原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体を用いた量子乱流研究の実現

大阪市立大学理学部
小林未知数

素励起物理学研究室
Elementary Excitation Physics Laboratory
（物性理論研究室）

研究集会「乱流現象及び多自由度系の動力学、構造と統計法則」　２００７年１１月２３～２５日

発表内容

1. 量子流体と量子乱流研究
2. 原子気体ボース・アインシュタイン凝縮と量子渦研究
3. Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション
4. 計算結果
5. まとめ

量子流体と量子乱流研究

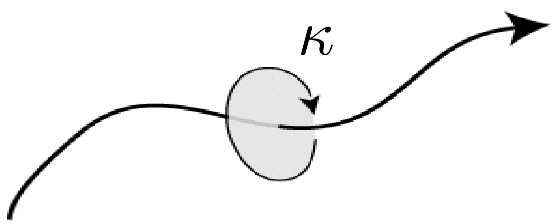
量子流体が実現される系

- 液体^{4}He, （^{3}He）
- 磁場やレーザーによって閉じこめられた原子気体
- （超伝導体や半導体励起子）

→極低温においてボース・アインシュタイン凝縮転移を引き起こし、超流動（粘性のない流れ）となる。

量子渦

量子流体中では循環が量子化される



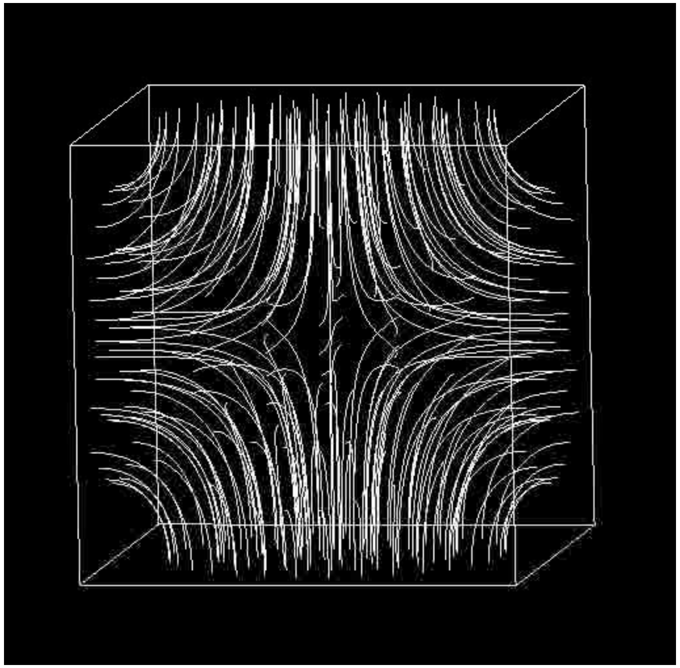
•すべての量子渦はいたるところで同じ循環 $\kappa = \oint \boldsymbol{v}_s \cdot d\boldsymbol{s} = n\, h \,/\, m$ を持つ（$n \geq 2$ の渦は不安定で $n = 1$ の渦へと分裂する）。

•渦芯のサイズは微視的（~Å：液体 ^{4}He、~100nm：原子気体ボース凝縮体）：渦糸近似が、量子渦ではRealisticとなる。

量子渦から量子乱流へ

量子渦のタングル状態として量子乱流が実現される

渦糸近似による量子乱流のシミュレーション

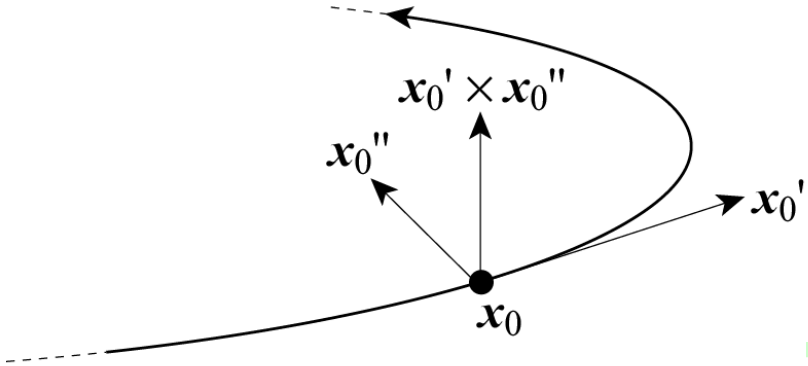


T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002)

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}_\mathrm{s}(\boldsymbol{x}_0)$$

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{s}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_\mathrm{ind}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}_\mathrm{sa}(\boldsymbol{x})$$

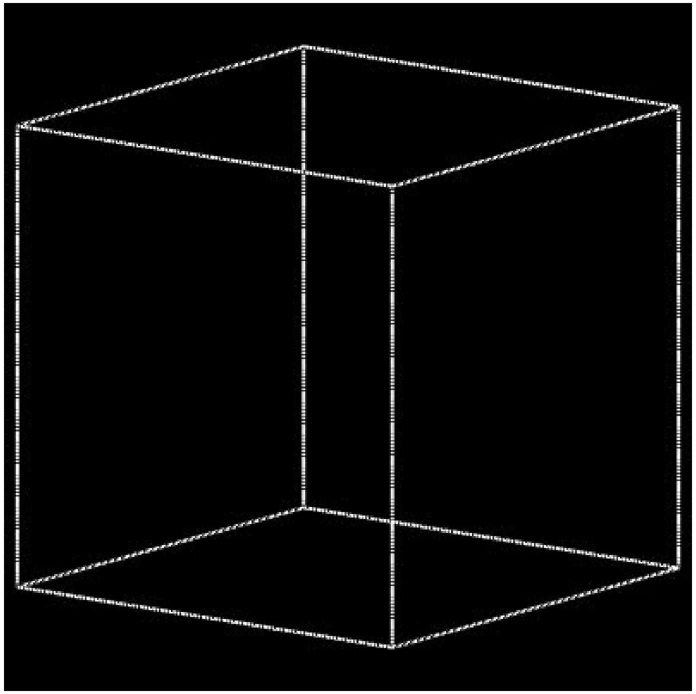
$$\boldsymbol{v}_\mathrm{ind}(\boldsymbol{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\boldsymbol{x}_0(t) - \boldsymbol{x}] \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0(t)}{|\boldsymbol{x}_0(t) - \boldsymbol{x}|^3}$$

