原子気体ボース凝縮体で実現する量子乱流

大阪市立大理　坪田誠、小林未知数

９月２１日・日本物理学会２００７年年次大会 21pRG-2

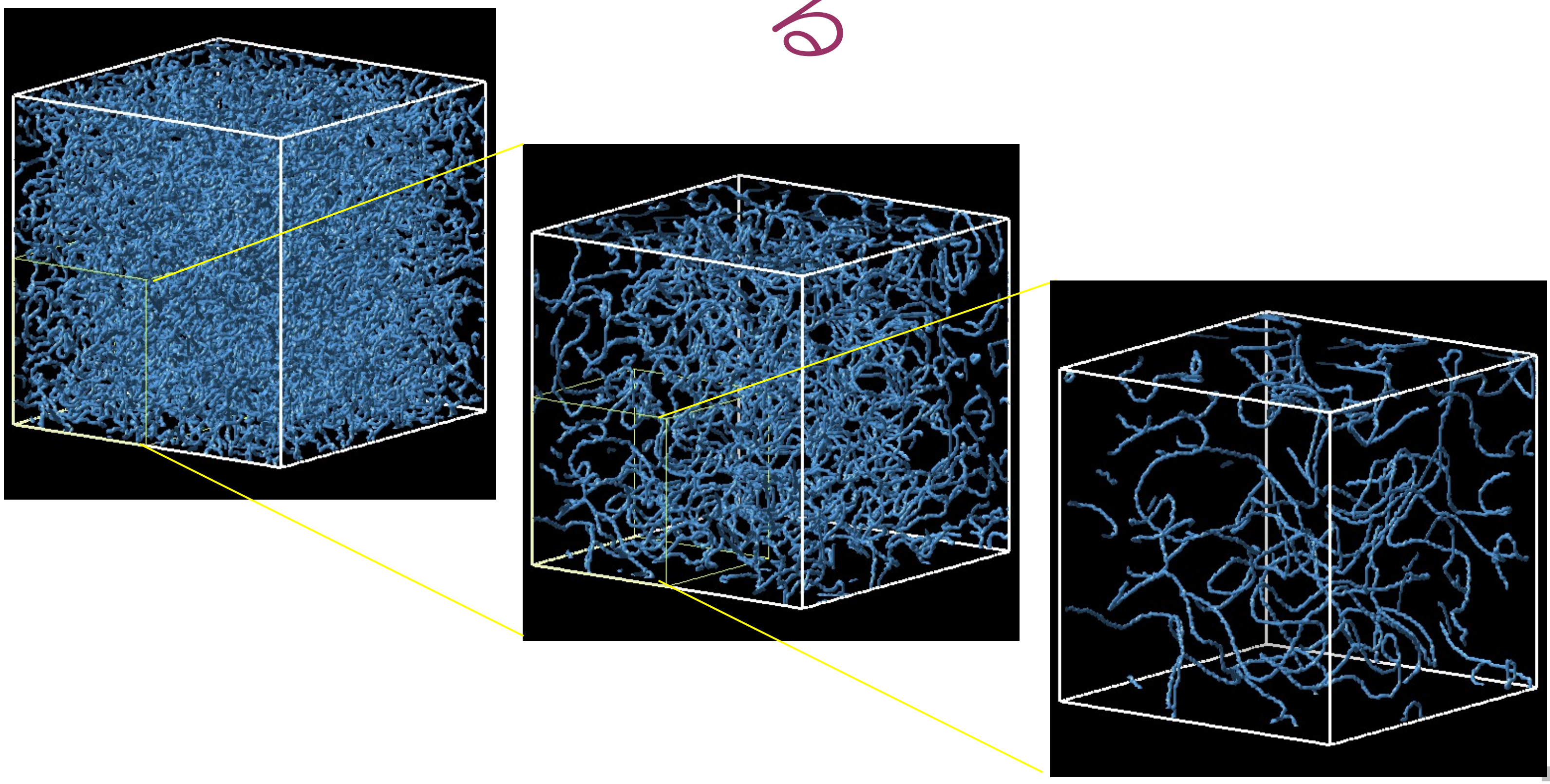
素励起物理学研究室
Elementary Excitation Physics Laboratory
（物性理論研究室）

発表内容

1. 量子乱流のイントロダクション
2. 原子気体ボース凝縮体における量子乱流
3. Gross-Pitaevskii方程式のシミュレーション
4. 数値計算結果
5. まとめ

