熱揺らぎと結合したGPモデルにおける超流動乱流の減衰機構II

大阪市立大理　小林未知数、坪田誠

3月20日・日本物理学会2007年春季大会 20aRD-12

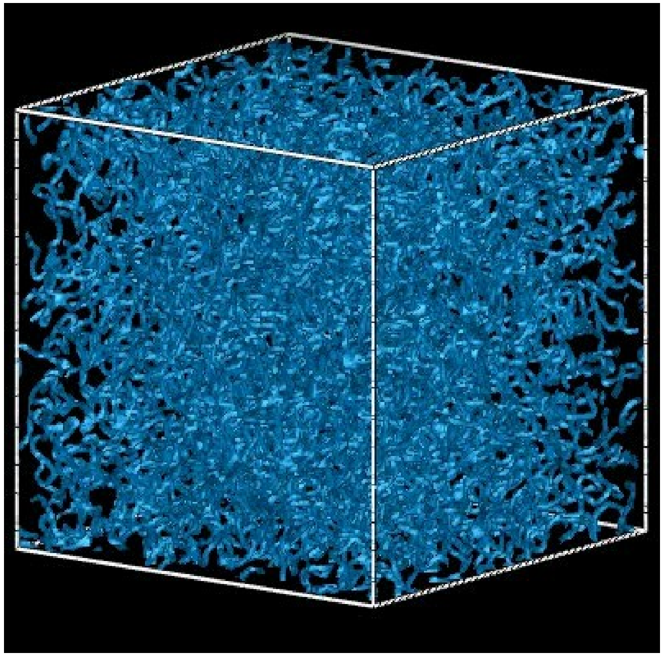
素励起物理学研究室
Elementary Excitation Physics Laboratory
（物性理論研究室）

発表内容

1. 研究目的
2. Gross-Pitaevskii & Bogoliubov-de Gennes 方程式
3. １本の渦でのシミュレーション
4. 超流動乱流中でのシミュレーション
5. まとめ
6. 今後の課題

1，超流動乱流における散逸構造

研究目的：超流動乱流中における散逸構造の解明



超流動乱流のシミュレーション

(http://matter.sci.osaka-cu.ac.jp/~bsr/tsubotag/tsubotasim-j.html)

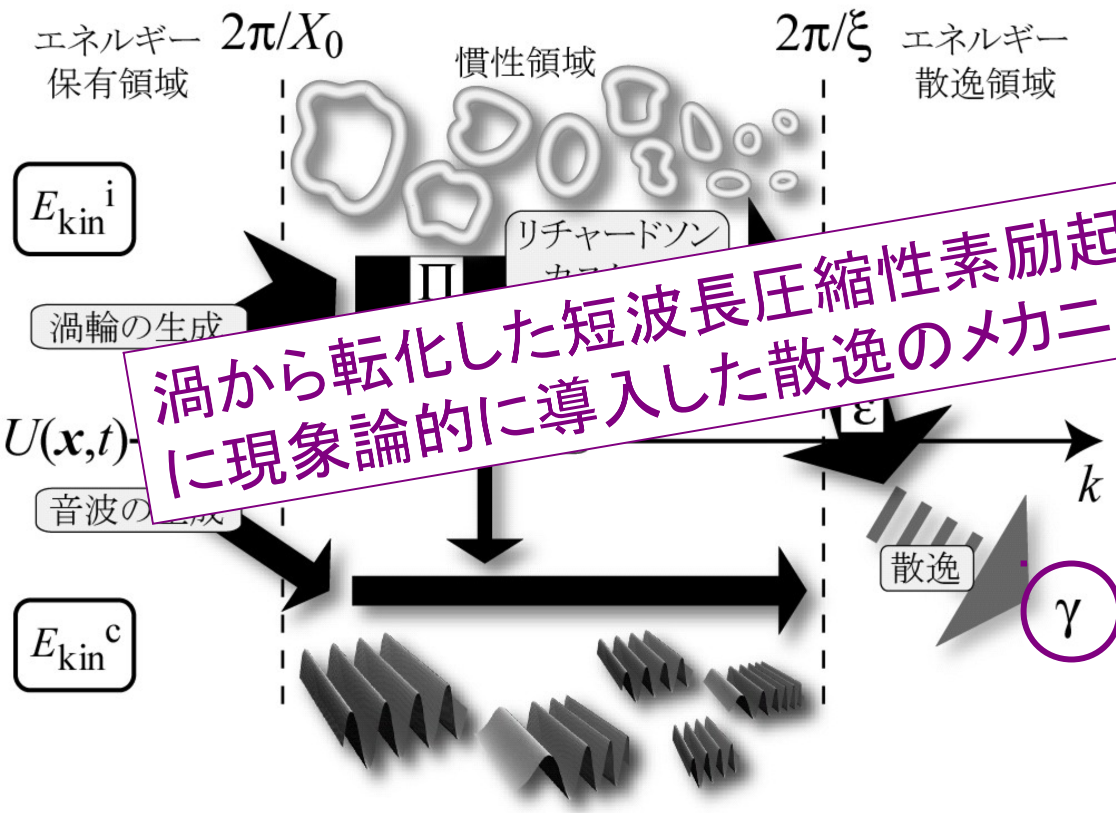
超流動乱流：超流動^{4}Heにおいて実現される乱流　**量子渦タングル**

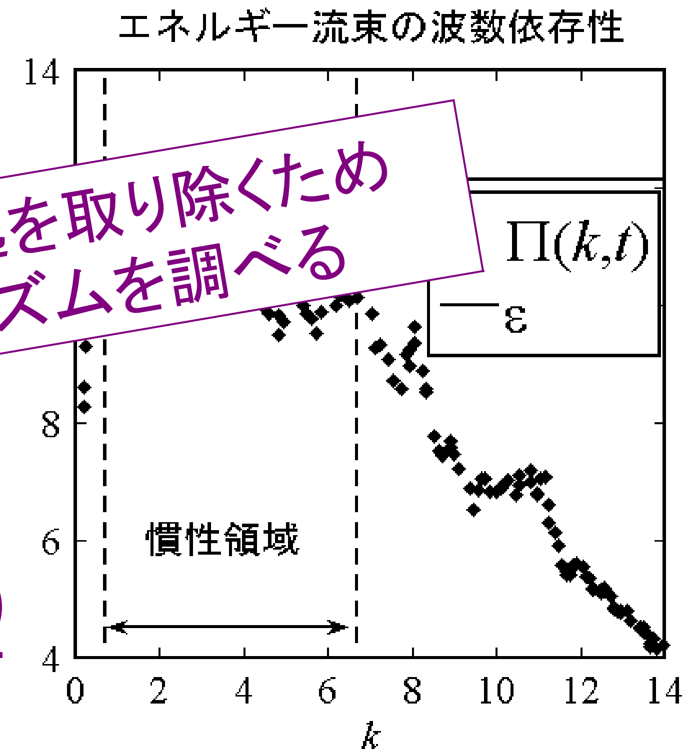
乱流に働く減衰機構とは？

なぜそんな問題を考えるか？

1，超流動乱流における散逸構造

超流動乱流中には（渦芯よりも小さなスケールで）散逸が存在する





渦から転化した短波長圧縮性素励起を取り除くために現象論的に導入した散逸のメカニズムを調べる

M. Kobayashi and M. Tsubota, PRL **94**, 065302 (2005) M. Kobayashi and M. Tsubota, JPSJ **74**, 3248 (2005)

２，Gross-Pitaevskii & Bogoliubov-de Gennes 方程式によるシミュレーション

ボース場のハミルトニアンとその時間発展

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t) \left[-\nabla^2 - \mu + \frac{g}{2} |\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})|^2 \right] |\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g \hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t) \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)] \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$$