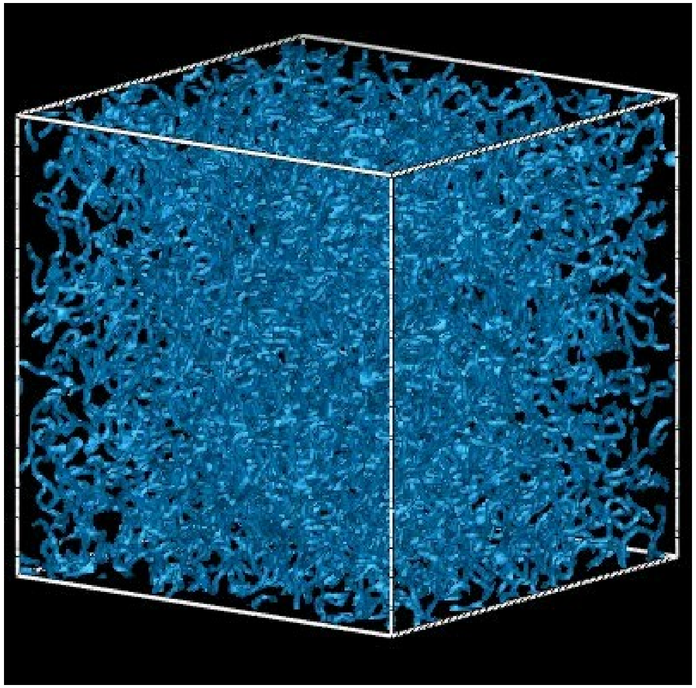


量子渦から量子乱流へ

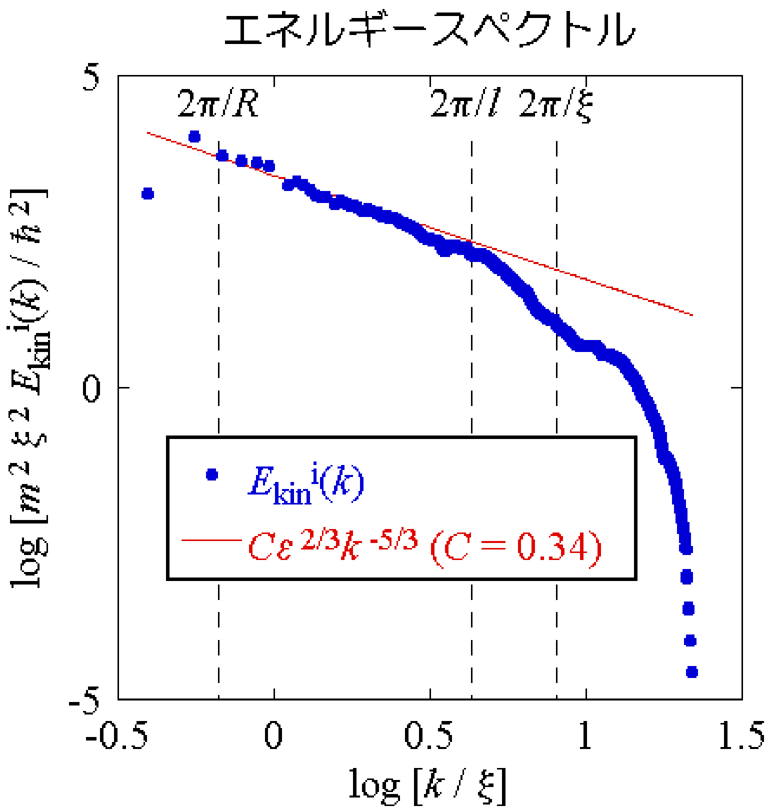
量子渦のタングル状態として量子乱流が実現される

Gross-Pitaevskii方程式による量子乱流のシミュレーション





量子乱流のエネルギースペクトル



R：注入渦輪のサイズ

$E(k) \propto k^{-5/3}$：Kolmogorov則が確認された

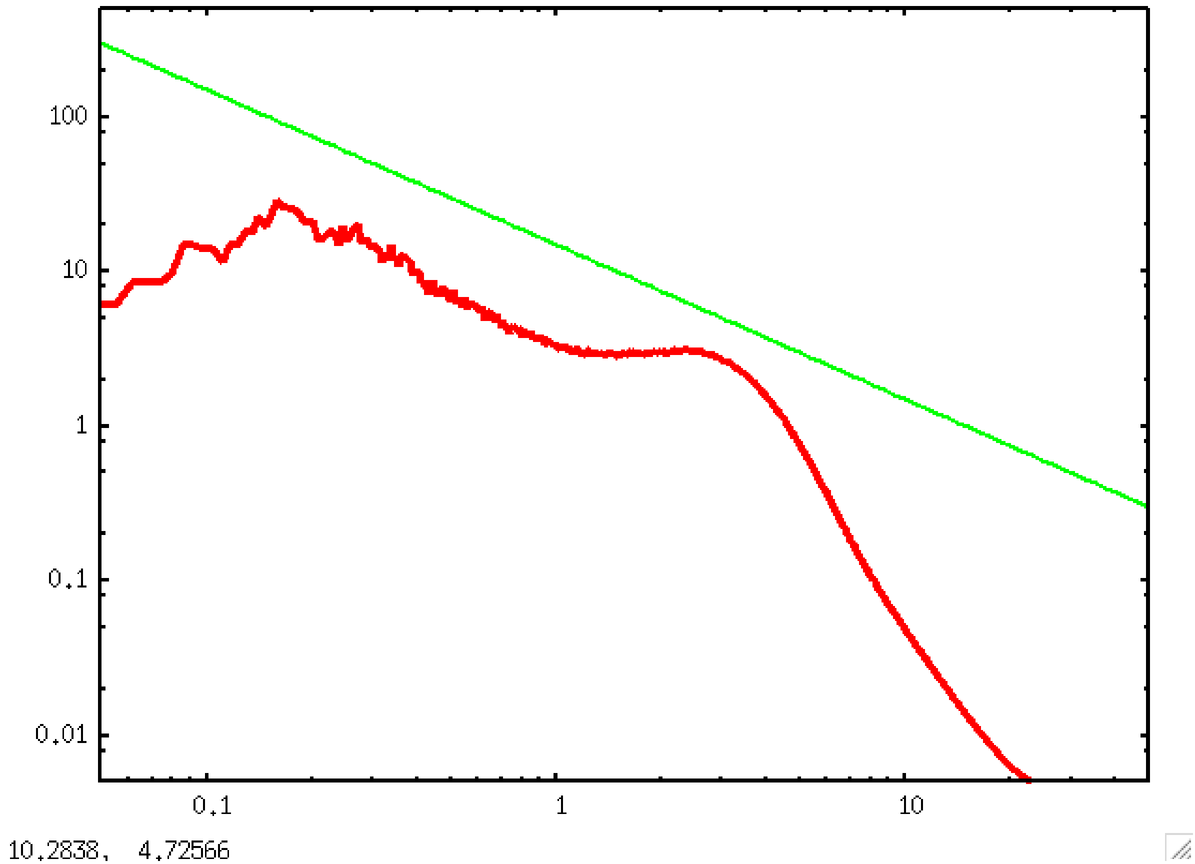
$l = (V/L)^{1/2}$：平均渦間距離

$E(k) \propto k^{-6}$：Kolmogorov則とは別のスケーリングが見えた（Kelvin波乱流：量子乱流固有の現象？）

ξ：回復長（渦芯）

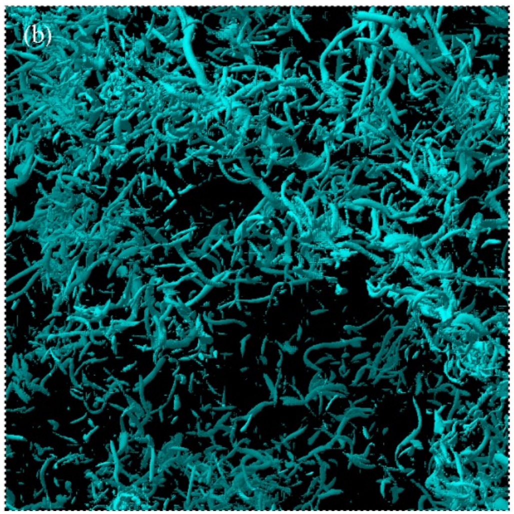
量子乱流のエネルギースペクトル

日本原子力研究開発機構における最大規模(1024^3)のGP方程式数値シミュレーション結果

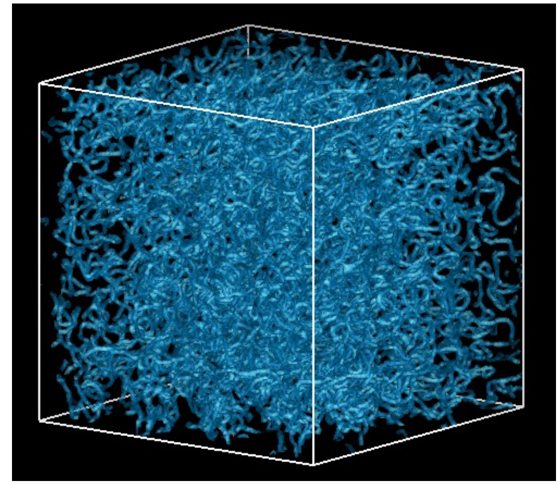


量子渦の視点から見た量子乱流研究

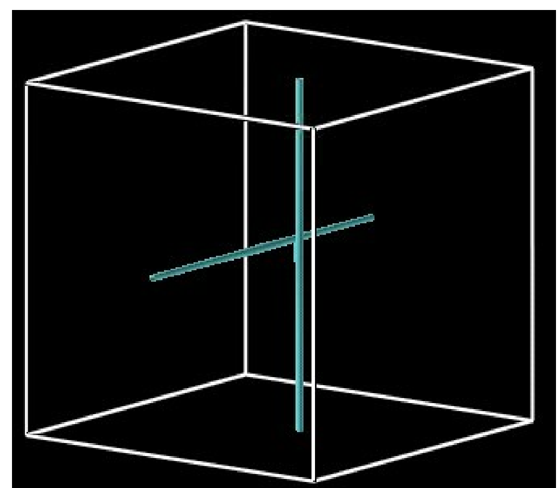
Y. Kaneda, *et al*, Phys. Fluids. **15**, L21 (2003)



古典乱流：渦の評価が難しい

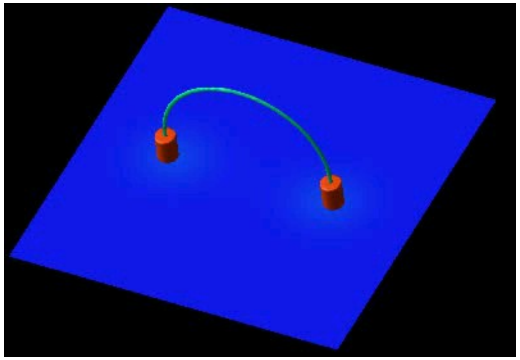


量子乱流：量子渦が厳密に定義



超流動Heを用いた量子乱流研究

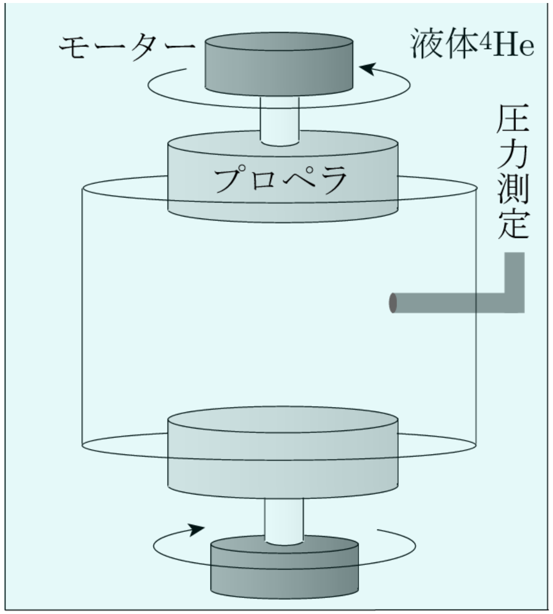
今までの全ての量子乱流研究は液体Heを用いて行われてきた



振動ワイヤー（大阪市大）

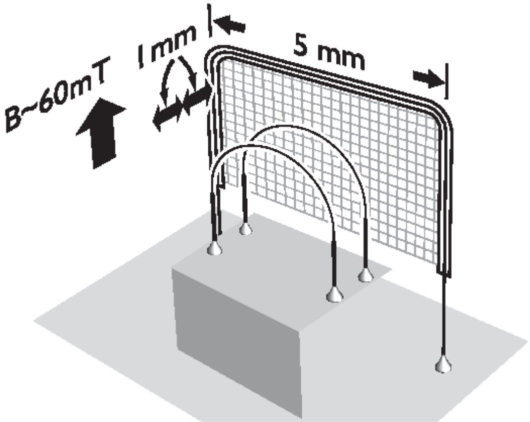
H. Yano *et al*. Phys. Rev. B **75**, 012502 (2007)