量子乱流のイントロダクション

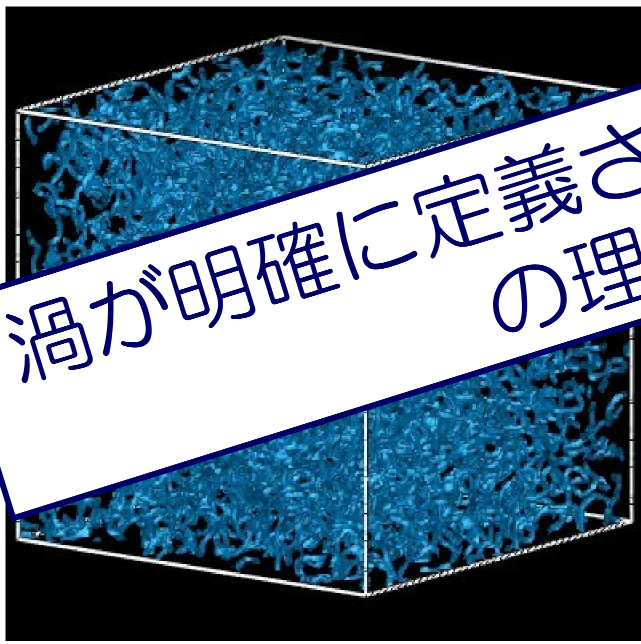
量子乱流は量子渦の（自己相似的な）タングル状態によって実現される



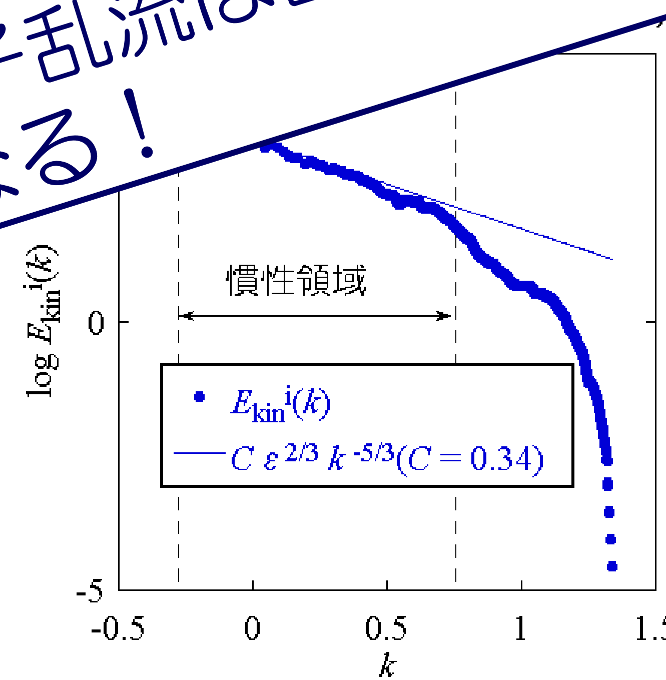
Gross-Pitaevskii方程式を用いた量子乱流のシミュレーション

量子乱流のエネルギースペクトルは古典乱
流におけるKolmogorov則を示し

渦が明確に定義される量子乱流は乱流研究
の理想型になる！



乱流中の渦運動



M. Kobayashi and M. Tsubota, PRL **94**, 065302 (2005) M. Kobayashi and M. Tsubota, JPSJ **74**, 3248 (2005)

超流動He中の量子渦

量子渦の観測

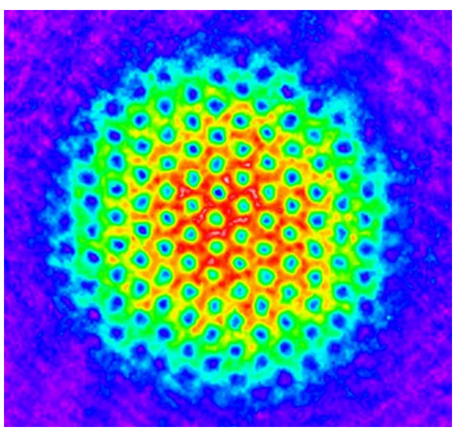
・ 第２音波

イヤ

は

渦の密度だけ

超流動Heにおいて量子渦の空間分布を観測するのは非常に難しい



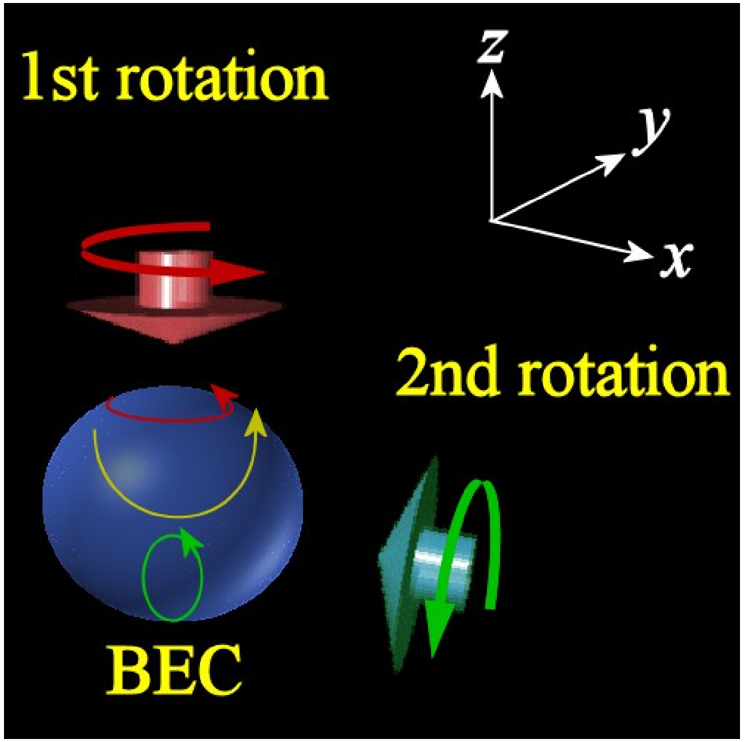
原子気体における渦格子

原子気体ボース凝縮体では渦が直接見えるため、渦の空間分布が観測可能である

→量子乱流研究の格好の系なのでは？（しかし現状では全く研究されていない）

２（または３）軸回転を用いた原子気体量子乱流の提案

２軸回転（歳差回転）下におけるボース凝縮体



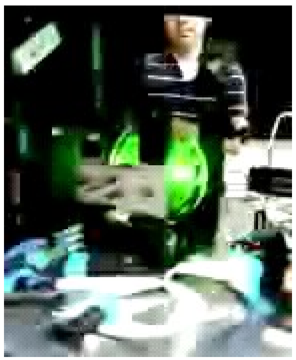
回転の特徴

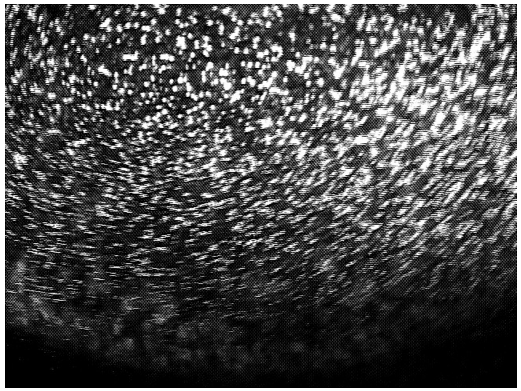
•お互いの回転は非可換（斜め軸周りの単一回転ではない）

•片方の回転を止めるともう片方の単一回転になる

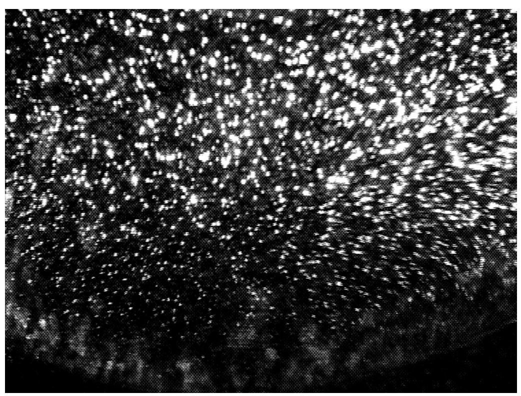
•第１回転によって渦格子ができ、第２回転を大きくしてゆくと、やがて渦格子を保てなくなり、乱流へ転移する

古典流体（水）ではすでに実現されている





第２回転弱い

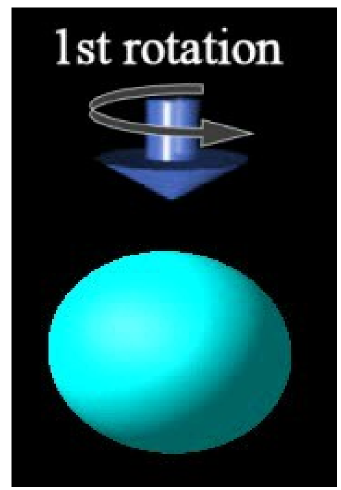


第２回転強い

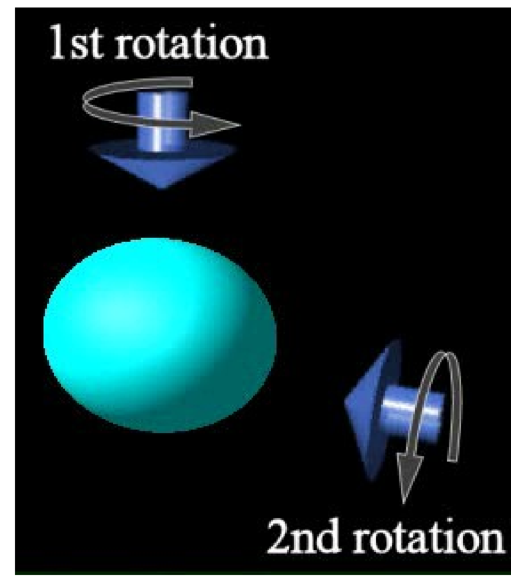
乱流が効率よく生成される！

S. Goto, N. Ishii, S. Kida, and M. Nishioka
Phys. Fluids 19, 061705 (2007)

原子気体ボース凝縮では磁気トラップの異方性を回転させることで２軸回転が実現される。



単一回転



２軸回転

Gross-Pitaevskii方程式のシミュレーション

$$\hbar[\mathrm{i}-\gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu+U(\boldsymbol{x})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2-\boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})\right]\Phi(x)$$

$U(\boldsymbol{x})$: 磁気トラップポテンシャル

a : s 波散乱長

$\boldsymbol{\Omega}(t)$: 回転角振動数

$L(\boldsymbol{x})$: 角運動量演算子

２軸回転

$$\boldsymbol{\Omega}(t)=(\Omega_x,\Omega_z\sin\Omega_x t,\Omega_z\cos\Omega_x t)$$

調和振動子型磁気トラップ（弱異方性）

$$U(\boldsymbol{x})=\frac{m\omega^2}{2}[(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)x^2+(1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2)y^2+(1+\epsilon_2)z^2]$$

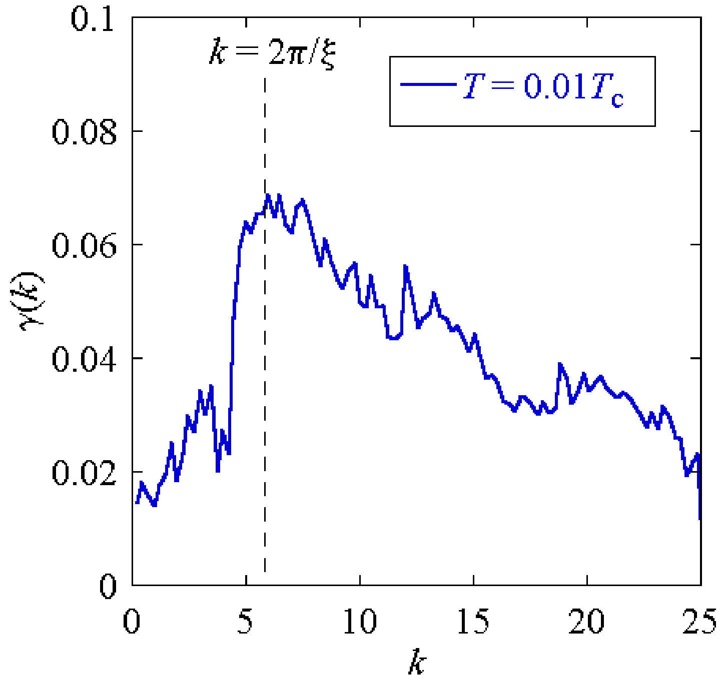
Gross-Pitaevskii方程式のシミュレーション

$$\hbar[\mathrm{i} - \gamma(x)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + U(\boldsymbol{x}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Phi(x)|^2 - \boldsymbol{\Omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) \right]\Phi(x)$$

MK & MT, PRL. **97**, 145301 (2006)

Gross-Pitaevskii & Bogoliubov- de Gennes方程式を用いた乱流中での素励起への散逸の計算

散逸の波数（モード）依存性



計算パラメータ

^{87}Rb 原子：　$m = 1.46 \times 10^{-25}$ kg, $a = 5.61$ nm

を用いる　$N = 2.50 \times 10^{5}$, $\omega = 150 \times 2\pi$ Hz

$\Omega_z = 0.7\omega, \Omega_x = 0.06\omega,\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.025$