$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})$: ボース場の演算子

μ : 化学ポテンシャル

g : 相互作用の結合定数

１次揺らぎまで残した平均場近似

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)=[-\nabla^2-\mu+g\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)]\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)$$

$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x},t)=\Phi(\boldsymbol{x},t)+\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t)+\hat{\zeta}(\boldsymbol{x},t)$: ボース場

$\Phi(\boldsymbol{x},t)=O(\sqrt{N_0})$: BEC の巨視的波動関数（平均場）

$\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t)=O(1)$: BEC の１次揺らぎ

$\hat{\zeta}(\boldsymbol{x},t)=O(1/\sqrt{N_0})$: 高次揺らぎ（無視）

GP方程式とBdG方程式

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=[-\nabla^2-\mu+g(|\Phi|^2+2\langle\hat{\chi}^\dagger\hat{\chi}\rangle)]\Phi+g\langle\hat{\chi}\hat{\chi}\rangle\Phi^* \ : \ \mathrm{GP}$$

$$i\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial t}=[-\nabla^2-\mu+2g|\Phi|^2]\hat{\chi}+g\Phi^2\chi^\dagger \ : \ \mathrm{BdG}$$

量子渦

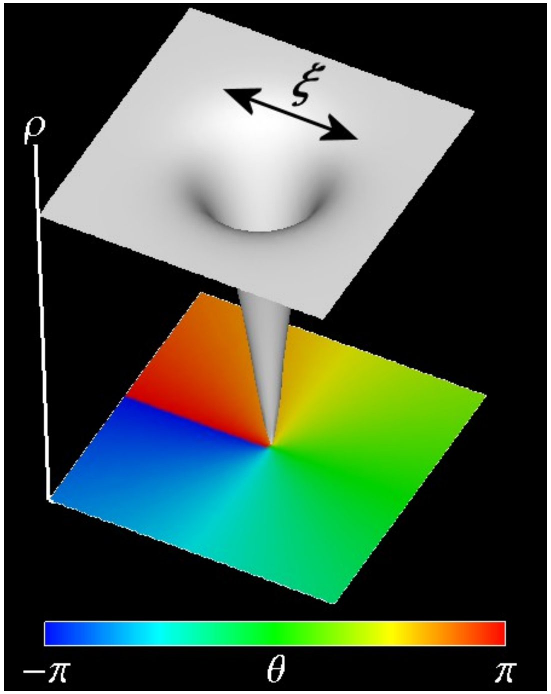
$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2\langle \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle)]\Phi + g\langle \hat{\chi}\hat{\chi} \rangle \Phi^*$$

$\Phi(\boldsymbol{x}) = |\Phi(\boldsymbol{x})| \exp[\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})]$

$\rho(\boldsymbol{x}) = |\Phi(\boldsymbol{x})|^2$：凝縮体密度

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 2\nabla\theta(\boldsymbol{x})$：凝縮体の速度場

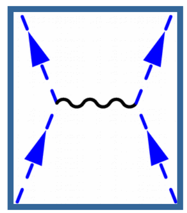
$\xi = 1/\sqrt{g\rho}$：回復長（渦芯サイズ）

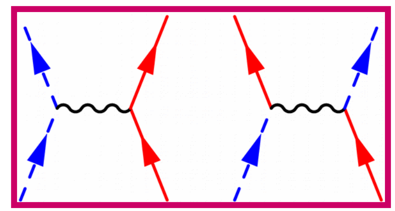


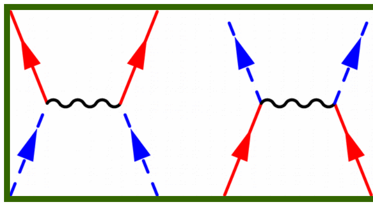
量子渦

GP方程式の散逸構造

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2\langle \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle)]\Phi + g\langle \hat{\chi}\hat{\chi} \rangle \Phi^*$$







GP方程式における散逸の起源
（ボース凝縮体の散逸）

$$\gamma(\boldsymbol{x}, t) = -\,\mathrm{Im}\left[g \frac{\langle \hat{\chi}(\boldsymbol{x}, t)\hat{\chi}(\boldsymbol{x}, t) \rangle \Phi^*(\boldsymbol{x}, t)}{\Phi(\boldsymbol{x}, t)} \right]$$

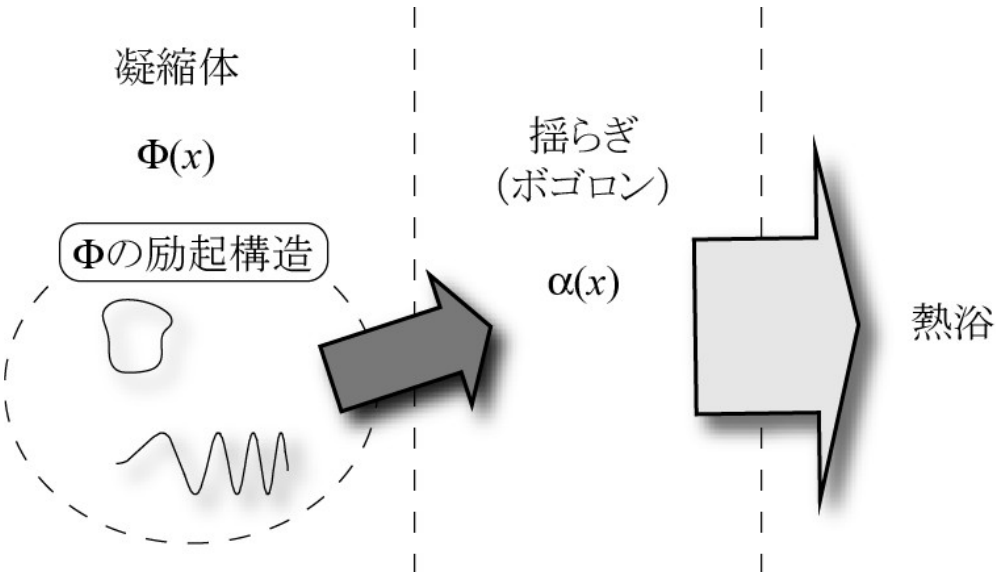
GP方程式の散逸はハミルトニアンの虚部として定義できる

局所平衡近似

$$\hat{\chi}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_j \phi_j(\boldsymbol{x},t)\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_j [u_j(\boldsymbol{x},t)\hat{\alpha}_j + v_j^*(\boldsymbol{x},t)\hat{\alpha}_j^\dagger]$$

$$\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = N_j = \frac{1}{\exp[E_j/T]-1}$$