振動対向円板 (Paris)



J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

振動グリッド (Lancaster)

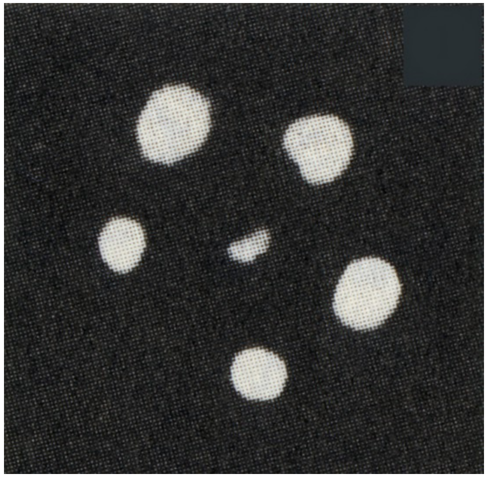


D. L. Bradley *et al*. Phys. Rev. Lett. **96**, 035301 (2-6)

超流動Heにおける量子渦の観測

- （第２）音波
- 振動ワイヤー
- NMRサブピーク

全渦糸長しか測れない

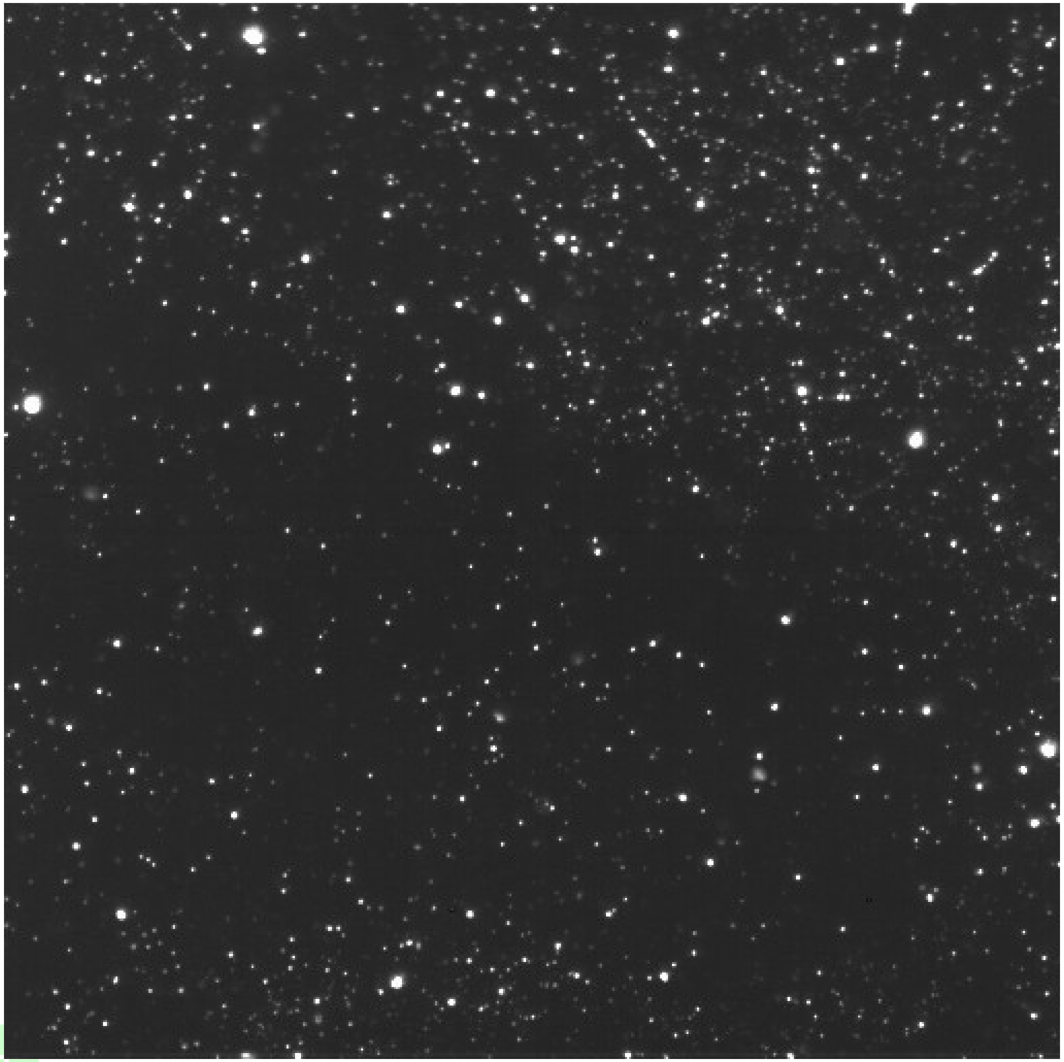


回転容器中における
量子渦格子の可視化

E. J. Yarmchuk and R. E. Packard,
J. Low Temp. Phys. **46**, 479 (1982).

基本的に超流動Heにおいて量子渦の空間分布を直接観測するのは非常に難しい

超流動Heにおける量子渦の観測

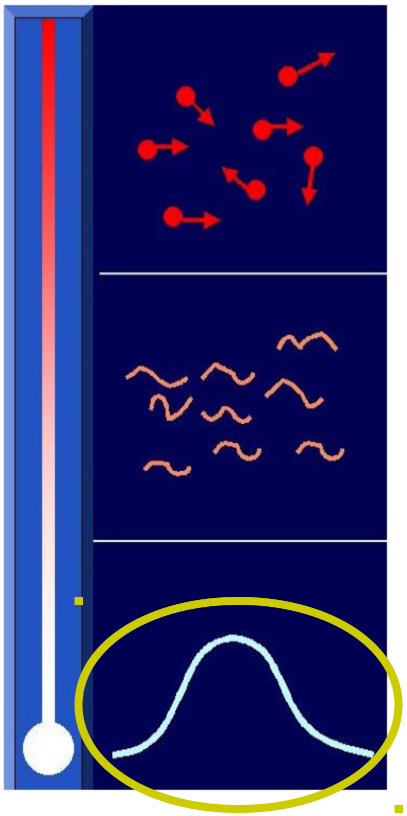


PIVを用いた乱流の素過程（渦の再結合）の観測

G. P. Bweley, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan, Nature **441**, 588(2006).

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮と量子渦研究

ボース・アインシュタイン凝縮：低温において
粒子の波動性が顕著に表れる現象



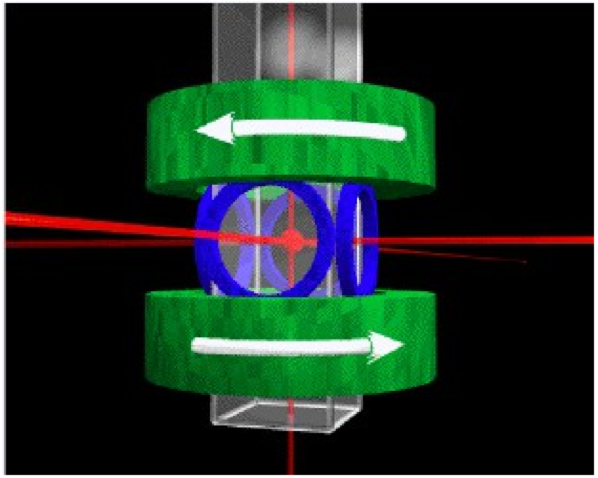
粒子の熱的ドブロイ波長 :$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{mk_{\mathrm{B}}T}}$