計算法：　空間：チェビシェフ擬スペクトル法

512^3 格子点数、計算空間 $V = 14.0^3\ \mu$m

境界条件：ディリクレ境界条件を課したタウ法

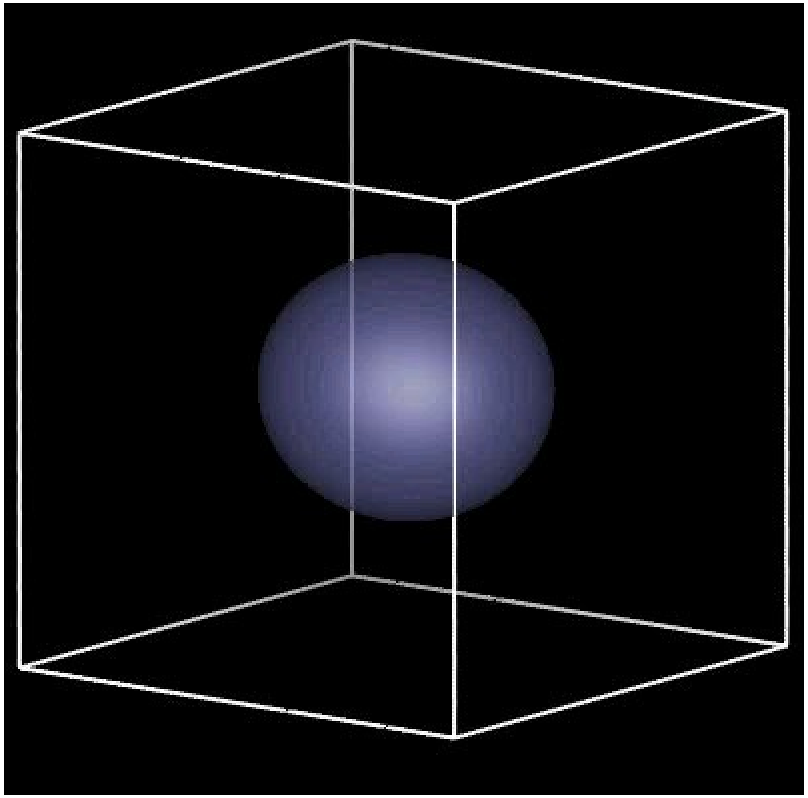
空間：4 次のルンゲクッタ法（$\omega\Delta t = 10^{-4}$）

初期条件：回転・異方性無しの定常解

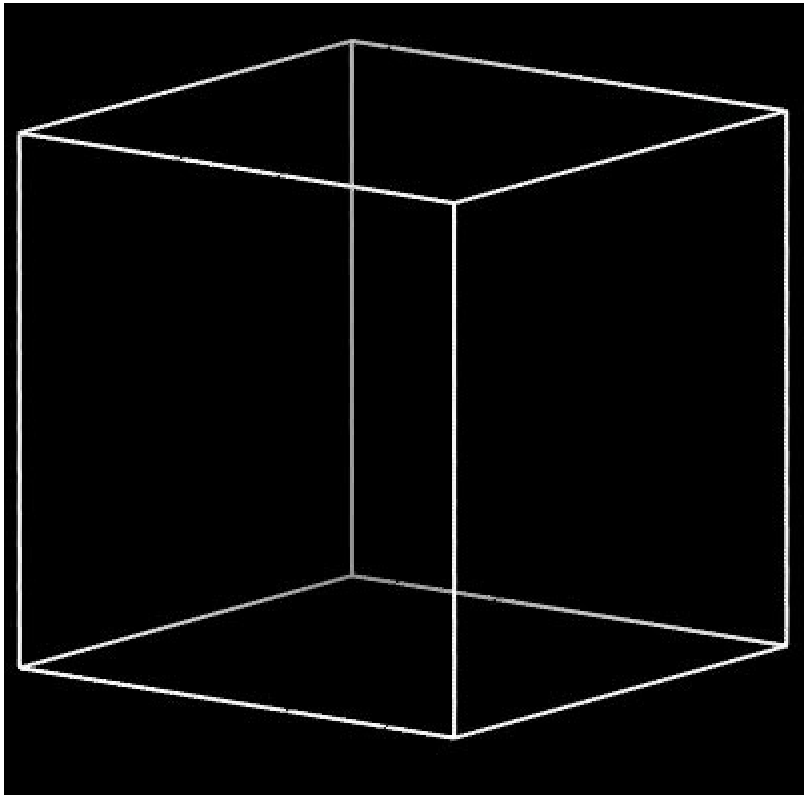
エネルギースペクトルの計算：3 次スプライン補間

計算結果

密度の等値面



Thomas-Fermi半径内の渦



渦が格子を組まずにタングル状態となる

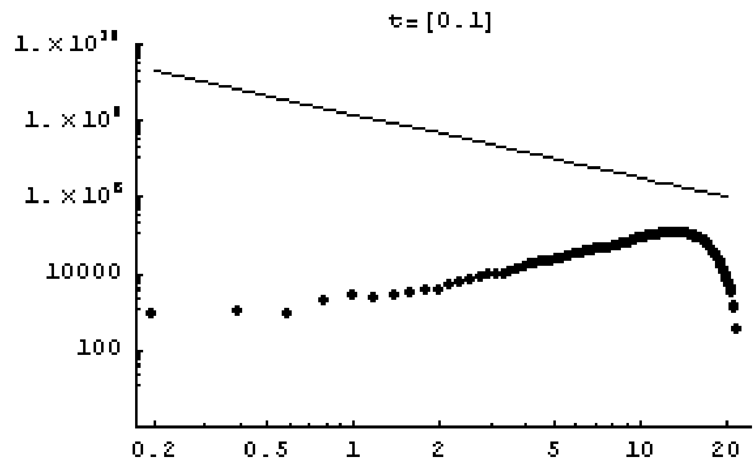
計算結果

エネルギースペクトル

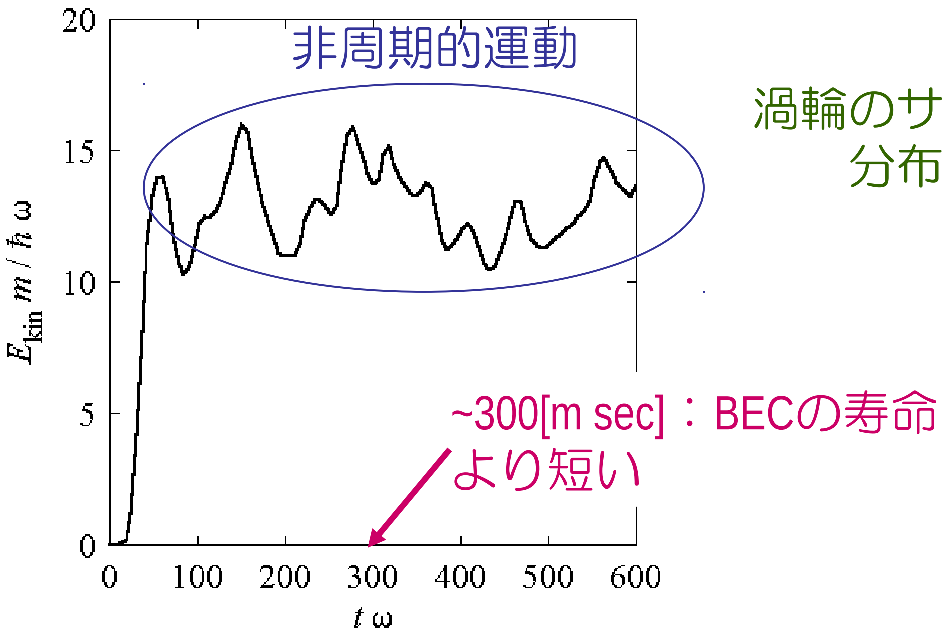
$$E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ [\{|\Phi(\boldsymbol{x})|\nabla\theta(\boldsymbol{x})\}^{\mathrm{i}}]^2$$

$$\mathrm{div}\{|\Phi(\boldsymbol{x})|\nabla\theta(\boldsymbol{x})\}^{\mathrm{i}} = 0$$