局所平衡近似



：素励起（ボゴロン）は熱浴と結合し、エネルギーは熱浴へ散逸する

計算方法

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + g(|\Phi|^2 + 2n_\mathrm{e})]\Phi + g m_\mathrm{e}\Phi^*$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial u_j}{\partial t} = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]u_j - g\Phi^2 v_j = A_j$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial v_j}{\partial t} = -[-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]v_j + g\Phi^{*2}u_j = B_j$$

$$n_\mathrm{e} = \sum_j [|u_j|^2 N_j + |v_j|^2(N_j+1)]$$ ：素励起（非凝縮体）の密度

$$m_\mathrm{e} = -\sum_j [u_j v_j^*(2N_j+1)]$$

$$E_j = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \mathrm{Re}[u_j^* A_j + v_j^* B_j]$$ ：励起スペクトル

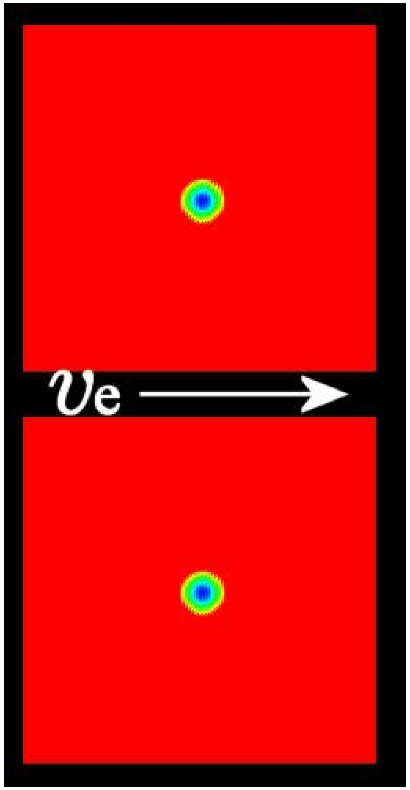
$$\boxed{\begin{aligned} E_j u_j &= [k_j^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]u_j - g\Phi^2 v_j \\ E_j v_j &= -[k_j^2 - \mu + 2g|\Phi|^2]v_j + g\Phi^{*2}u_j \end{aligned}}$$

素励起の初期条件：一様定常解

3，1本の渦でのシミュレーション：相互摩擦力係数の計算

外部流れ場中における1本の量子渦

$T = 0.01T_{\mathrm{c}}$



$T = 0.1T_{\mathrm{c}}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \alpha \boldsymbol{x}'_0 \times \boldsymbol{v} - \alpha' \boldsymbol{x}'_0 \times [\boldsymbol{x}'_0 \times \boldsymbol{v}]$$

量子渦の軌跡

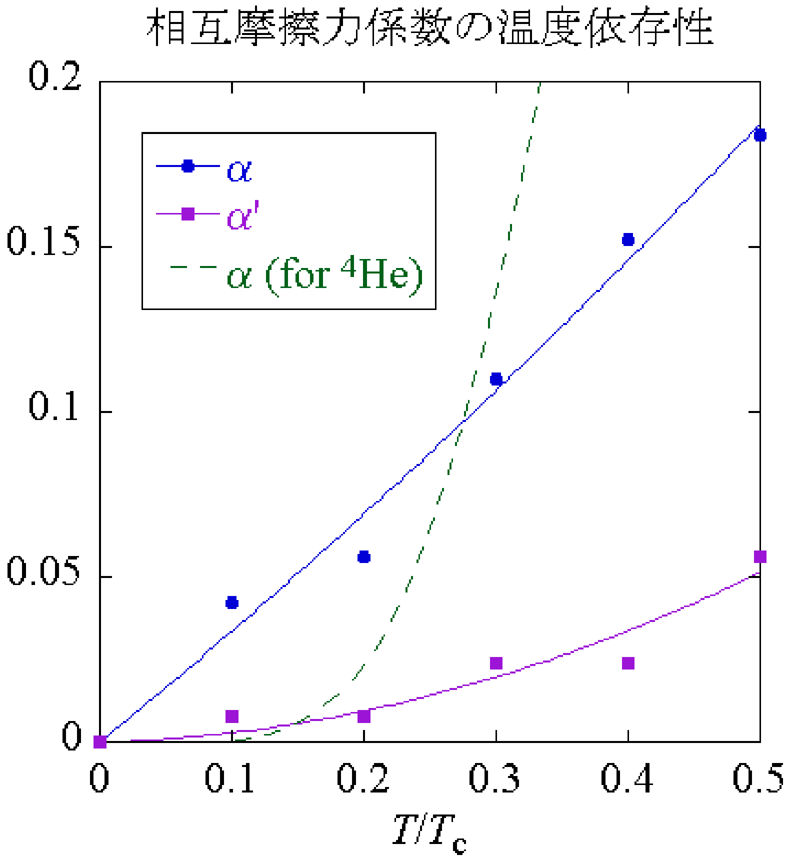
$$\boldsymbol{v} = [v_{\mathrm{e}}, 0]$$

$$\boldsymbol{x}_0(t) = [x_{0x}(0) + \alpha' v_{\mathrm{e}} t, x_{0y}(0) + \alpha v_{\mathrm{e}} t]$$