ボース凝縮転移 :$n\lambda^3 \sim 1$

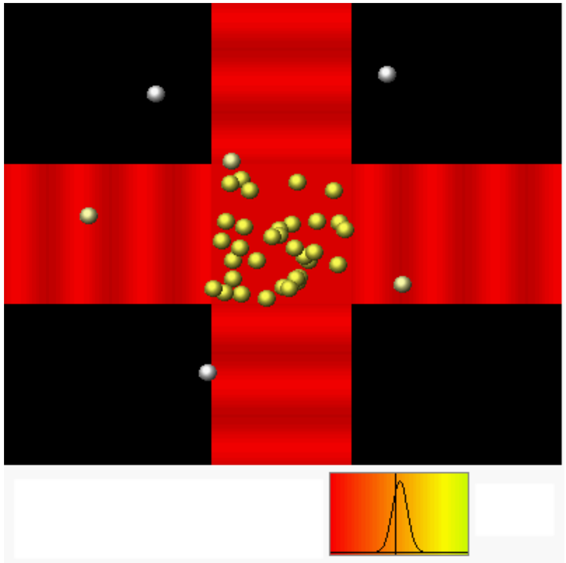
巨視的波動関数（秩序パラメータ）の形成

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮と量子渦研究

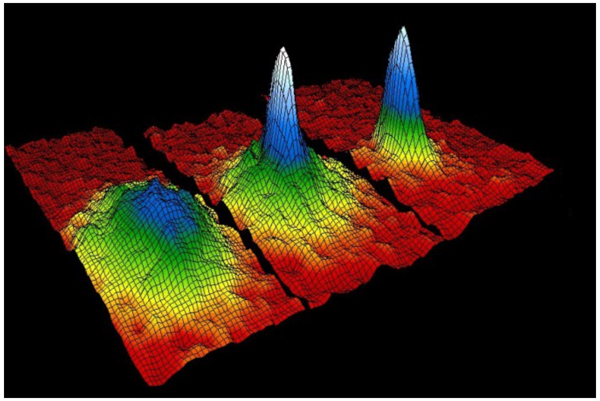
トラップされた原子気体

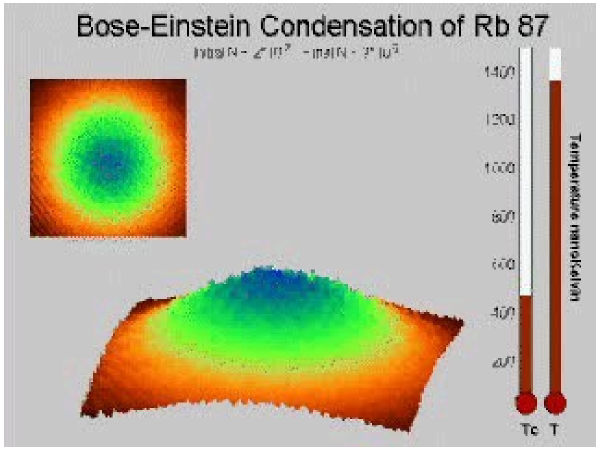


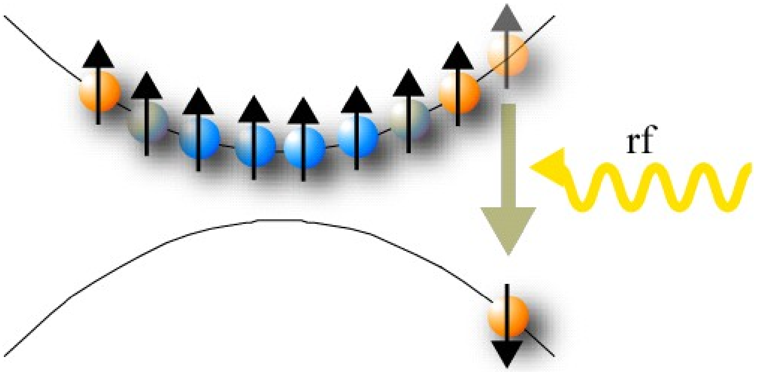
レーザー冷却



ボース凝縮



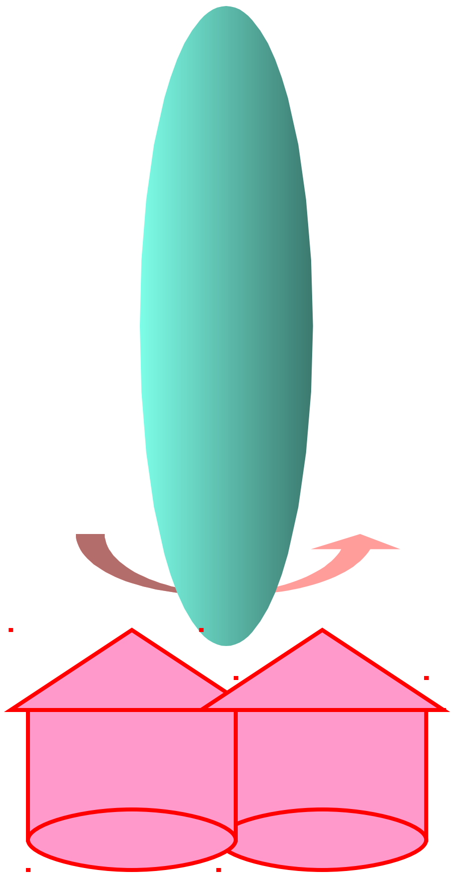




蒸発冷却

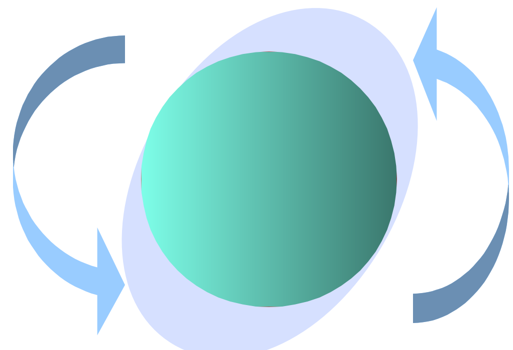
原子気体ボース凝縮における量子渦の観測

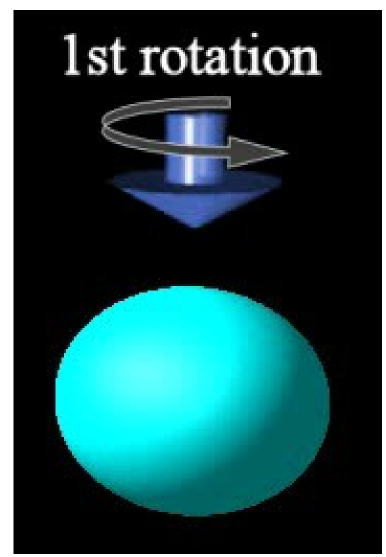
BECの回転



光学スプーン

異方性ポテンシャルの回転

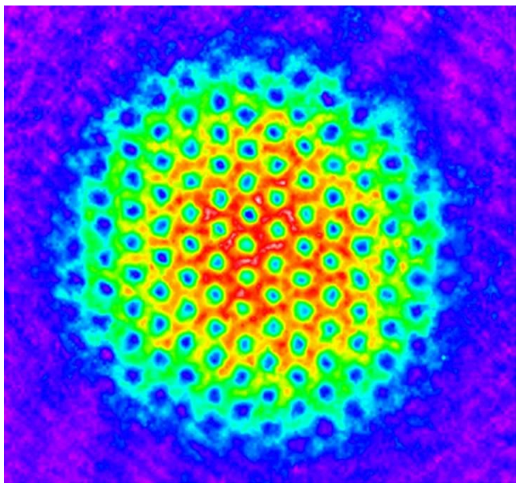




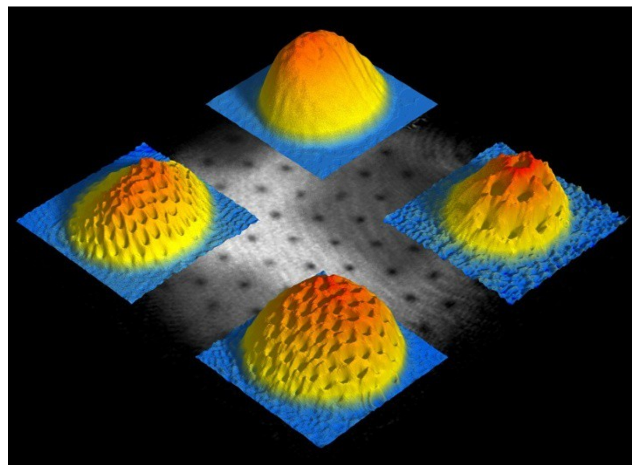
K.W.Madison et.al Phys.Rev Lett **84**, 806 (2000)

原子気体ボース凝縮における量子渦の観測

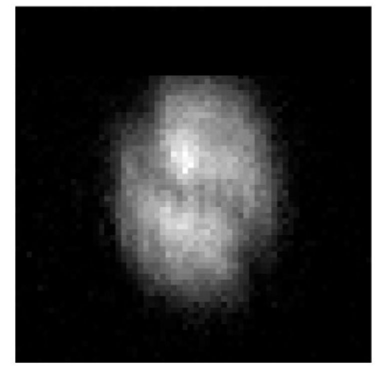
P. Engels, et.al
PRL **87**, 210403 (2001)



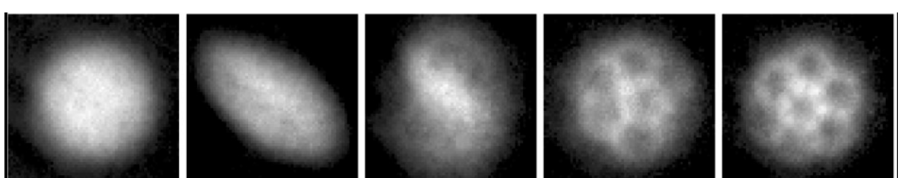
J.R. Abo-Shaeer, et.al
Science **292**, 476 (2001)



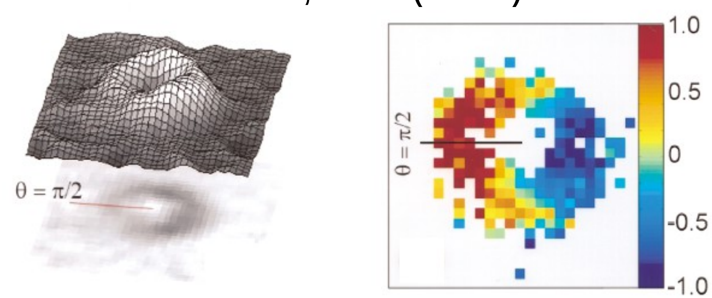
V. Bretin et al. PRL
90, 100403(2003)