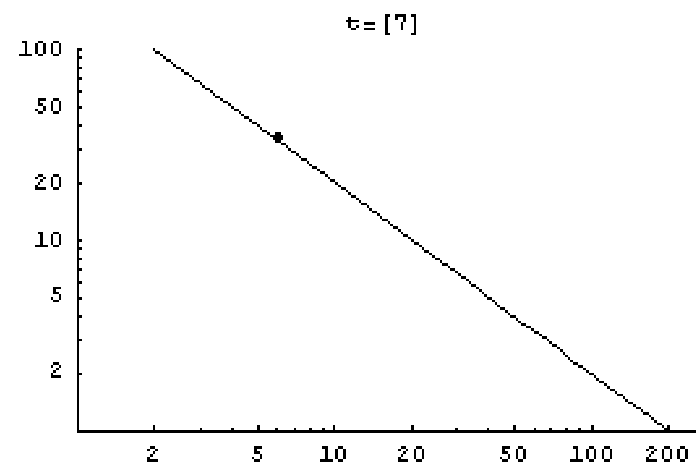
E_{kin} の非圧縮成分（渦の運動エネルギー）



量子渦の運動エネルギー

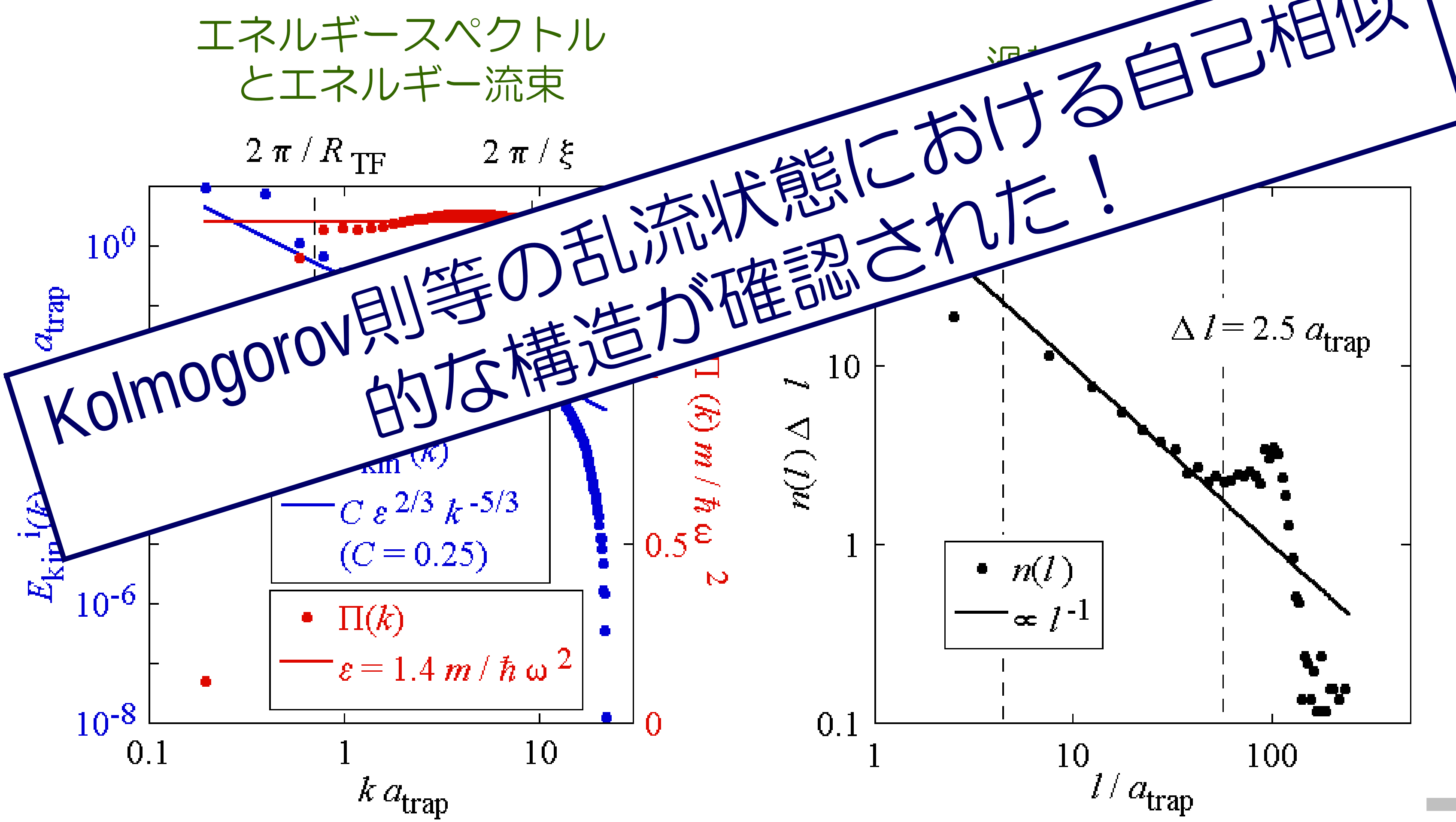


渦輪のサイズ分布



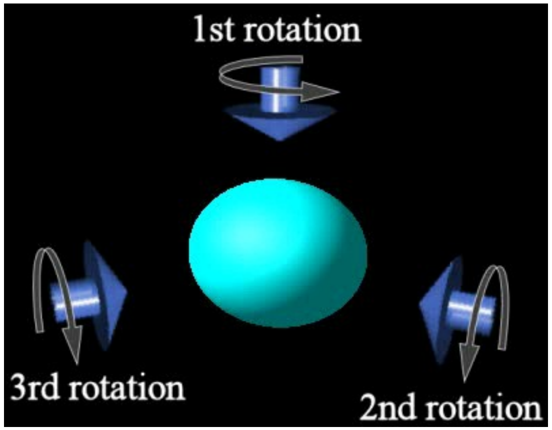
計算結果

乱流状態におけるアンサンブル平均



Kolmogorov則等の乱流状態における自己相似的な構造が確認された！

３軸回転：より等方的な乱流を目指して‥

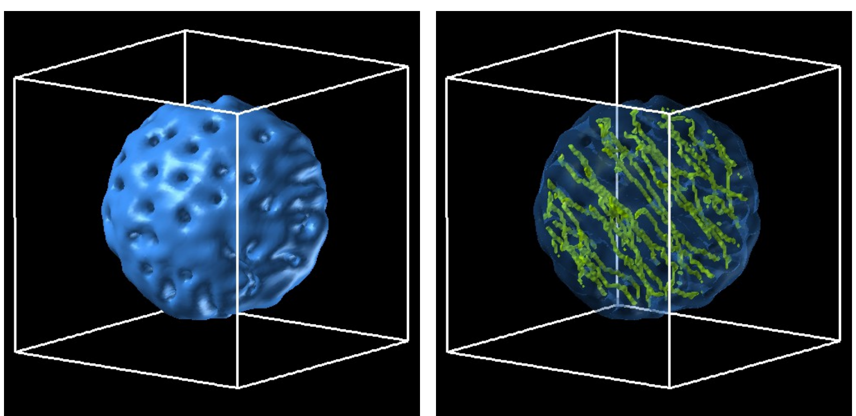


２軸回転では１つの軸回りの異方性が残ってしまう

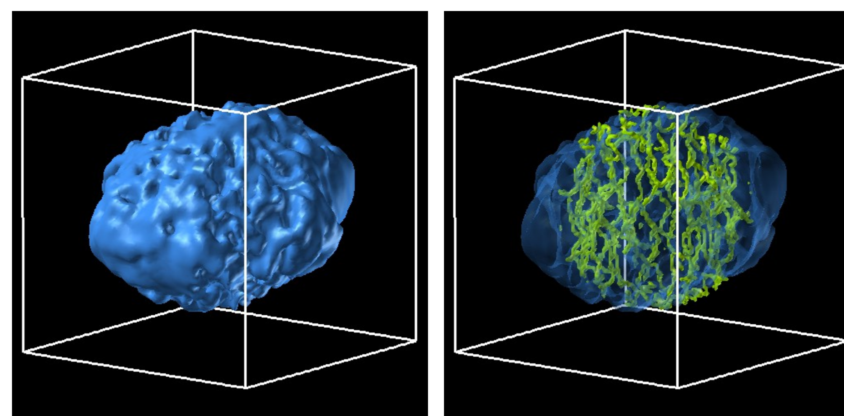
３軸回転の導入

$$\mathbf{\Omega}(t) = (\omega_x \cos\omega_y t + \omega_z \cos\omega_x t \sin\omega_y t, \omega_y + \omega_z \sin\omega_x t, \omega_x \sin\omega_y t + \omega_z \cos\omega_x t \cos\omega_y t)$$