$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$：外部流れ場

$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$ とともに動く座標系

３，１本の渦でのシミュレーション：相互摩擦力係数の計算



$$T_c = 4\pi/\{\zeta(3/2)\}^{2/3}$$

:理想ボース気体のボース凝縮転移温度

相互摩擦力係数は温度ともに上昇する

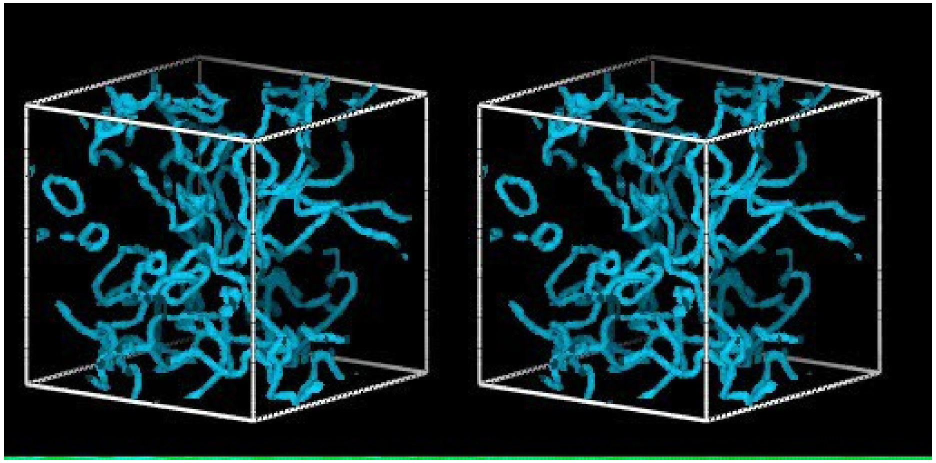
→超流動Heの相互摩擦力係数と定性的に一致

→ただし定量的には一致しない（液体Heは強相関系）

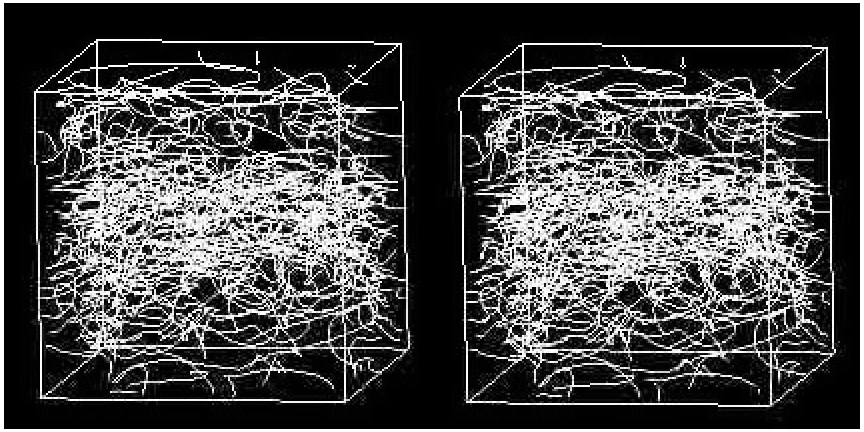
4，超流動乱流中でのシミュレーション

$0 < t < 1$

$T = 0.01T_c$　　$T = 0.1T_c$

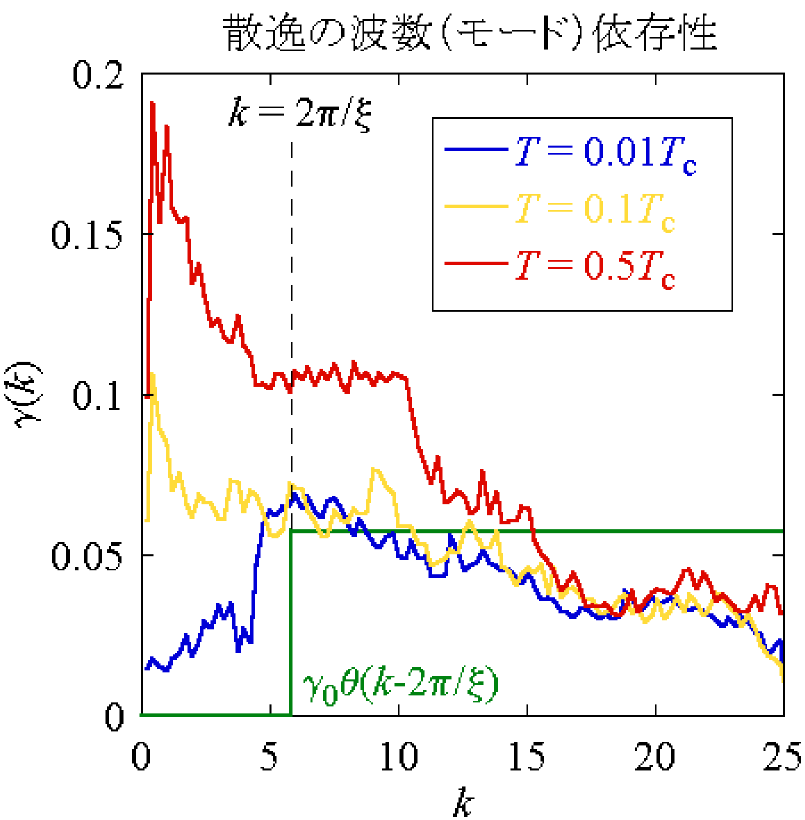


$\alpha = 0.1\ \alpha' = 0$　　$\alpha = \alpha' = 0$



温度が高いときに量子渦が散逸されている→超流動Heの相互摩擦力と同じ効果

4，超流動乱流中でのシミュレーション



（$t > 1$での平均）

高温では

散逸が低波数領域にまで広がっている。

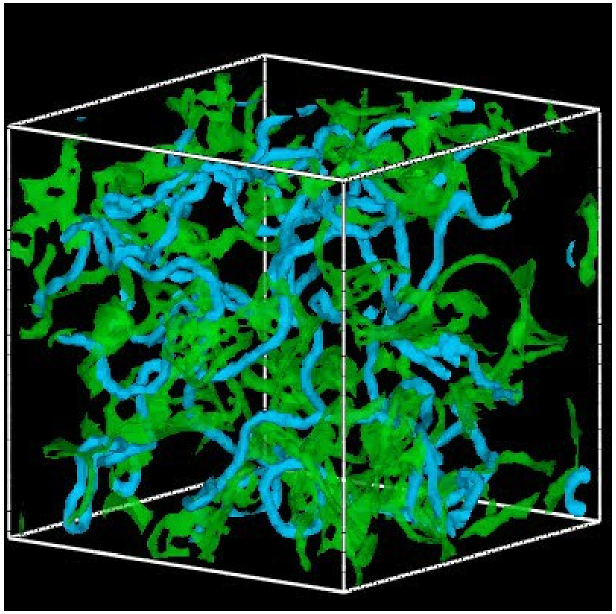
低温では:

散逸が高波数領域のみで効いている。

→渦が散逸され、量子渦のカスケードが阻害される（Kolmogorov則が破れる？）。

→超流動Heの相互摩擦力に類似

非凝縮体の乱流とのカップリング



$T = 0.1 T_{\mathrm{c}}$

青：量子渦

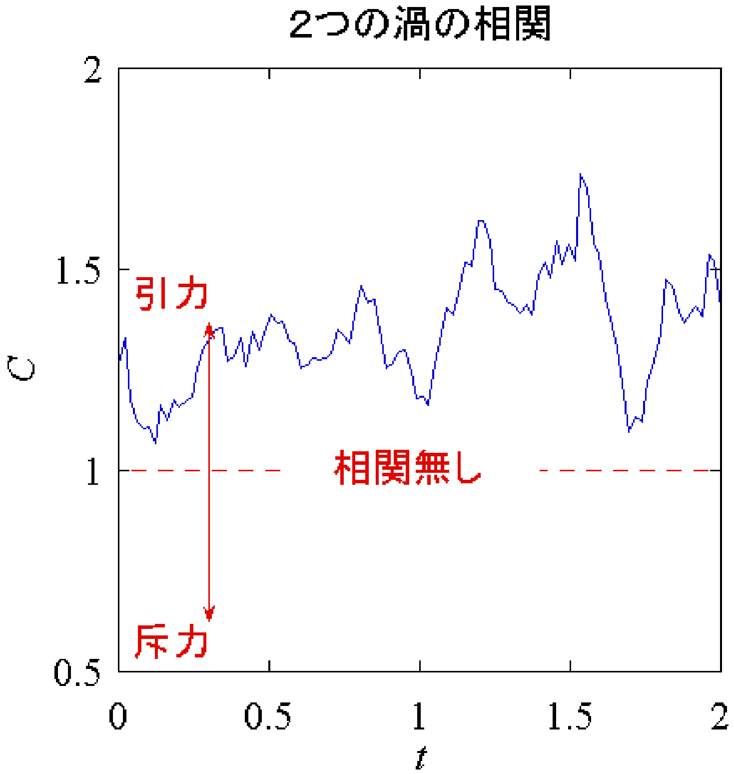
緑：素励起の高渦度領域

$$|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})| > 0.95 \left\langle |\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}| \right\rangle$$