K. W. Madison et al. PRL
86, 4443(2001)

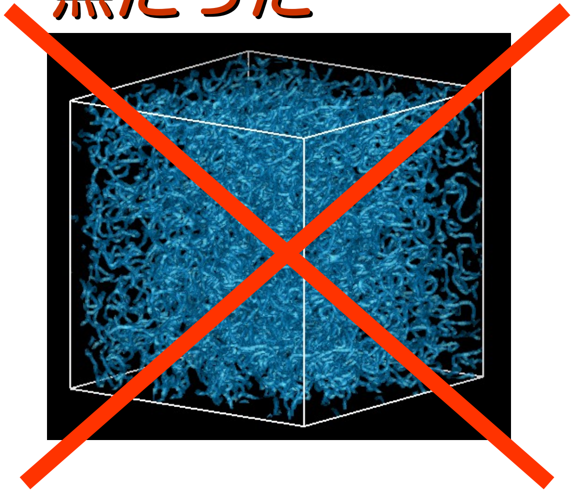


M. R. Matthews et al.
PRL **83**, 2498(1999)



原子気体ボース凝縮における量子乱流研究

今まで原子気体ボース凝縮を用いた量子乱流研究は皆無だった



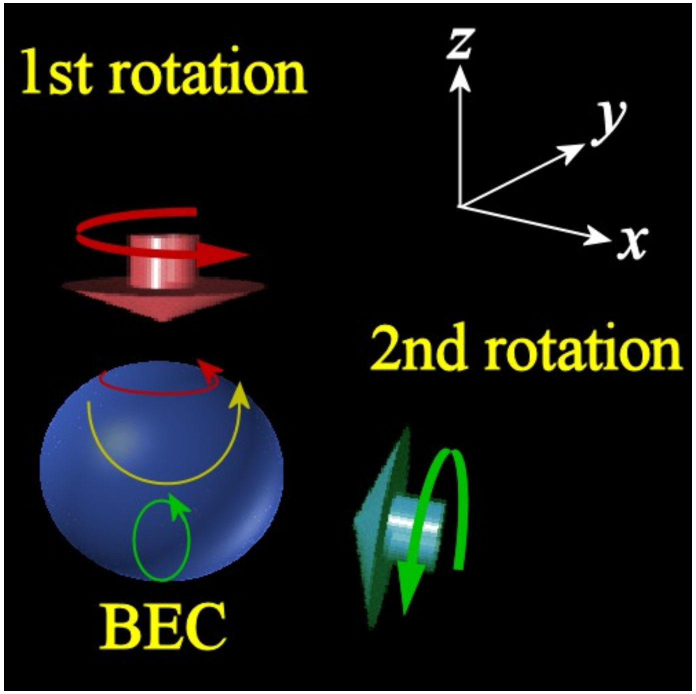
原子気体ボース凝縮の強み

- 粒子数、温度、粒子密度から、さらには粒子間相互作用までほとんど全ての物理量が可変であり、制御可能である
- 量子渦が「密度の穴」として直接「**見える**」

原子気体ボース凝縮は、量子乱流研究にふさわしい（制御された量子乱流を手に入れられる?）！

量子乱流の実現に向けて

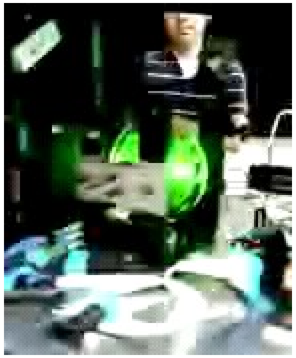
原子気体ボース凝縮では流れ場を印加することが困難→歳差回転を用いれば乱流ができるか？



•片方の回転がないとき、もう片方の単一な回転となる。

•２番目の回転が弱いとき、回転する渦格子状態が実現する。

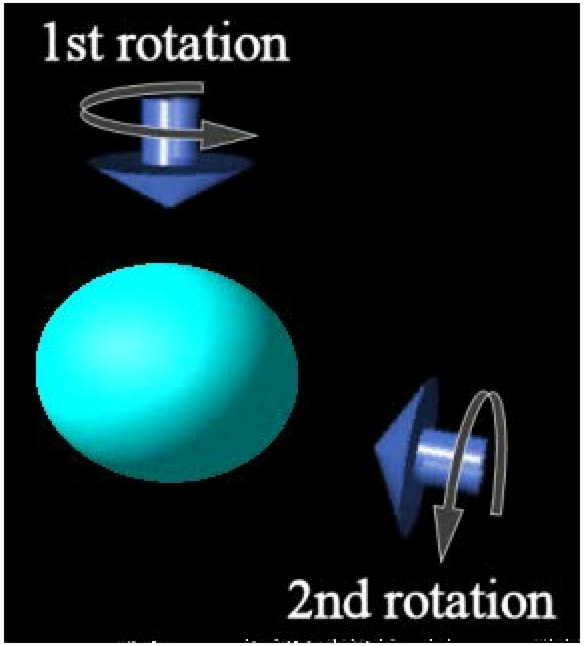
•２番目の回転が強いとき、回転する渦格子は不安定となり、乱流状態となる。



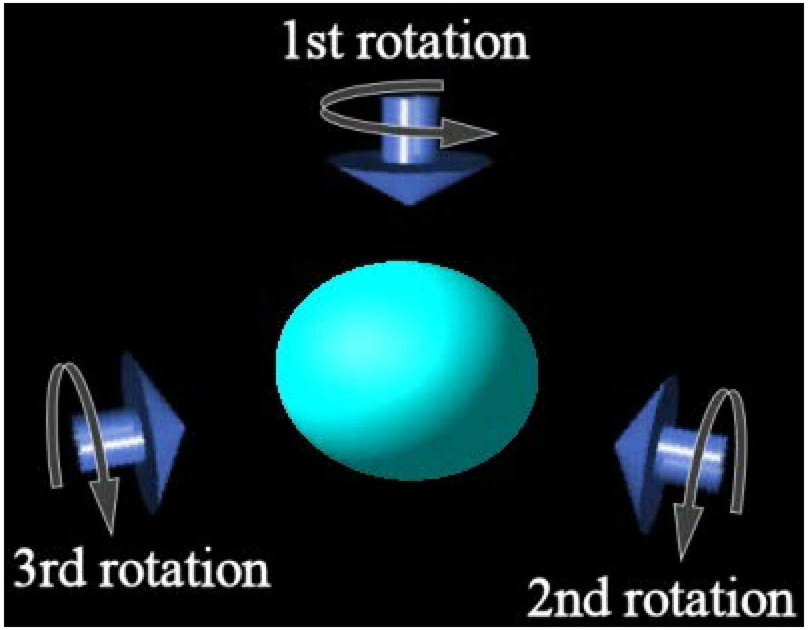
S. Goto, N. Ishii, S. Kida, and M. Nishioka Phys. Fluids **19**, 061705 (2007)

原子気体ボース凝縮への歳差回転印加

原子気体ボース凝縮の場合、実験系を回転させる必要がない



歳差回転を与える異方的トラップ（光学スプーン）の運動

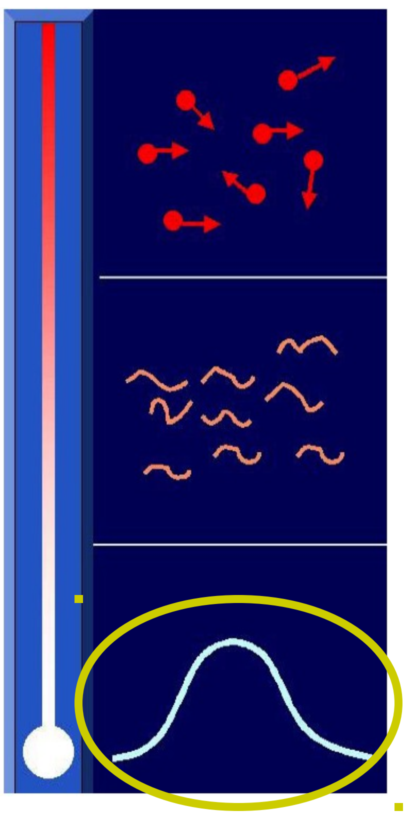


３軸回転すら可能（乱流はより等方的に！）

Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション

Gross-Piteavskii方程式（非線形Schrödinger方程式）

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu+U(\boldsymbol{x})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2-\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$



$U(\boldsymbol{x})$: 磁気トラップポテンシャル

a : 粒子の s 波散乱長

$\boldsymbol{\Omega}(t)$: 回転角速度

$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})$: 角運動量演算子

$\gamma(x)$: 素励起との相互作用による散逸項

巨視的波動関数の運動を記述する方程式

Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション

Gross-Piteavskii方程式（非線形Schrödinger方程式）

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu+U(\boldsymbol{x})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2-\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$

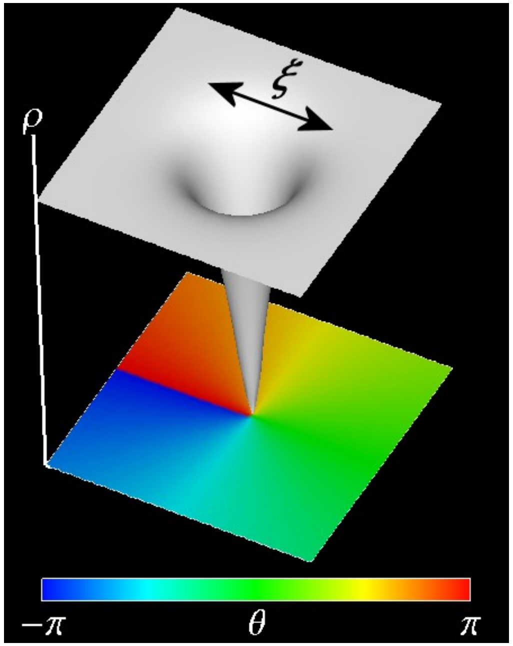
$$\Phi(\boldsymbol{x})=|\Phi(\boldsymbol{x})|\exp[\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})]$$

$\rho(\boldsymbol{x})=|\Phi(\boldsymbol{x})|^2$：流体の密度

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=(\hbar/m)\nabla\theta(\boldsymbol{x})$