２軸回転乱流



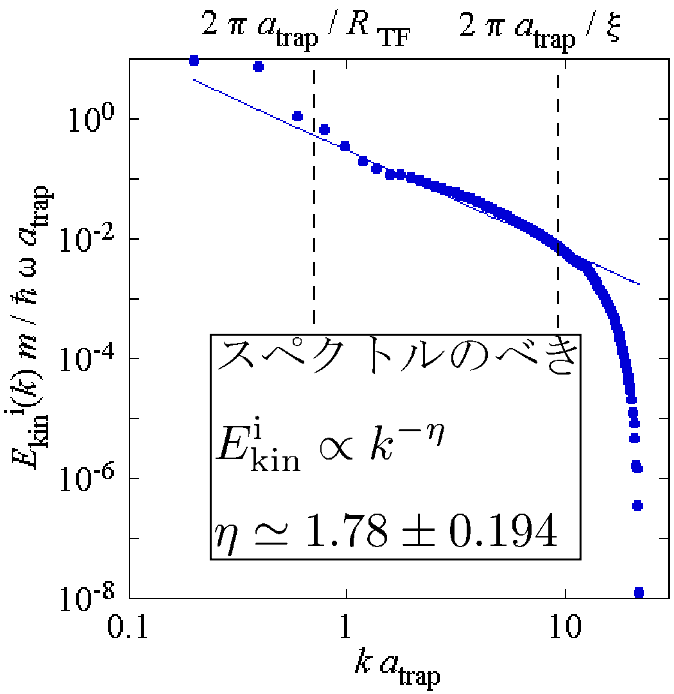
３軸回転乱流



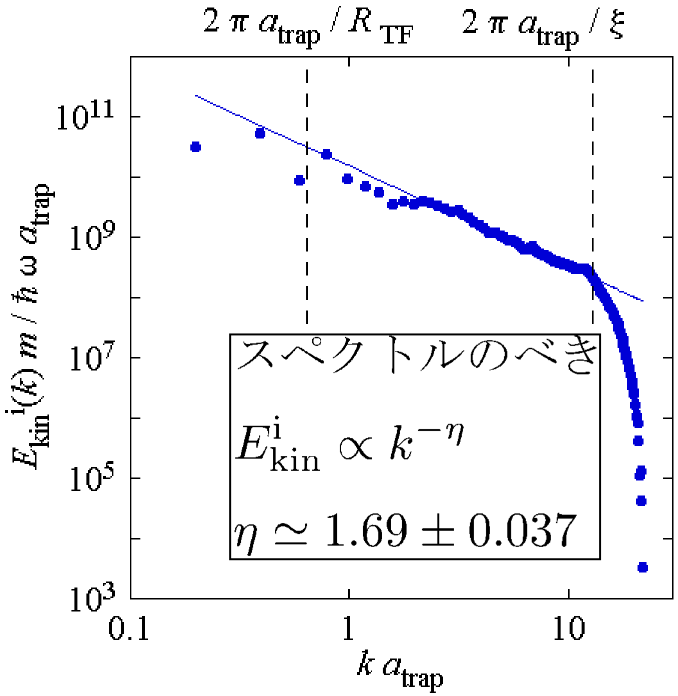
乱流の異方性１

エネルギースペクトル

２軸回転



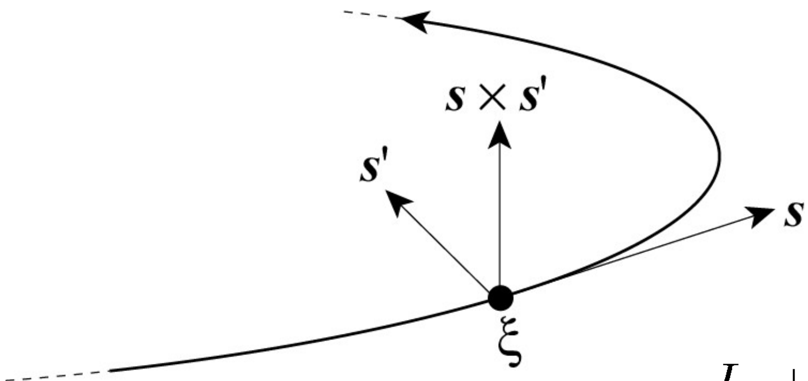
３軸回転



３軸回転において、より等方的な結果($\eta = 1.67$)に近づいている（２軸回転では、より２次元的な乱流に近い）。

乱流の異方性２

渦の異方性パラメータ



$$\boxed{(I_x, I_y, I_z) \equiv \frac{1}{L}\left(\int \mathrm{d}\xi\, [\boldsymbol{s}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}]^2, \int \mathrm{d}\xi\, [\boldsymbol{s}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}]^2, \int \mathrm{d}\xi\, [\boldsymbol{s}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}]^2\right)}$$

$$I_x + I_y + I_z = 1 \quad \begin{cases} I_x + I_y + I_z = 1/3 : \text{完全に等方} \\ \text{どれかが } 1 : \text{完全に異方} \end{cases}$$

２軸回転：$(I_x, I_y, I_z) = (0.353, 0.276, 0.371)$ → y軸の異方性が残っている

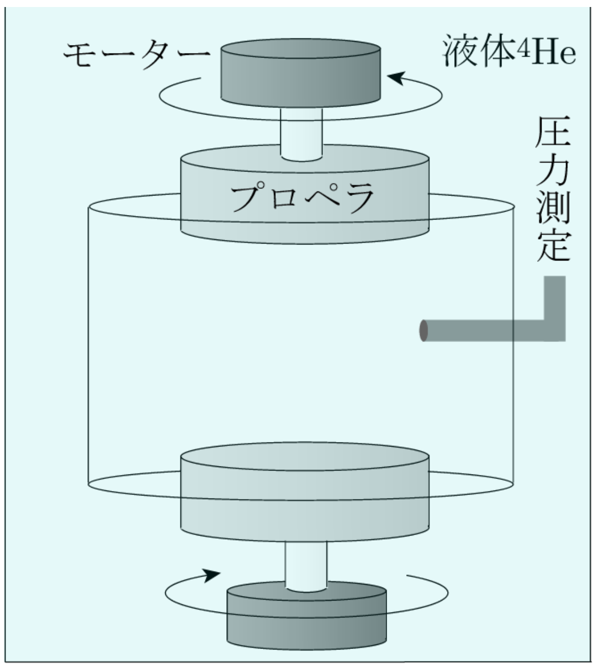
３軸回転：$(I_x, I_y, I_z) = (0.326, 0.327, 0.347)$ → 等方に近い

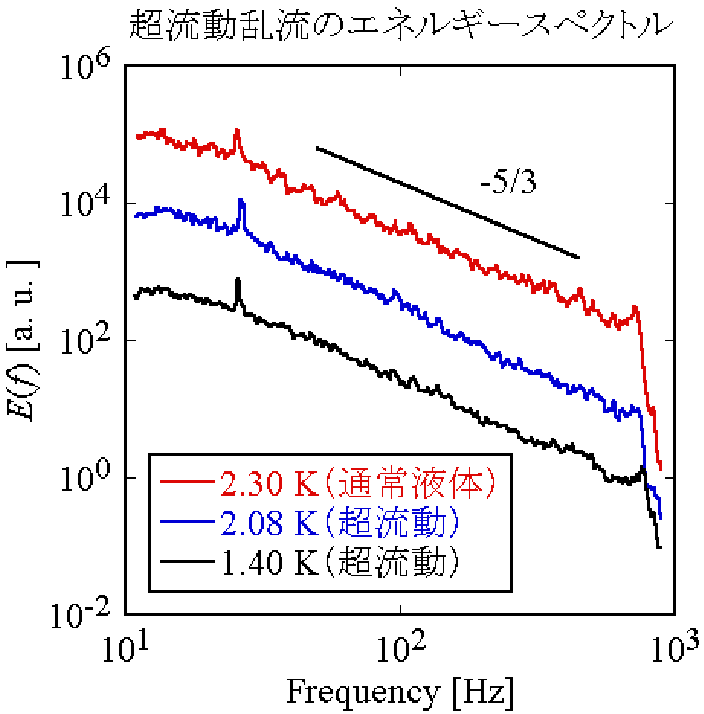
まとめ

- 原子気体ボース凝縮体は量子乱流を研究するための１つの候補となりうる。
- ２（３）軸回転を用いることによって、原子気体ボース凝縮体の量子乱流状態が実現されうる。
- 原子気体ボース凝縮体で実現された量子乱流もまた、古典乱流との類似性を持っている（異なる性質も持っている→例：ケルビン波乱流のカスケード）。
- （今後の課題として）新しいダイナミカルな量子相転移現象としての量子渦格子ー量子乱流転移の研究。