温度が高いときに、凝縮体（超流動）と素励起（非凝縮体）の強く結合した乱流が形成される

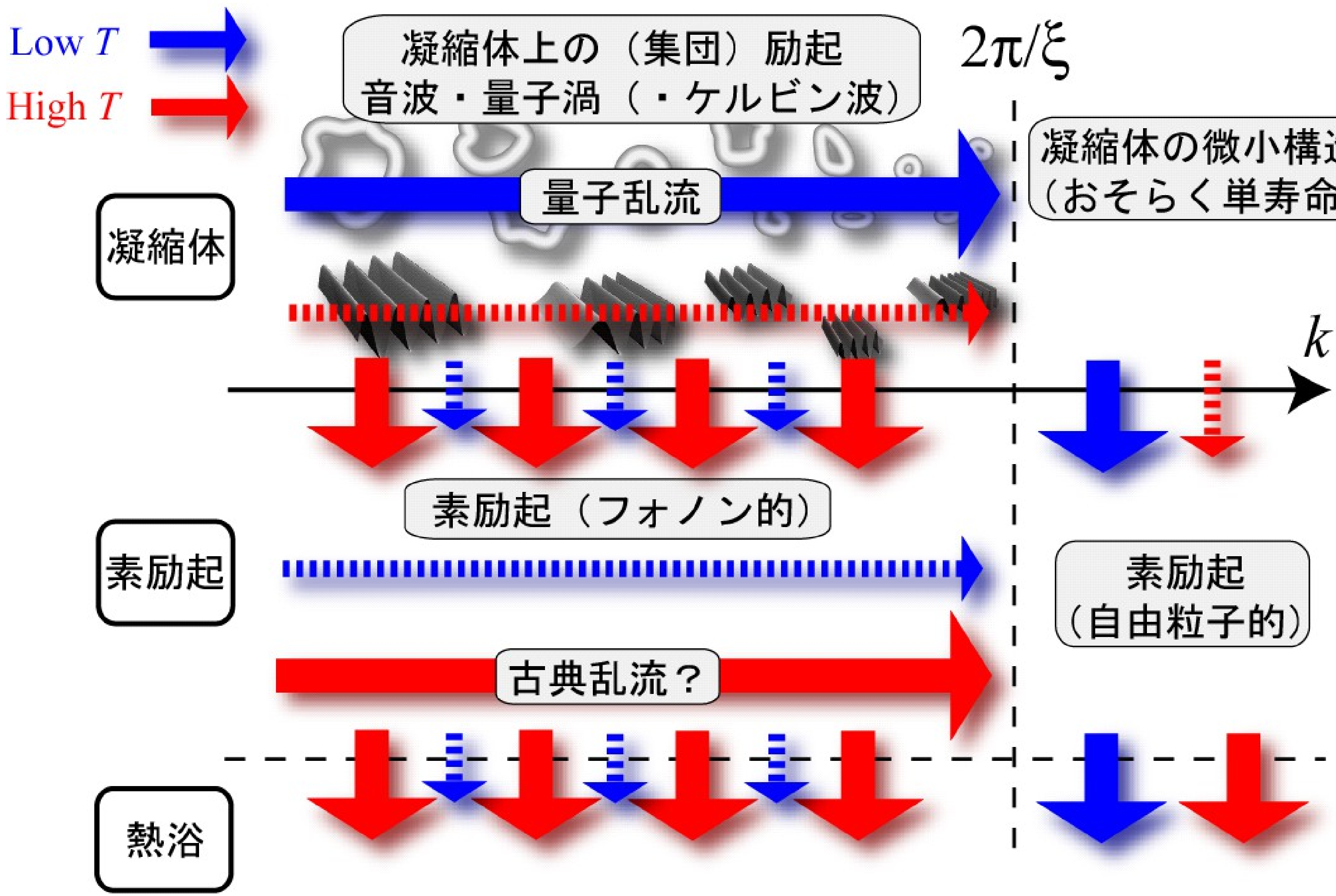
非凝縮体の乱流とのカップリング

量子渦と素励起渦は常に引力：両者は結合して運動しようとする



もし素励起（粘性流体）の乱流がKolmogorov則を示せば、それに引きずられて量子渦ダイナミクスがKolmogorov則を回復する可能性がある？

5，まとめ


Low T
High T
凝縮体上の（集団）励起
音波・量子渦（・ケルビン波）
2π/ξ
凝縮体の微小構造
（おそらく単寿命）
量子乱流
凝縮体
k
素励起（フォノン的）
素励起
素励起
（自由粒子的）
古典乱流？
熱浴

6，今後の課題

1. １本の渦におけるエネルギー移動の詳細なダイナミクス
2. 発達した乱流（大規模シミュレーション、エネルギースペクトルなど）
3. 散逸の渦配置依存性
4. 非線形項の温度依存性