：流体の速度場

$\xi=1/\sqrt{8\pi a\bar{\rho}}$：回復長

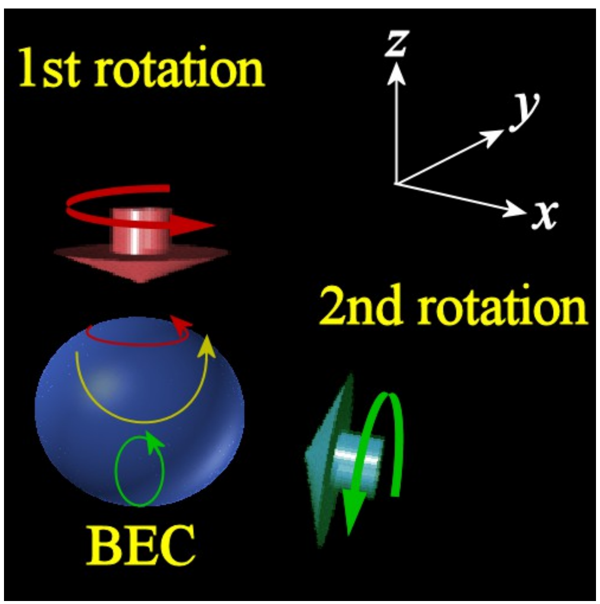


量子渦

Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション

Gross-Piteavskii方程式（非線形Schrödinger方程式）

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + U(\boldsymbol{x}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2 - \boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$



歳差回転

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = (\Omega_x, \Omega_z \sin\Omega_x t, \Omega_z \cos\Omega_x t)$$

Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション

Gross-Piteavskii方程式（非線形Schrödinger方程式）

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu+U(\boldsymbol{x})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2-\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$

異方的な磁気トラップポテンシャル

$$U(\boldsymbol{x})=\frac{m\omega^2}{2}[(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)x^2+(1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2)y^2+(1+\epsilon_2)z^2]$$

Gross-Pitaevskii方程式を用いたシミュレーション

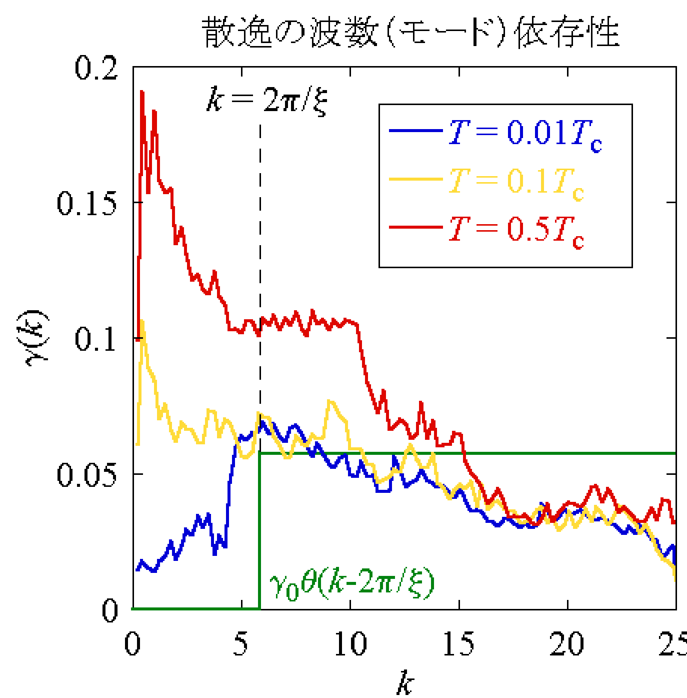
Gross-Piteavskii方程式（非線形Schrödinger方程式）

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu+U(\boldsymbol{x})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2-\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$

素励起との相互作用による
減衰項

$$\gamma(k)=\gamma_0\theta(k-2\pi/\xi_0)$$

：渦芯よりも短いスケールのみで有効



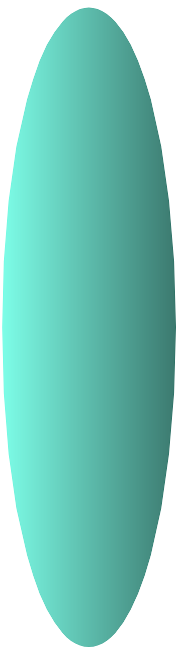
去年の研究集会または、MK & MT, PRL. **97**, 145301 (2006)

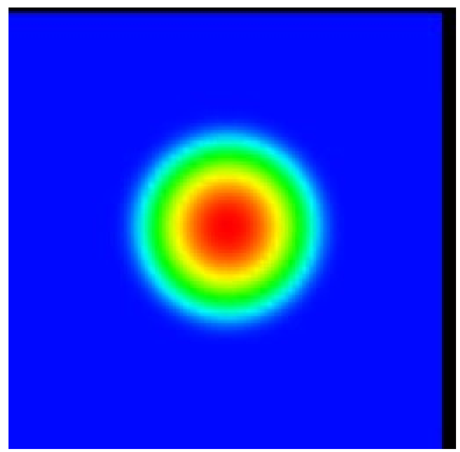
数値シミュレーション：渦格子形成

^{87}Rb atoms : $m = 1.46 \times 10^{-25}$ kg, $a = 5.61$ nm

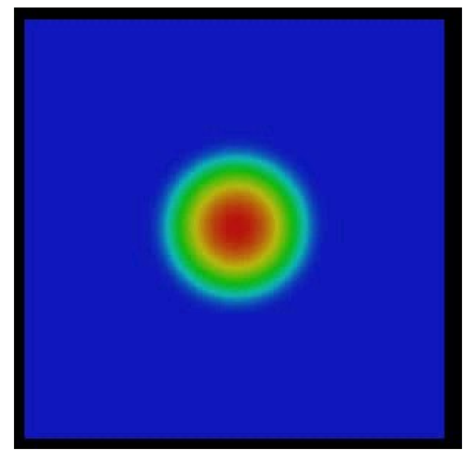
$N = 2.50 \times 10^5$, $\epsilon_1 = 0.05$

$\omega_x = \omega_y = 120 \times 2\pi$ Hz, $\omega_z = 20 \times 2\pi$ Hz

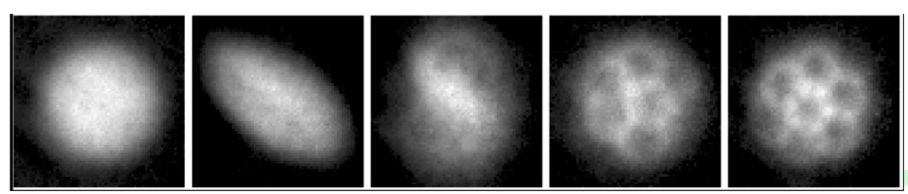




$\Omega = 0.75\ \omega_x$



$\Omega = 0.9\ \omega_x$



細長いBECに対して２次元解析を行う

数値シミュレーション：量子乱流

^{87}Rb atoms : $m = 1.46 \times 10^{-25}$ kg, $a = 5.61$ nm

$N = 2.50 \times 10^5$, $\omega = 150 \times 2\pi$ Hz

$\Omega_z = \Omega_x = 0.6\omega$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.025$

数値計算法： 空間：チェビシェフスペクトル法

格子点数：512^3, 計算空間：$V = 14.0^3$ μm

境界条件：ディリクレ境界条件

タウ法で処理

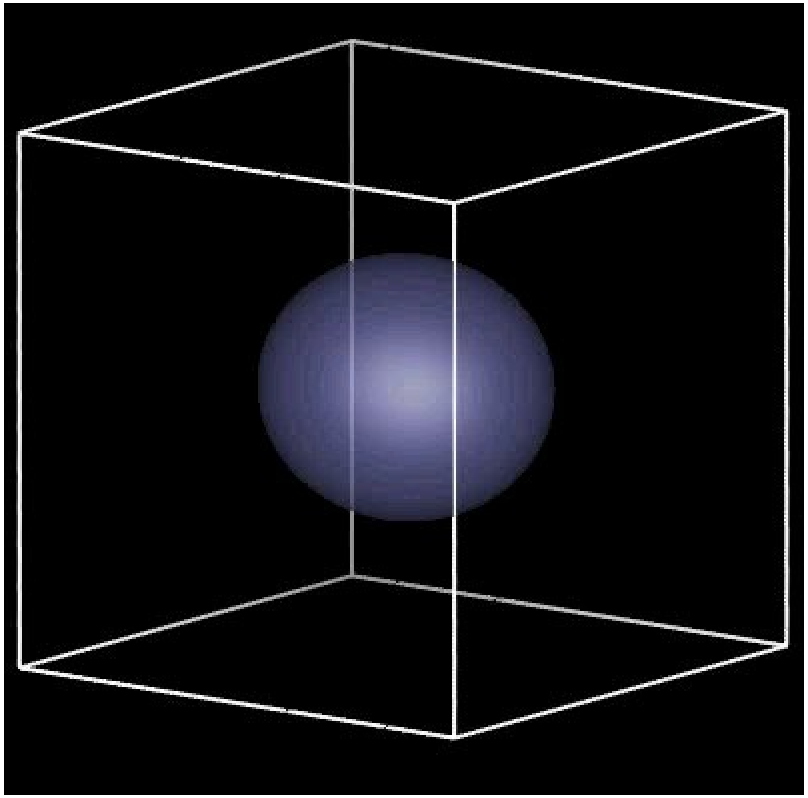
時間： 4 次精度のルンゲークッタ法 $\Delta t = 10^{-4}\omega$