超流動Heにおける量子乱流

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

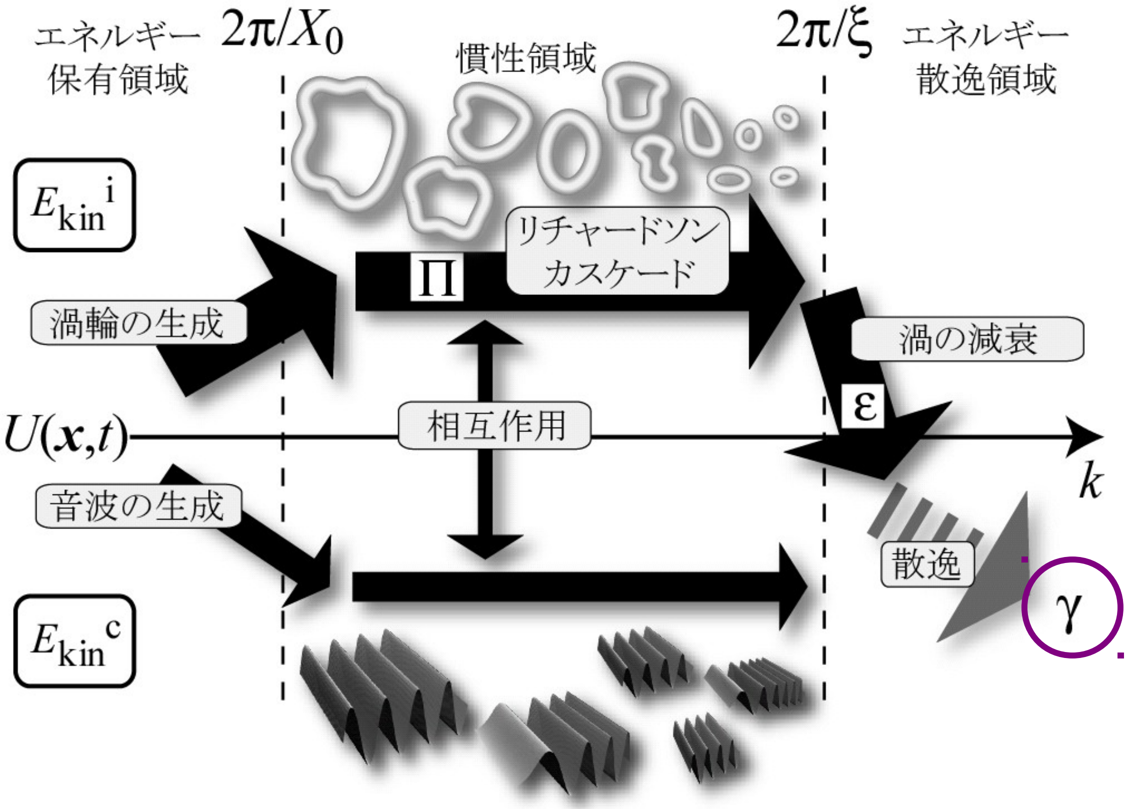


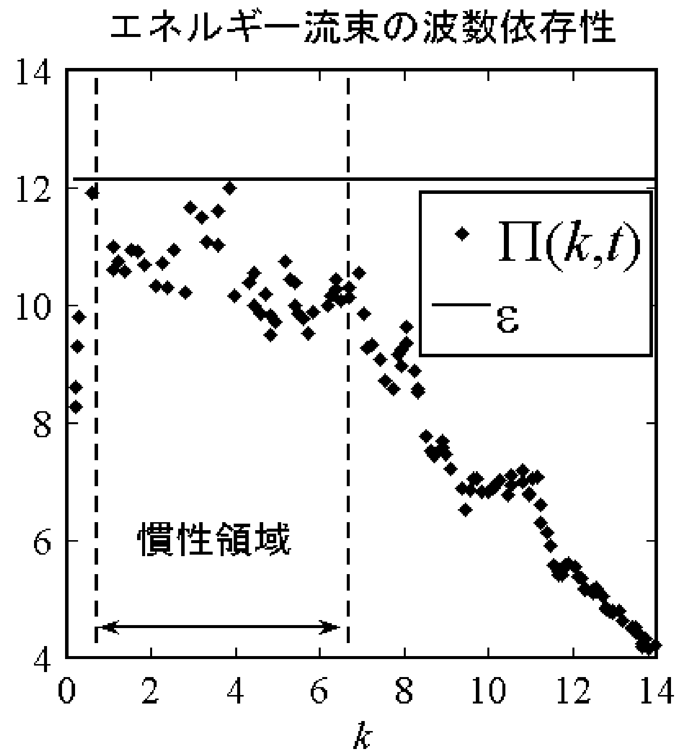


超流動Heにおける実験においても量子乱流と
古典乱流の類似性は観測されている

超流動乱流における散逸構造

超流動乱流中には（渦芯よりも小さなスケールで）散逸が存在する





M. Kobayashi and M. Tsubota, PRL **94**, 065302 (2005) M. Kobayashi and M. Tsubota, JPSJ **74**, 3248 (2005)

２， Gross-Pitaevskii & Bogoliubov-de Gennes 方程式によるシミュレーション

ボース場のハミルトニアンとその時間発展

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \Big[-\nabla^2 - \mu + \frac{g}{2} |\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})|^2 \Big] |\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)] \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$$

$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})$: ボース場の演算子

μ : 化学ポテンシャル

g : 相互作用の結合定数

１次揺らぎまで残した平均場近似

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)=[-\nabla^2-\mu+g\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)]\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)$$

$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)=\Phi(\boldsymbol{x},t)+\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t)+\hat{\zeta}(\boldsymbol{x},t)$ ：ボース場

$\Phi(\boldsymbol{x},t)=O(\sqrt{N_0})$ ：BEC の巨視的波動関数（平均場）

$\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t)=O(1)$ ：BEC の１次揺らぎ

$\hat{\zeta}(\boldsymbol{x},t)=O(1/\sqrt{N_0})$ ：高次揺らぎ（無視）

GP方程式とBdG方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=[-\nabla^2-\mu+g(|\Phi|^2+2\langle\hat{\chi}^\dagger\hat{\chi}\rangle)]\Phi+g\langle\hat{\chi}\hat{\chi}\rangle\Phi^* \ \text{：GP}$$

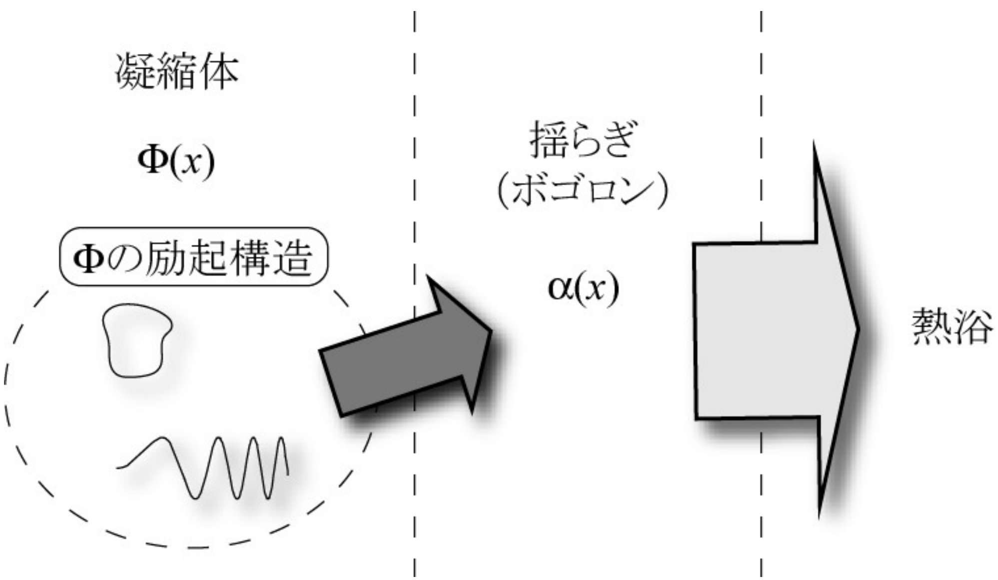
$$\mathrm{i}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial t}=[-\nabla^2-\mu+2g|\Phi|^2]\hat{\chi}+g\Phi^2\chi^\dagger \ \text{：BdG}$$

局所平衡近似

$$\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_j \phi_j(\boldsymbol{x},t)\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_j [u_j(\boldsymbol{x},t)\hat{\alpha}_j + v_j^*(\boldsymbol{x},t)\hat{\alpha}_j^\dagger]$$

$$\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = N_j = \frac{1}{\exp[E_j/T]-1}$$

局所平衡近似



：素励起（ボゴロン）は熱浴と結合し、エネルギーは熱浴へ散逸する

計算方法

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2n_\mathrm{e})]\Phi + gm_\mathrm{e}\Phi^*$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial u_j}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]u_j - g\Phi^2 v_j = A_j$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial v_j}{\partial t} = -[-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]v_j + g\Phi^{*2} u_j = B_j$$

$$n_\mathrm{e} = \sum_j [|u_j|^2 N_j + |v_j|^2 (N_j + 1)]$$ ：素励起（非凝縮体）の密度

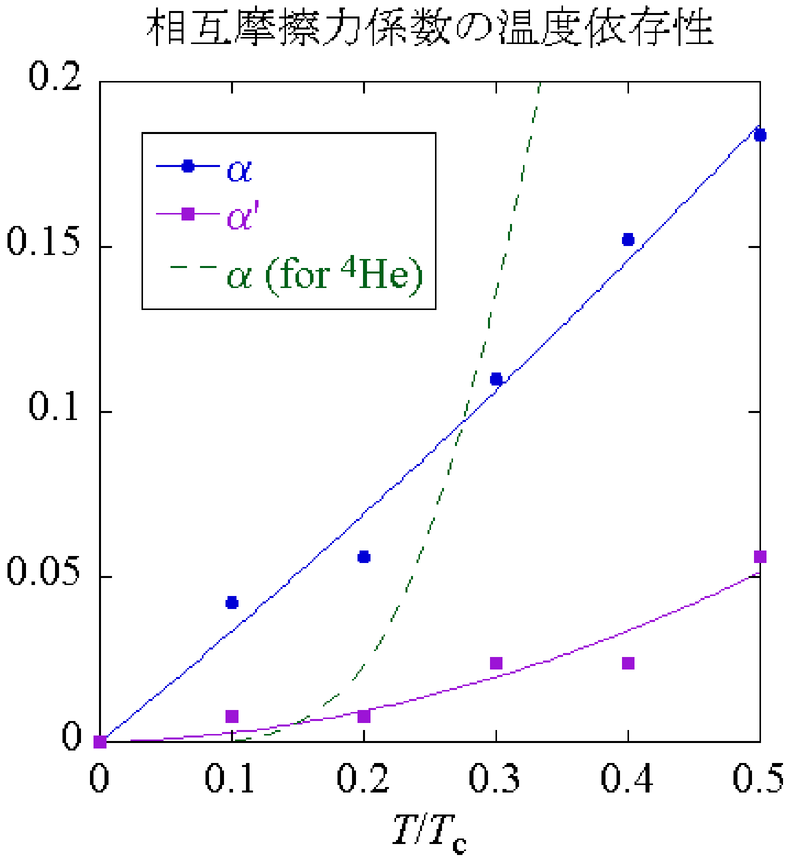
$$m_\mathrm{e} = -\sum_j [u_j v_j^* (2N_j + 1)]$$

$$E_j = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \mathrm{Re}[u_j^* A_j + v_j^* B_j]$$ ：励起スペクトル

$$\boxed{\begin{aligned} E_j u_j &= [k_j^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]u_j - g\Phi^2 v_j \\ E_j v_j &= -[k_j^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]v_j + g\Phi^{*2} u_j \end{aligned}}$$