計算パラメータ

全格子点数 : 64^3

素励起のエネルギー準位数 : 16^3

空間解像度 :$\Delta x = 0.25$

初期凝縮体平均密度 :$\bar{\rho} = 1$

相互作用の結合定数 : $g = 1$

時間解像度 :$\Delta t = 0.0001$

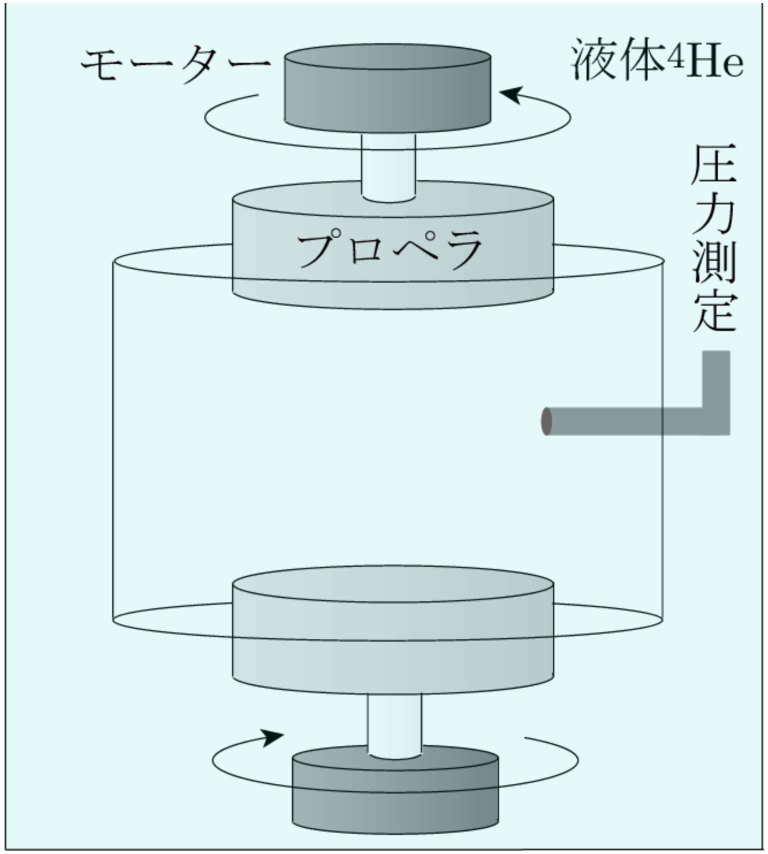
計算方法 : 周期境界条件における擬スペクトル法

　＋４次のルンゲークッタ

素励起のエネルギー準位モードとしてフーリエ変換の波数を用いる

超流動乱流の実験

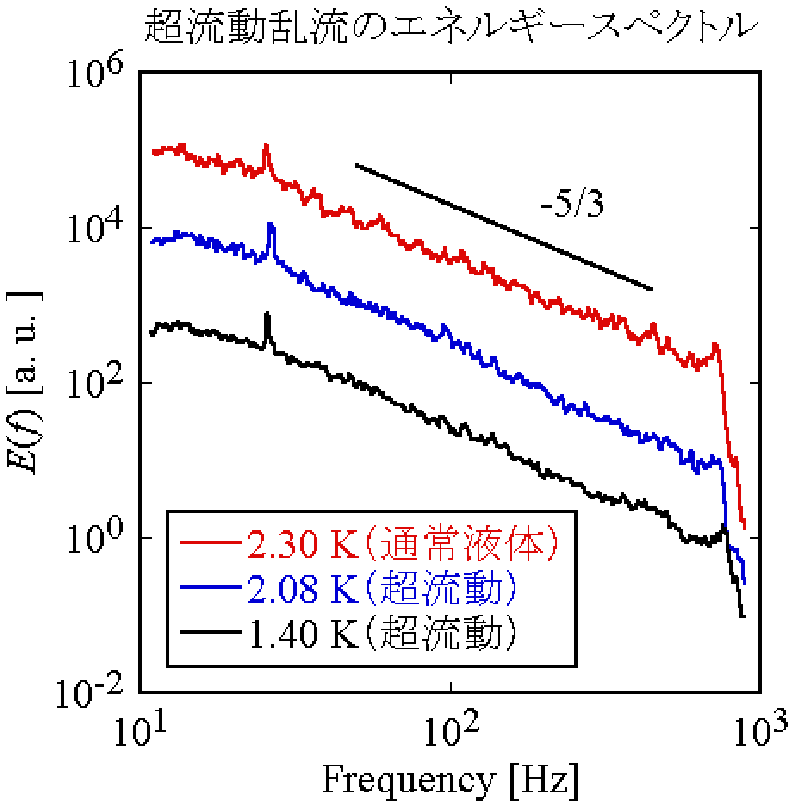
向かい合う振動円板流中に形成された超流動^{4}Heの超流動乱流



実験は$T > 1.4$[K]と高温であり、相互摩擦力が十分に働いている領域であるにも関わらず、エネルギースペクトルがKolmogorov則を示した

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

超流動乱流の実験



粘性を持つ常流体の乱流（素励起渦）と粘性を持たない超流体の乱流（量子渦）が結合することによってKolmogorov則が成り立っているのかも知れない（もしくは常流体しか観測にかかっていない？）

相関関数の計算

相関関数: $$C(t) \equiv \frac{L_{\mathrm{e}}/L}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, p_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})/V}$$

L : 量子渦の全渦糸長

L_{e} : $|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})| > 0.95\,\langle|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}|\rangle$ の領域にある量子渦の全渦糸長

V : 系の体積

$p_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) = 1$ if $|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})| > 0.95\,\langle|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}|\rangle$

$p_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) = 0$ if $|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})| > 0.95\,\langle|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}|\rangle$

$C(t) < 1$: 量子渦と素励起渦は反発する

$C(t) = 1$: 相関無し

$C(t) > 1$: 量子渦と素励起渦は引き合う

散逸の構造

散逸は凝縮体と揺らぎとの相互作用によって導入される

$$H=\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big[|\nabla\Phi(\boldsymbol{x},t)|^2-\mu+\frac{g}{2}|\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|^2-\mathrm{i}\Gamma(\boldsymbol{x},t)\}|\Phi(\boldsymbol{x},t)|^2\Big]$$

Γ(***x***,t) : 凝縮体と揺らぎとの衝突積分

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{x},t)=[-\nabla^2-\mu+g|\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|^2-\mathrm{i}\Gamma(\boldsymbol{x},t)]\Phi(\boldsymbol{x},t)$$

平衡周りの微小揺らぎを仮定：Γ(***x***,t) ∝ γ(***x***,t) μ

$$[\mathrm{i}-\gamma(\boldsymbol{x},t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{x},t)=[-\nabla^2-\mu+g|\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})|^2]\Phi(\boldsymbol{x},t)$$

散逸の構造

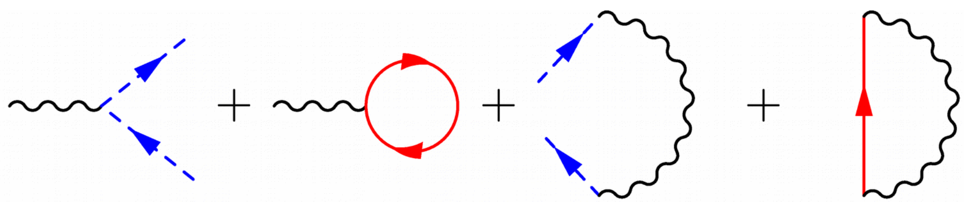
$$\hat{G}(x;x') = \begin{bmatrix} G_{11}(x;x') & G_{12}(x;x') \\ G_{21}(x;x') & G_{22}(x;x') \end{bmatrix}$$

$$iG_{11}(x;x') = \langle T[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}^\dagger(x')]\rangle$$

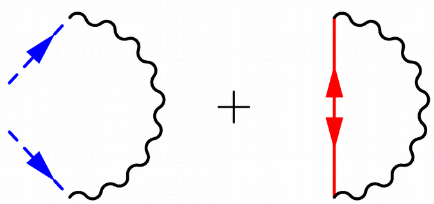
$$iG_{12}(x;x') = \langle T[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x')]\rangle$$

$$\hat{\Sigma}(x;x') = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(x;x') & \Sigma_{12}(x;x') \\ \Sigma_{21}(x;x') & \Sigma_{22}(x;x') \end{bmatrix}$$

$\hbar\Sigma_{11}(x;x') =$



$\hbar\Sigma_{12}(x;x') =$



Hartree-Fock近似
を使った場合

散逸の構造

BdG方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}(x;x') - \int \mathrm{d}\, x''\,\hat{A}(x;x'')\hat{G}(x'';x) = \delta(x-x')\hat{\mathbf{1}}$$

$$\hat{A}(x;x') = \hat{\sigma}_z[T(x)-\mu]\delta(x-x') + \hat{\Sigma}(x;x')$$

$$\int \mathrm{d}x'\ \hat{A}(x;x')\hat{u}_j(x') = E_j\hat{u}_j(x) \qquad \int \mathrm{d}x\ \{|u_j(x)|^2 - |v_j(x)|^2\} = 1$$

$$\hat{u}_j(x) = \begin{bmatrix} u_j(x) & v_j(x) \\ v_j(x) & u_j(x) \end{bmatrix}$$

散逸の構造

$$[T(x)-\mu]\Phi(x)+\int \mathrm{d}x'\,\{\Sigma_{11}(x;x')\Phi(x')+\Sigma_{12}(x;x')\Phi^*(x')\}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)$$

$$\Phi(t-t')\simeq\Phi(t)-\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}t'-\gamma(t)\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}$$

$$\gamma(x)=-\int \mathrm{d}x'\,[\Sigma_{11}(x;x')+\Sigma_{12}(x;x')\Phi^*(x')/\Phi(x')]x'$$

時間相関0の極限において
（Hartree-Fock近似）

$$\gamma(x)=-\,\mathrm{Im}\left[g\frac{\langle\hat{\chi}(x)\hat{\chi}(x)\rangle\Phi^*(x)}{\Phi(x)}\right]$$

