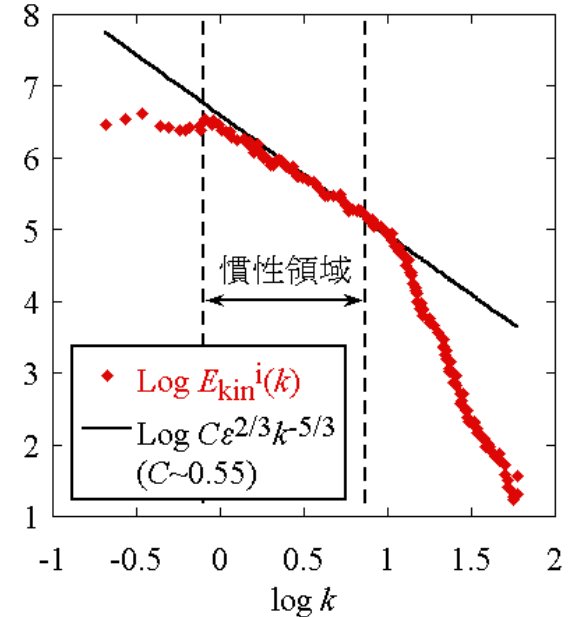
渦糸近似:  $C \sim 0.7$

減衰乱流のエネルギースペクトル



減衰乱流:  $C \sim 0.32$

定常乱流のエネルギースペクトル



定常乱流:  $C \sim 0.55$

古典乱流:  $1.4 < C < 1.8 \rightarrow$ 明らかに古典乱流より小さな値が得られている: 量子乱流に特有の性質かも知れない