素励起の初期条件：
一様定常解

１本の渦でのシミュレーション：相互摩擦力係数の計算



$$T_c = 4\pi/\{\zeta(3/2)\}^{2/3}$$

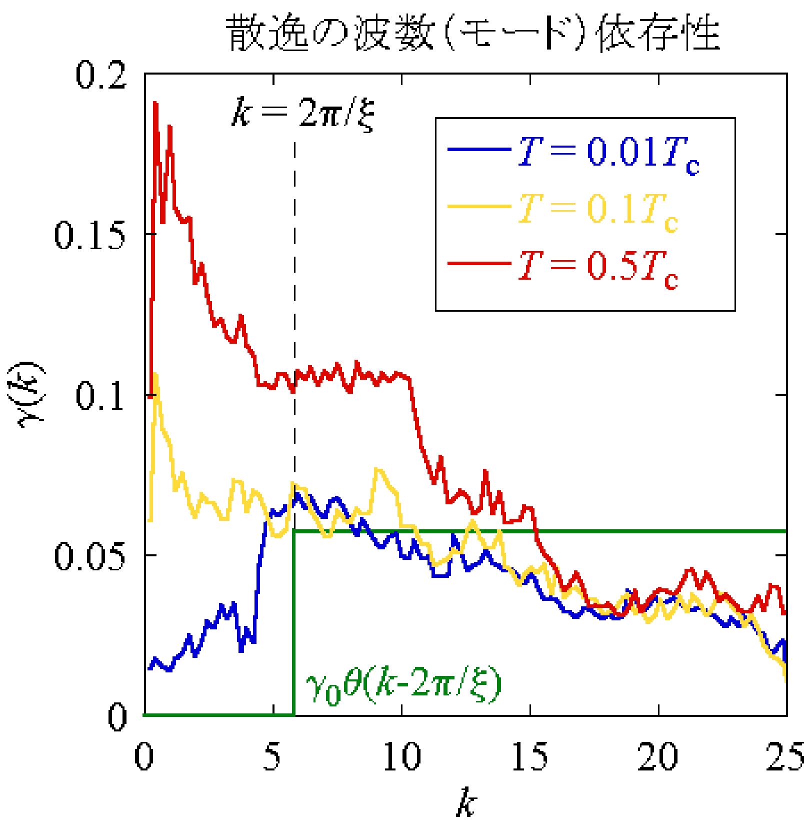
:理想ボース気体のボース凝縮転移温度

相互摩擦力係数は温度とともに上昇する

→超流動Heの相互摩擦力係数と定性的に一致

→ただし定量的には一致しない（液体Heは強相関系）

超流動乱流中でのシミュレーション



（$t > 1$での平均）

高温では

散逸が低波数領域にまで及んでいる。

→渦が散逸され、量子渦の影響が減る（Kolmogorov則が破れる？）。

→超流動Heの相互摩擦力に類似

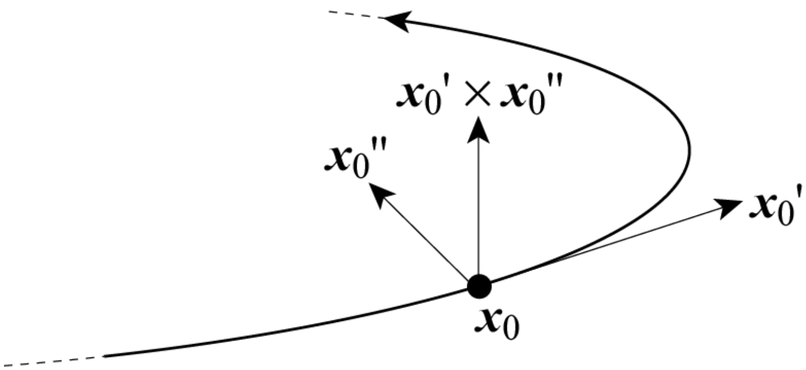
低温では：

散逸が高波数領域のみで効いている。

→ケルビン波の励起のみが散逸される

Theoretical and Numerical Study of Quantum Turbulence

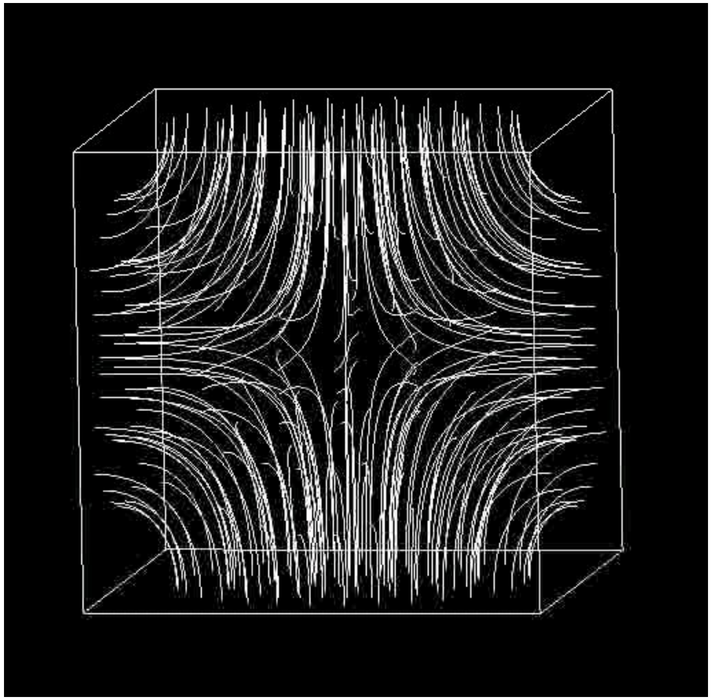
Vortex-filament model



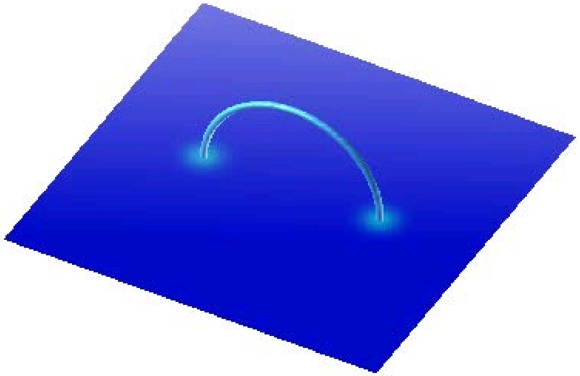
$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}_0)$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{sa}}(\boldsymbol{x})$$

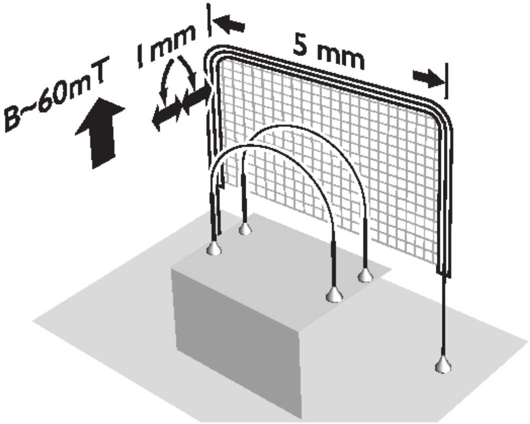
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\boldsymbol{x}_0(t) - \boldsymbol{x}] \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0(t)}{|\boldsymbol{x}_0(t) - \boldsymbol{x}|^3}$$



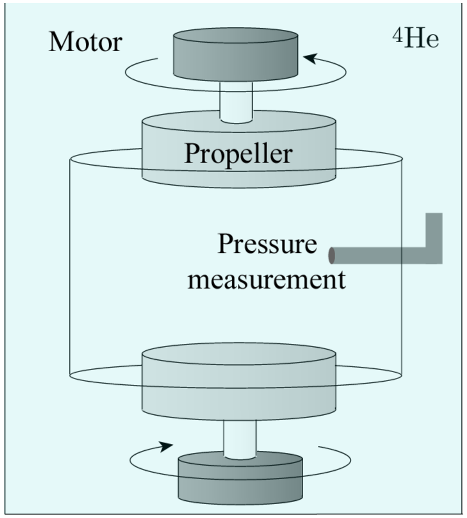
Experimental Study of Quantum Turbulence



Vibrating wire (Osaka)



Oscillating grid
(Oregon, Lancaster)



Two-counter
rotating disks
(Paris)

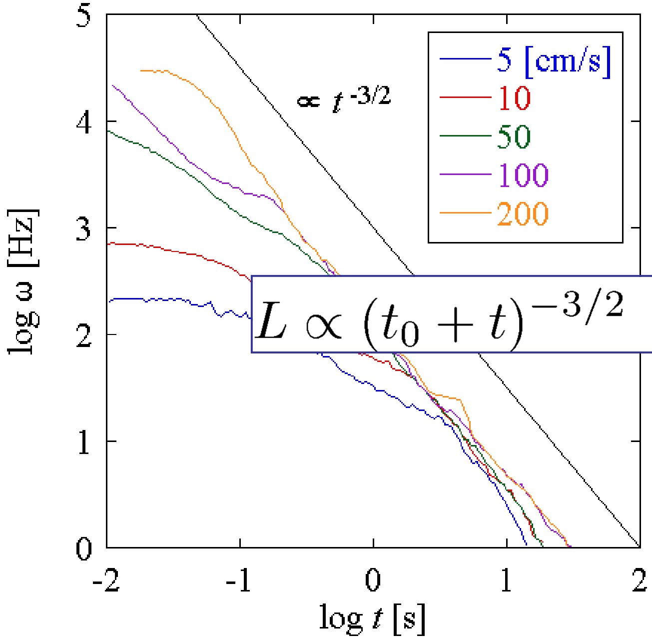
All experiments are done in superfluid helium

Experimental Study of Quantum Turbulence

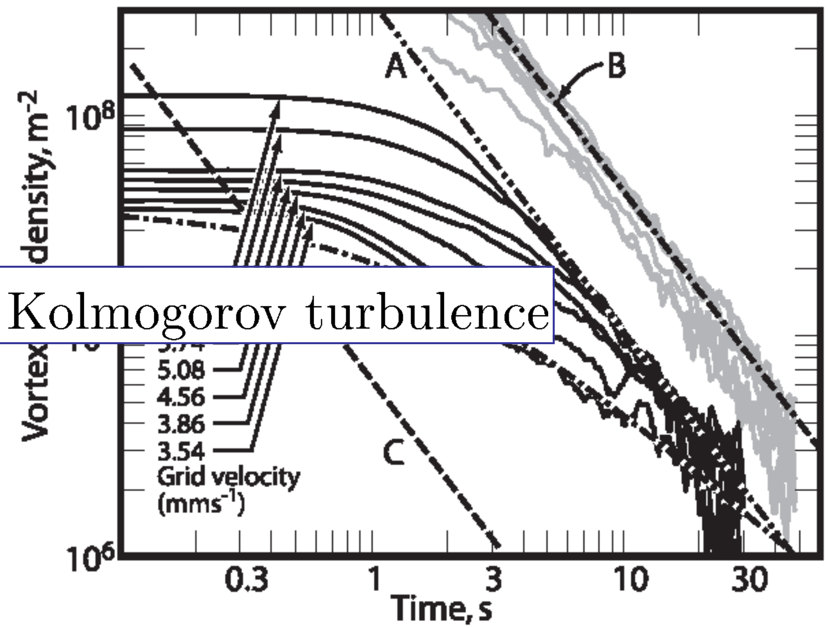
S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999)