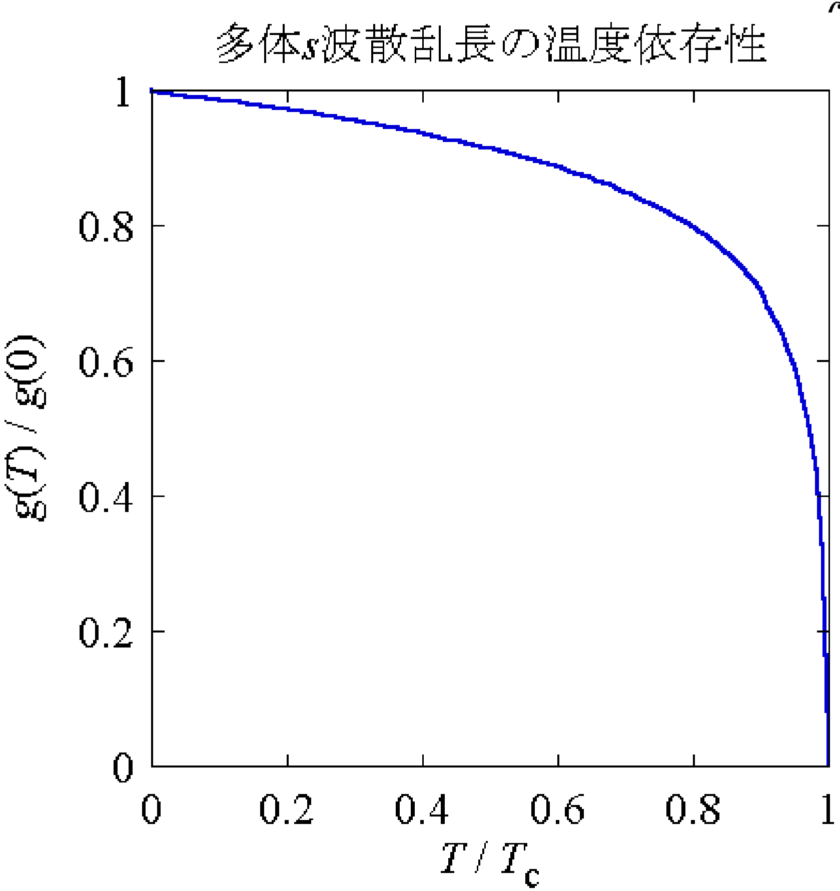
相互作用の温度依存性

一様ボース気体中においてBethe-Salpeter方程式を解けば

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}''}{(2\pi)^3} V(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'')$$

$$\cdots \frac{\cdots^2_-}{\cdots + \Omega_-}\Bigg](1 + N_+ + N_-)$$

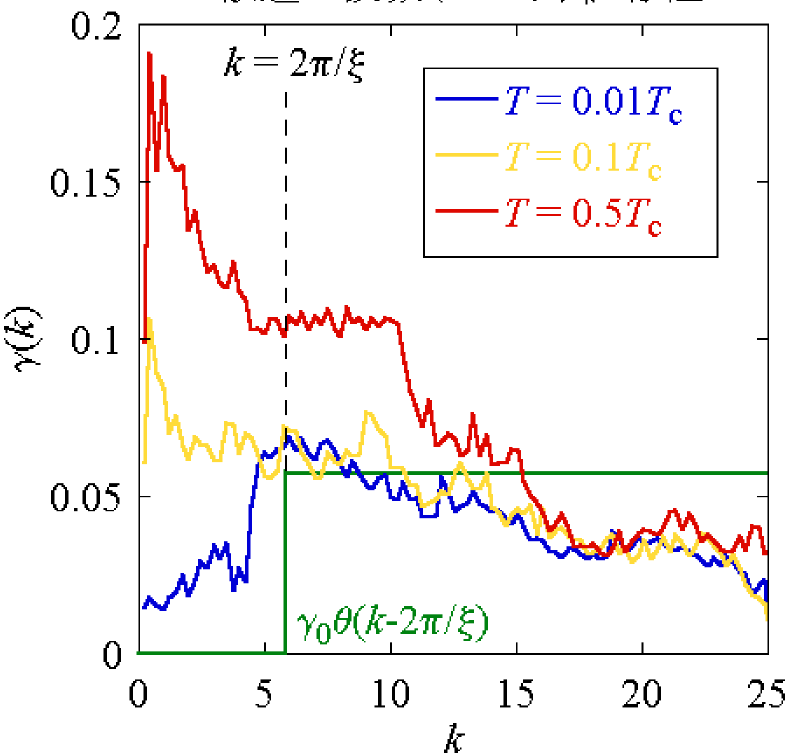
$$\cdots \frac{\cdots}{\cdots + \Omega_-}\Bigg](N_+ - N_-)\Bigg\}\Gamma^{\mathrm{MB}}(\boldsymbol{k}'', \boldsymbol{k}', K)$$