初期条件：回転、異方性がない時の厳密解

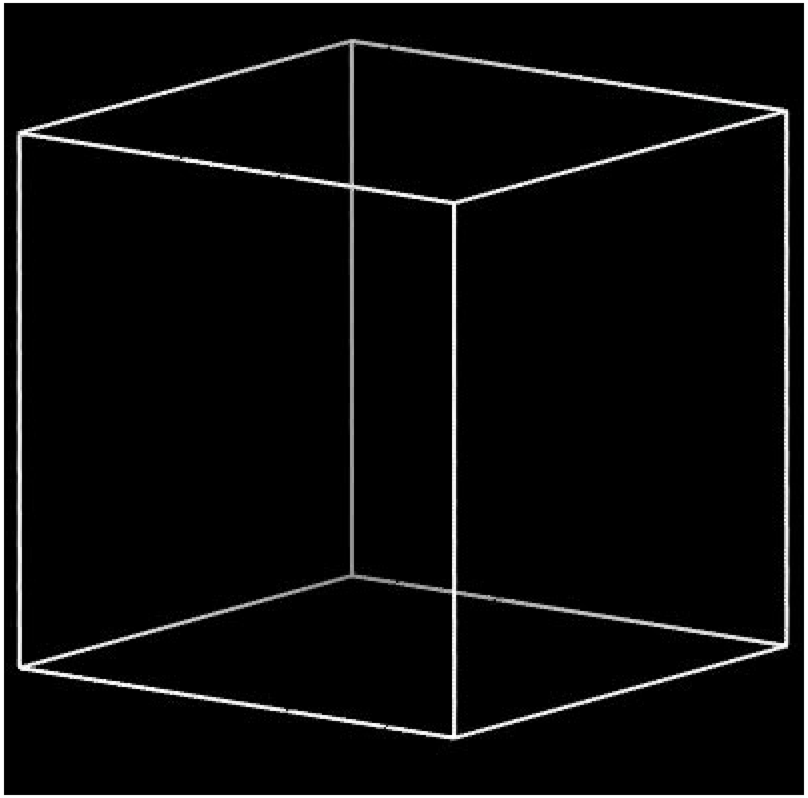
エネルギースペクトルの計算： 3 次双スプライン補間

計算結果

密度

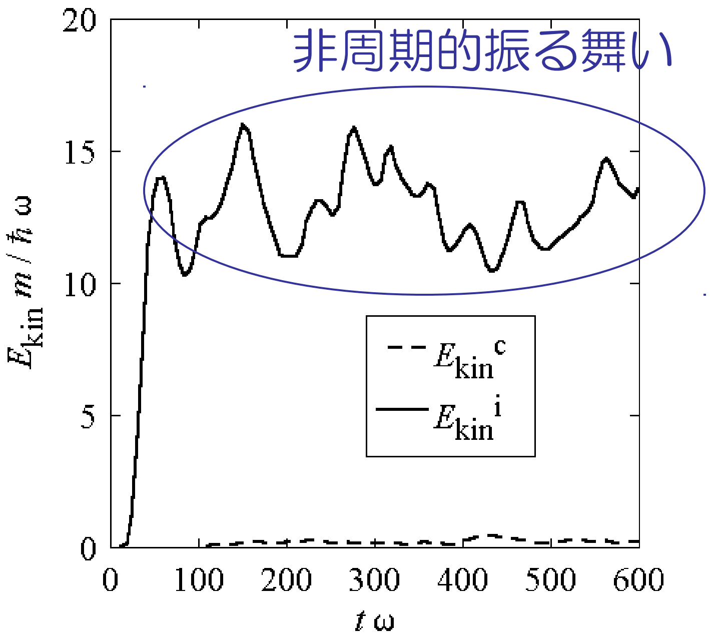


BEC中の渦

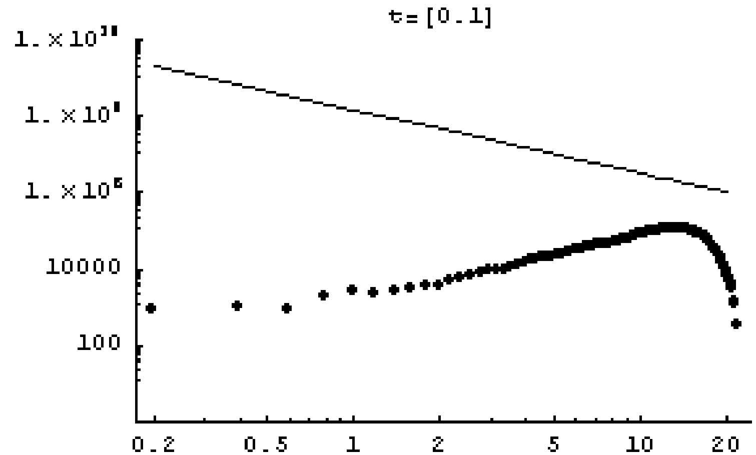


量子渦が格子を組まずに乱流状態となる

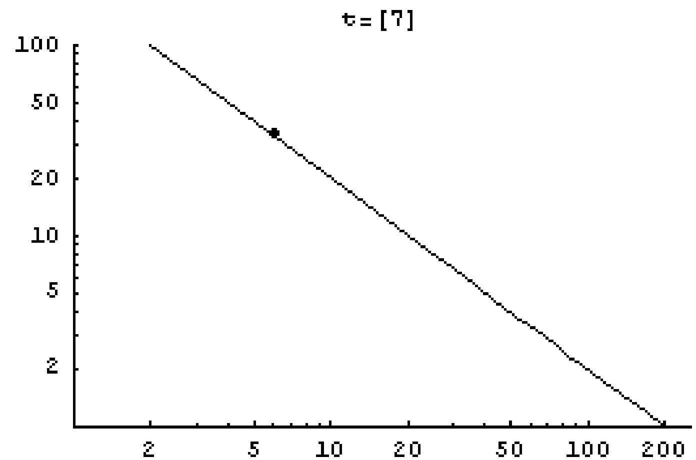
計算結果



エネルギースペクトル



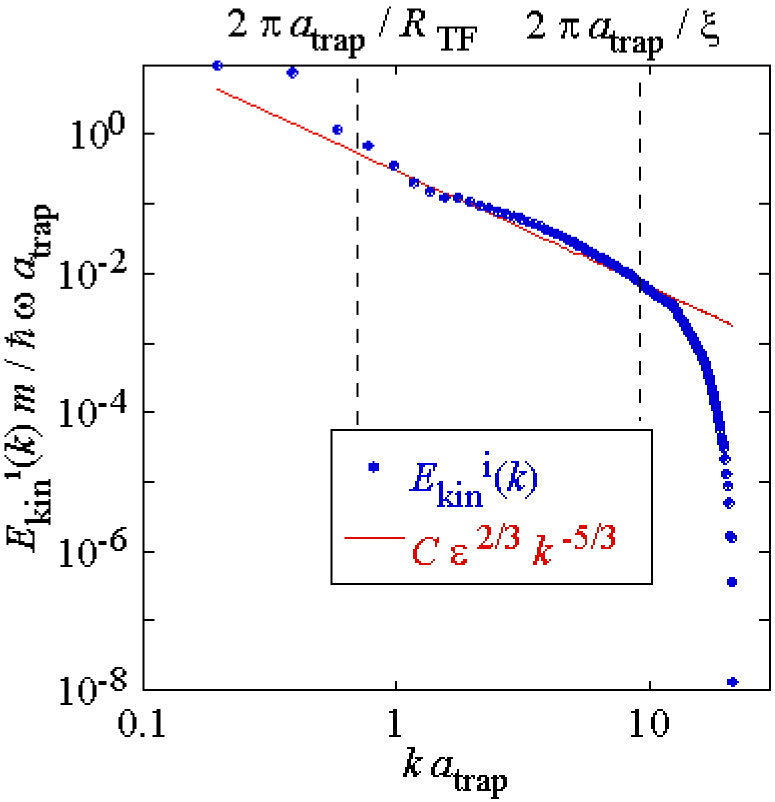
渦の長さ分布



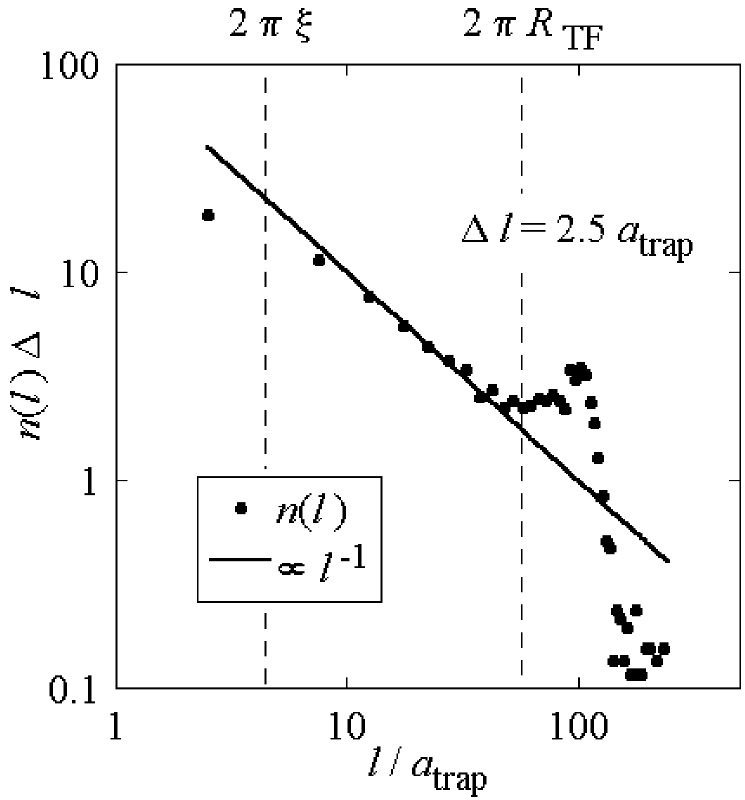
計算結果

２０アンサンブル平均