D. L. Bradley *et al*. Phys. Rev. Lett. **96**, 035301 (2-6)

$T = 1.5$ [K] for ^{4}He



$T = 0.4$ [mK] for ^{3}He

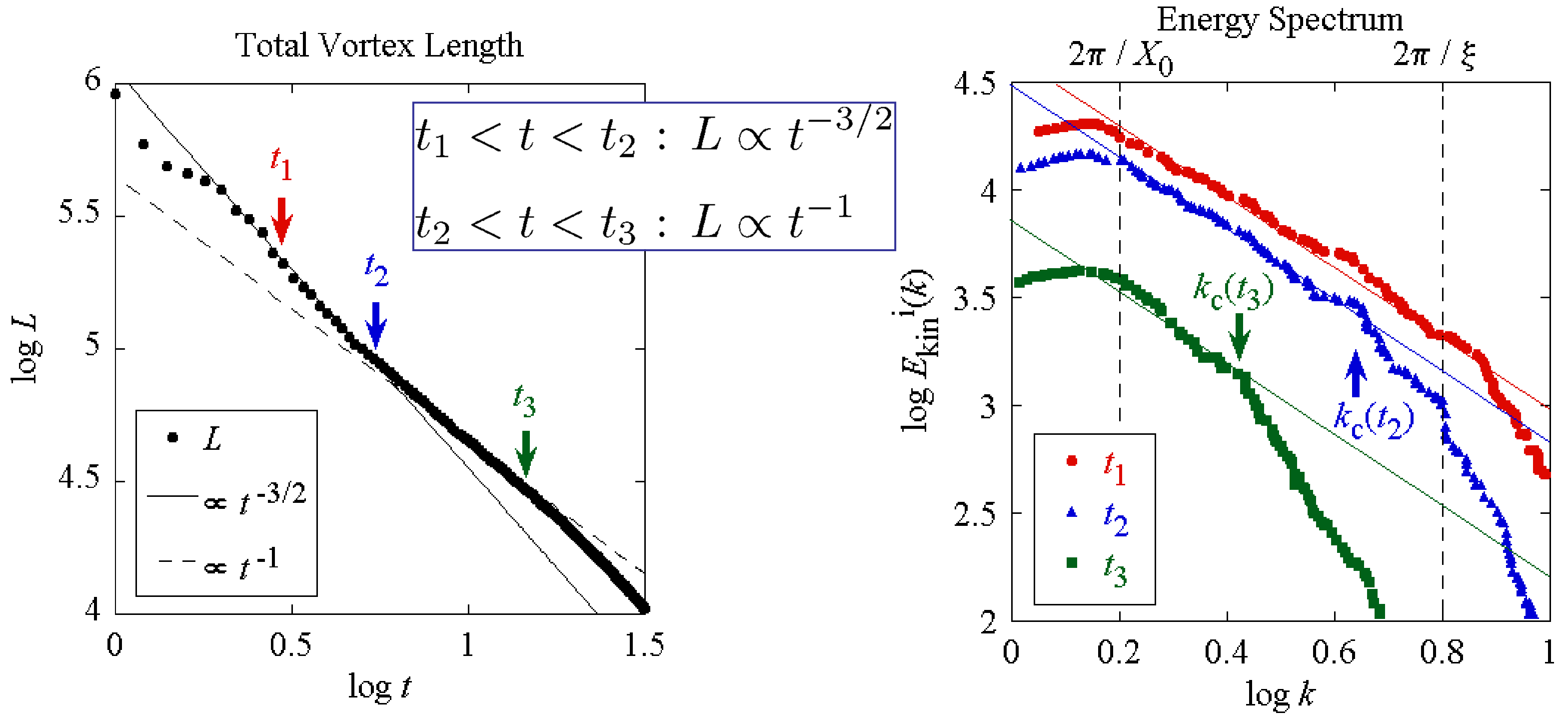


$$L \propto (t_0 + t)^{-3/2} \quad \text{for Kolmogorov turbulence}$$

Some self-similar structures in quantum turbulence were observed.

Self-similar Structure in Quantum Turbulence

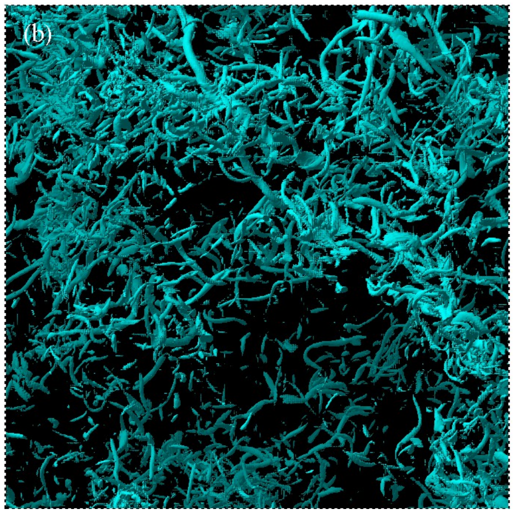
Simulation of the Gross-Pitaevskii equation



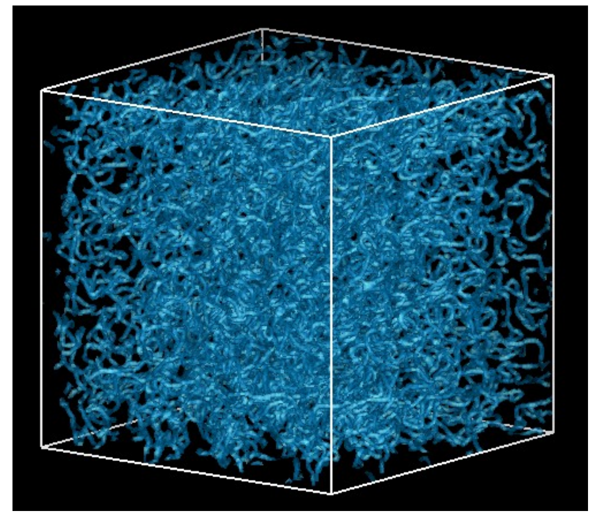
Kolmogorov spectrum was also obtained in the simulation of the Gross-Pitaevskii equation (and the vortex-filament model)

2, Proposal for Quantum Turbulence in Atomic BECs

Why is quantum turbulence important?



Classical turbulence:
vortices are indefinite

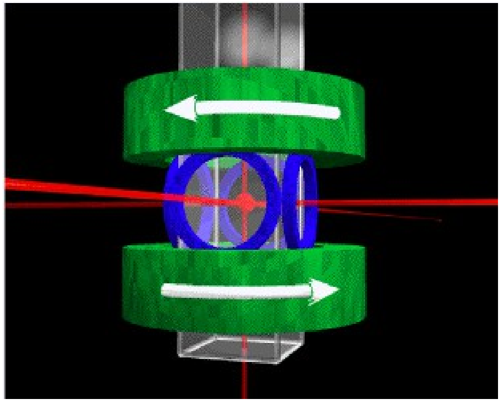


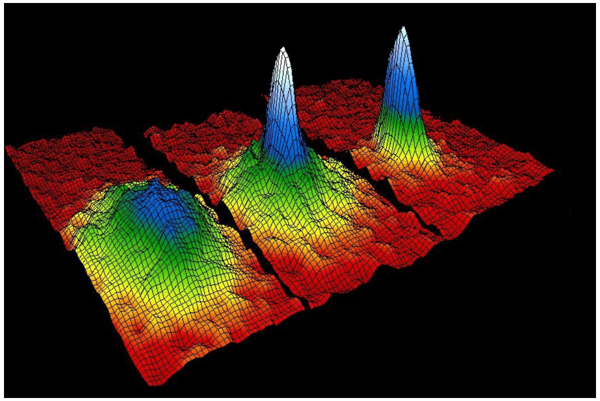
Quantum turbulence:
vortices are definite

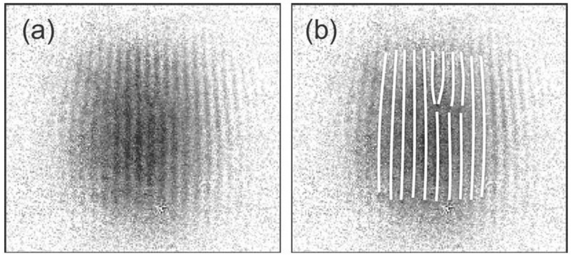
It becomes possible to consider {
- Self-similar (fractal) structure of vortices
- Size distribution of vortex loops
- Cascade process of vortices

}

Quantized Vortices in Atomic BECs







Y. Shin et al. PRA **72**, 021604(2005)

Atomic BEC

V. Bretin et al. PRL **90**, 100403(2003)

M. R. Matthews et al. PRL **83**, 2498(1999)

K. W. Madison et al. PRL **86**, 4443(2001)