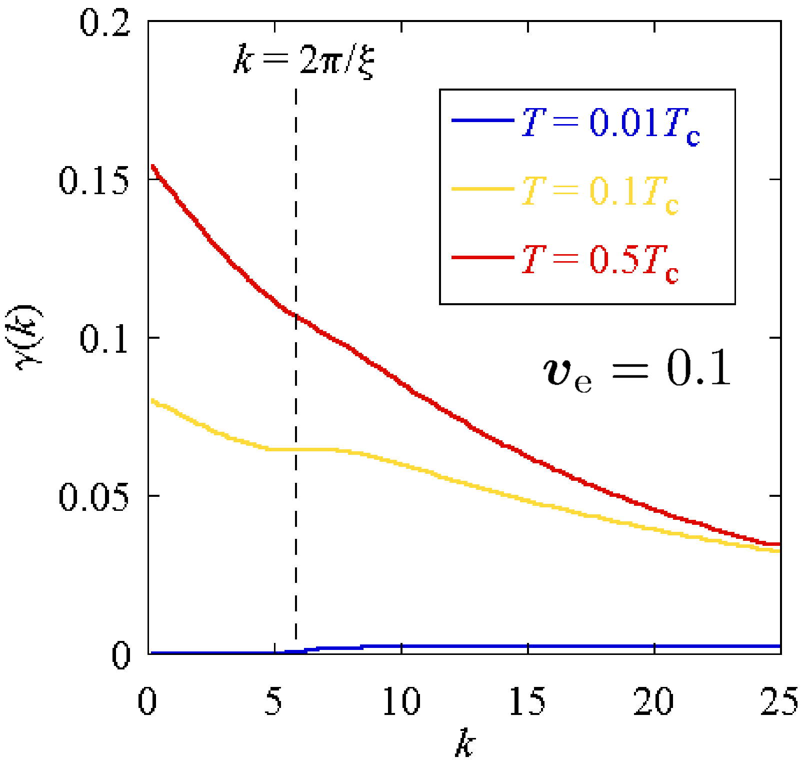
高温では温度に依存する相互作用を考える必要がある？

散逸構造の比較

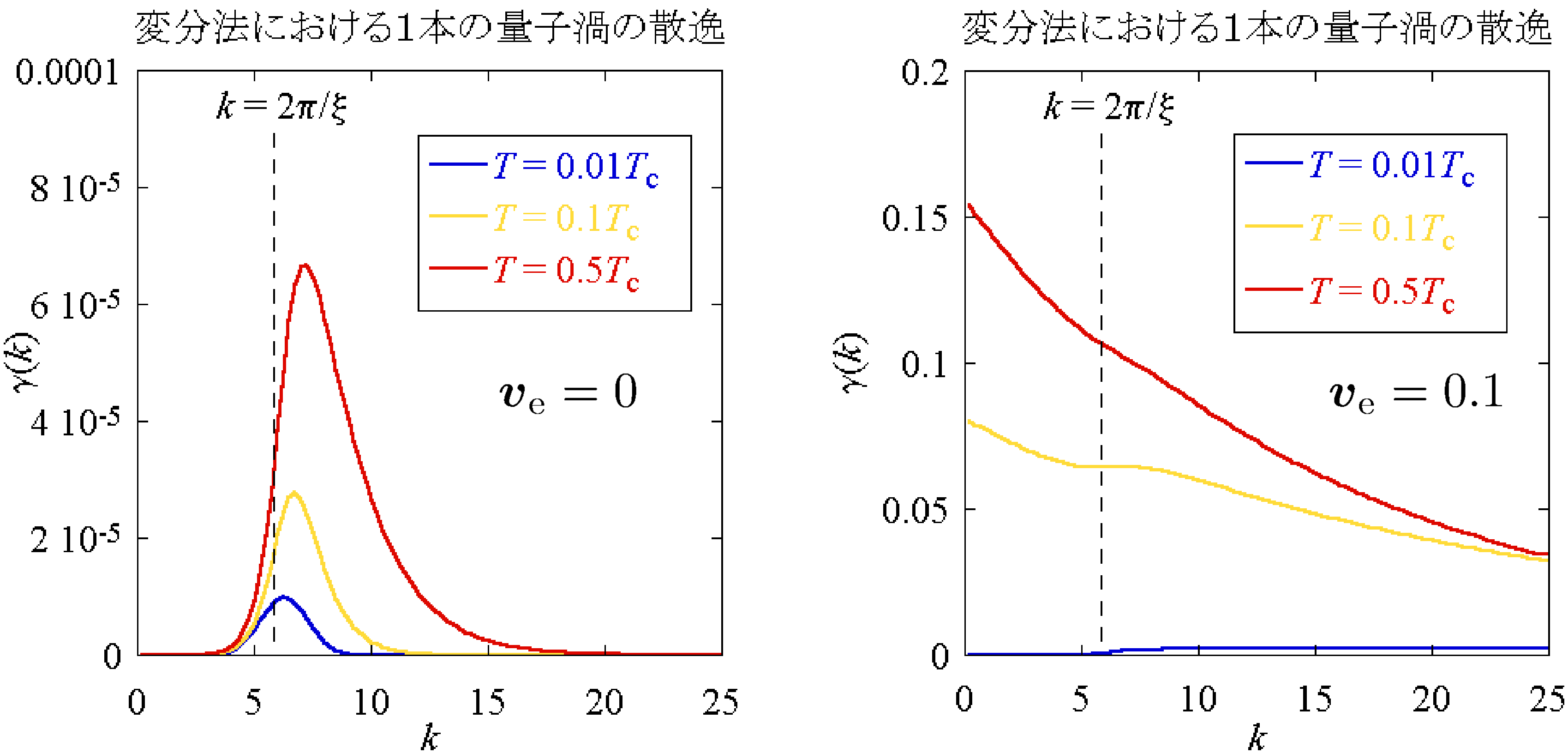
散逸の波数(モード)依存性



変分法における1本の量子渦の散逸



散逸構造の比較

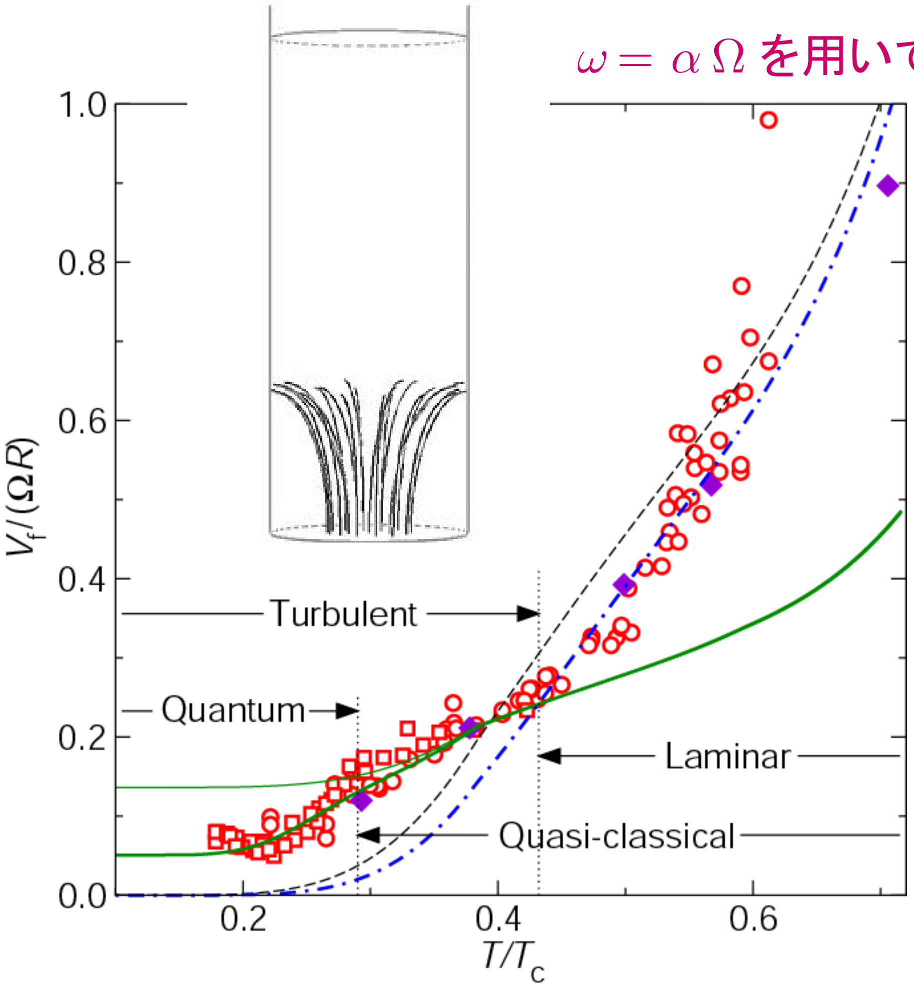


変分法における1本の量子渦の散逸
0.0001
8 10-5
6 10-5
4 10-5
2 10-5
0
γ(k)
k = 2π/ξ
T = 0.01Tc
T = 0.1Tc
T = 0.5Tc
$v_{\mathrm{e}} = 0$
0 5 10 15 20 25
k
変分法における1本の量子渦の散逸
0.2
0.15
0.1
0.05
0
γ(k)
k = 2π/ξ
T = 0.01Tc
T = 0.1Tc
T = 0.5Tc
$v_{\mathrm{e}} = 0.1$
0 5 10 15 20 25
k

乱流状態の相互摩擦力係数

Twisted vortexを用いた相互摩擦力係数の温度依存性の測定

$\omega = \alpha \Omega$ を用いて測定



乱流状態では絶対零度の極限で有限の相互摩擦力になる

→乱流における渦粘性の効果？

V. B. Eltsov et al. PRL **96** 215302 (2006)
Private discussion with M. Krusius