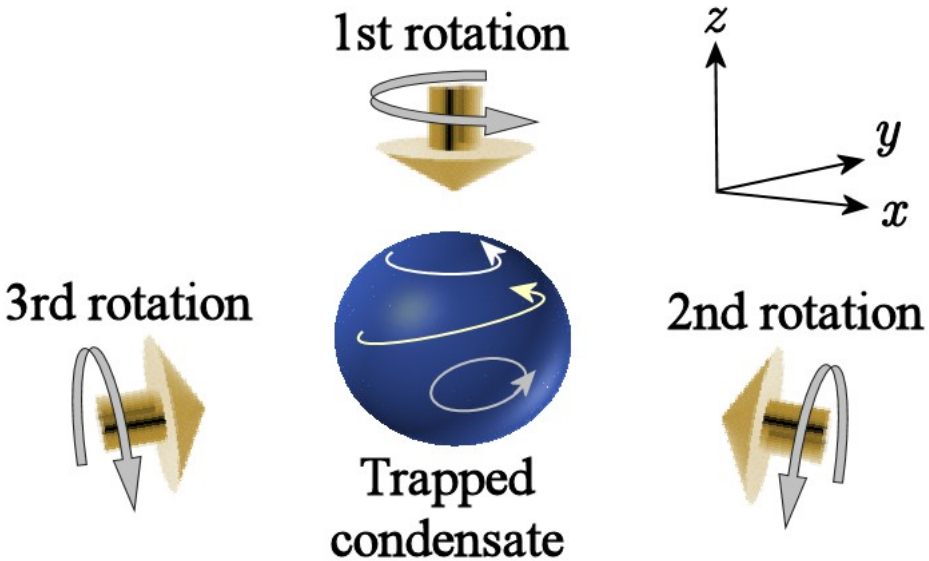
エネルギースペクトル

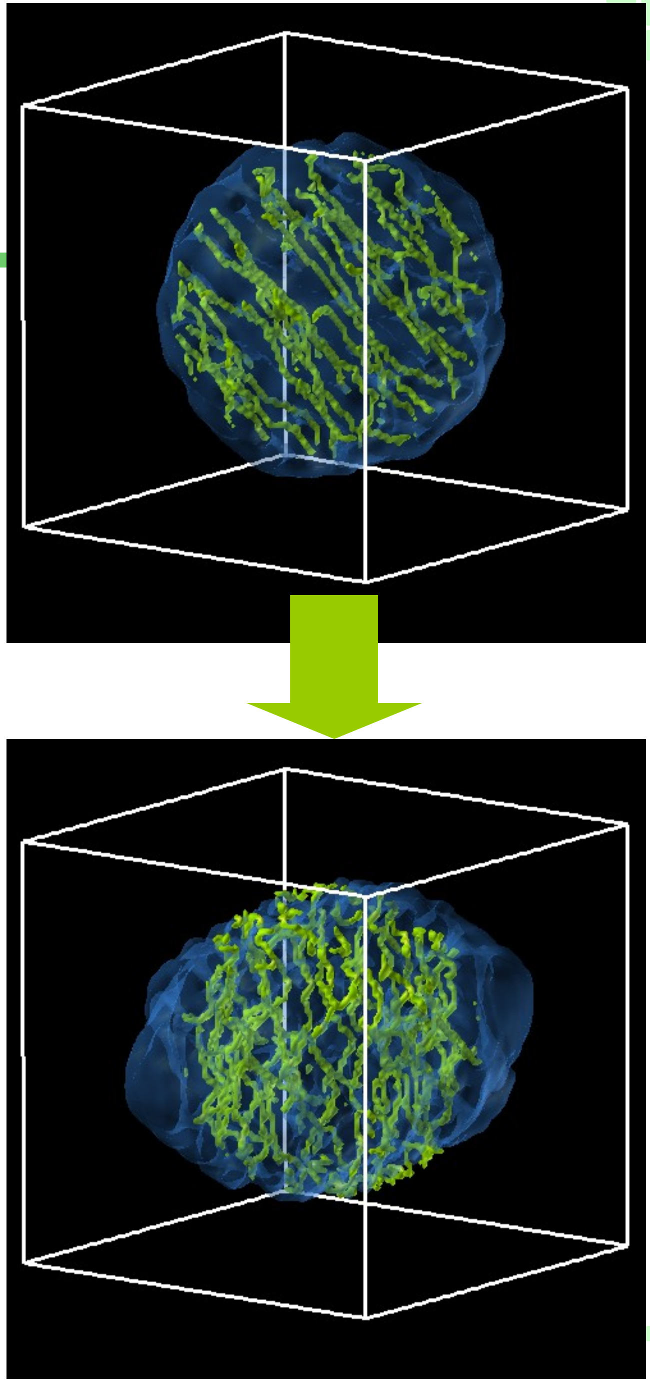


渦の長さ分布



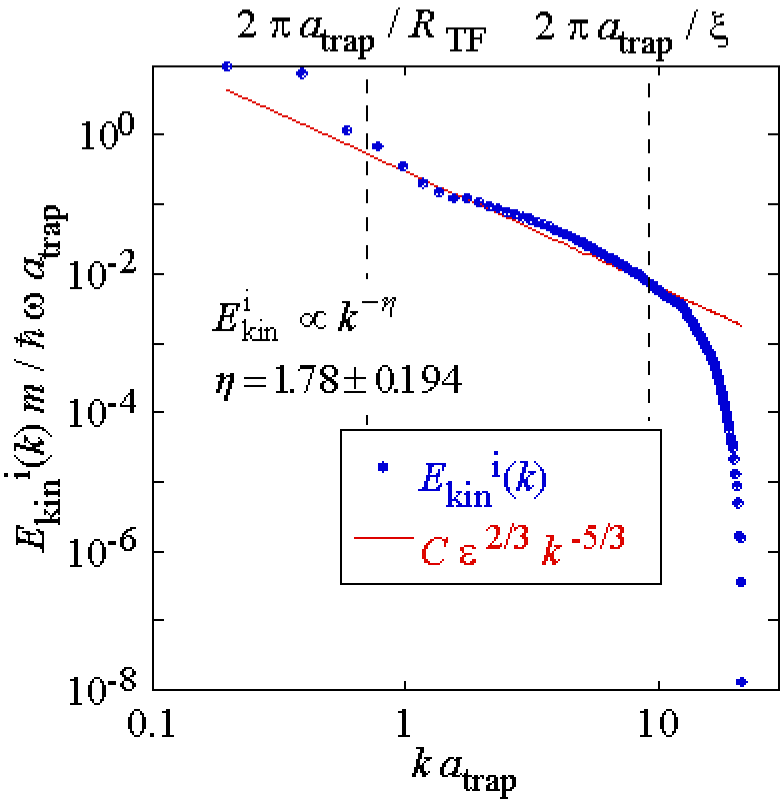
３軸回転

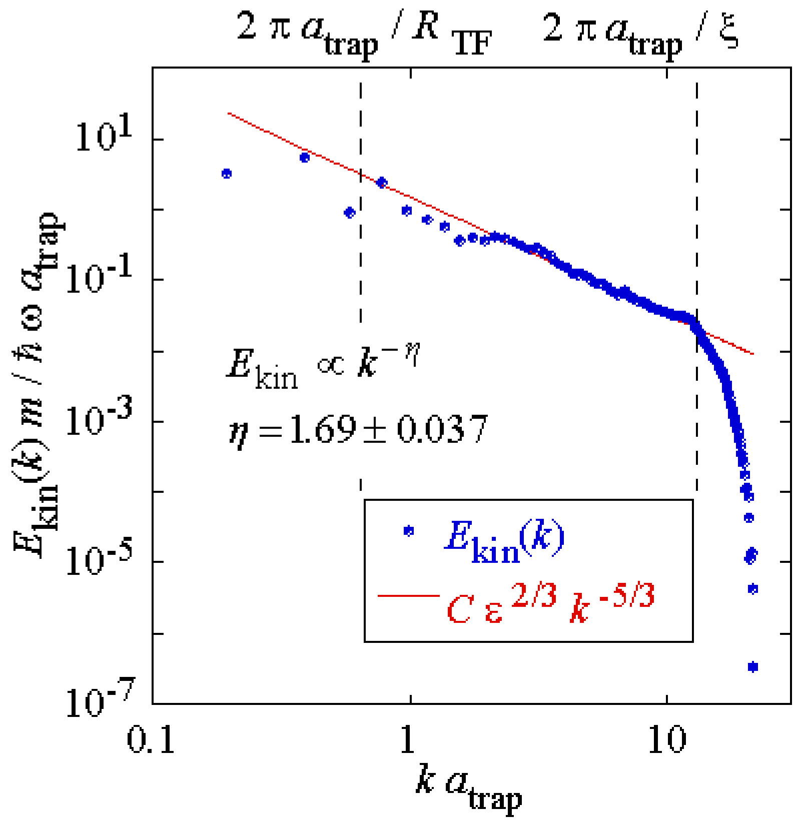




量子渦のタングル状態が
より等方的となっている

３軸回転





Kolmogorov則との一致は良くなっている

まとめ

- 原子気体ボース凝縮体は、量子乱流を研究するための良い系となりうる。
- 原子気体ボース凝縮体において量子乱流を実現するために、歳差回転を用いることができる。
- 原子気体ボース凝縮体において実現された量子乱流は、やはり通常乱流との類似性を示している。