粒子生成およびホーキング輻射に関するBECのアナロジー

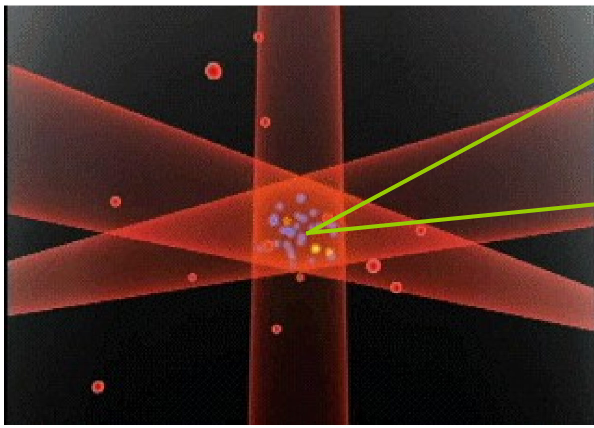
東京大学・関西学院大学・京都大学・大阪市立大学
小林未知数・栗田泰生・森成隆夫
坪田誠・石原秀樹

研究会「渦・流れ・ホーキング輻射」　２００８年9月2日

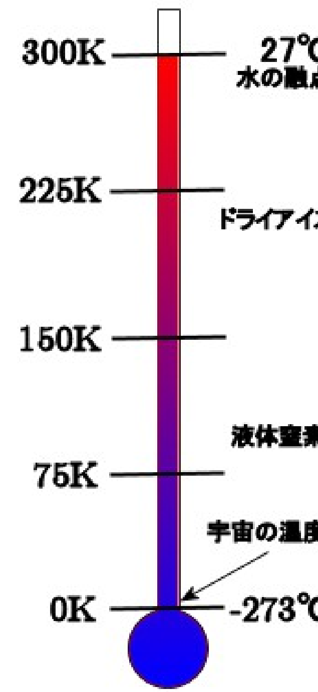
Contents

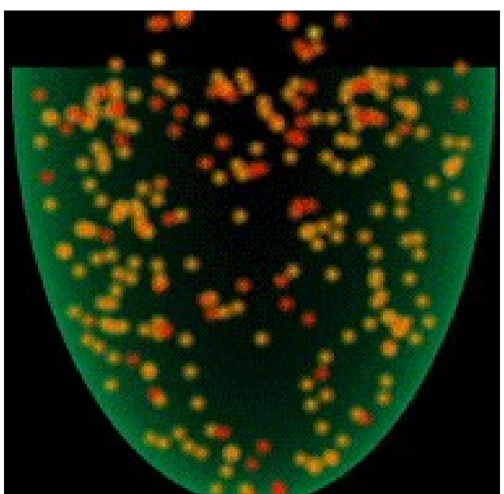
原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体

レーザーによって原子を減速・冷却する



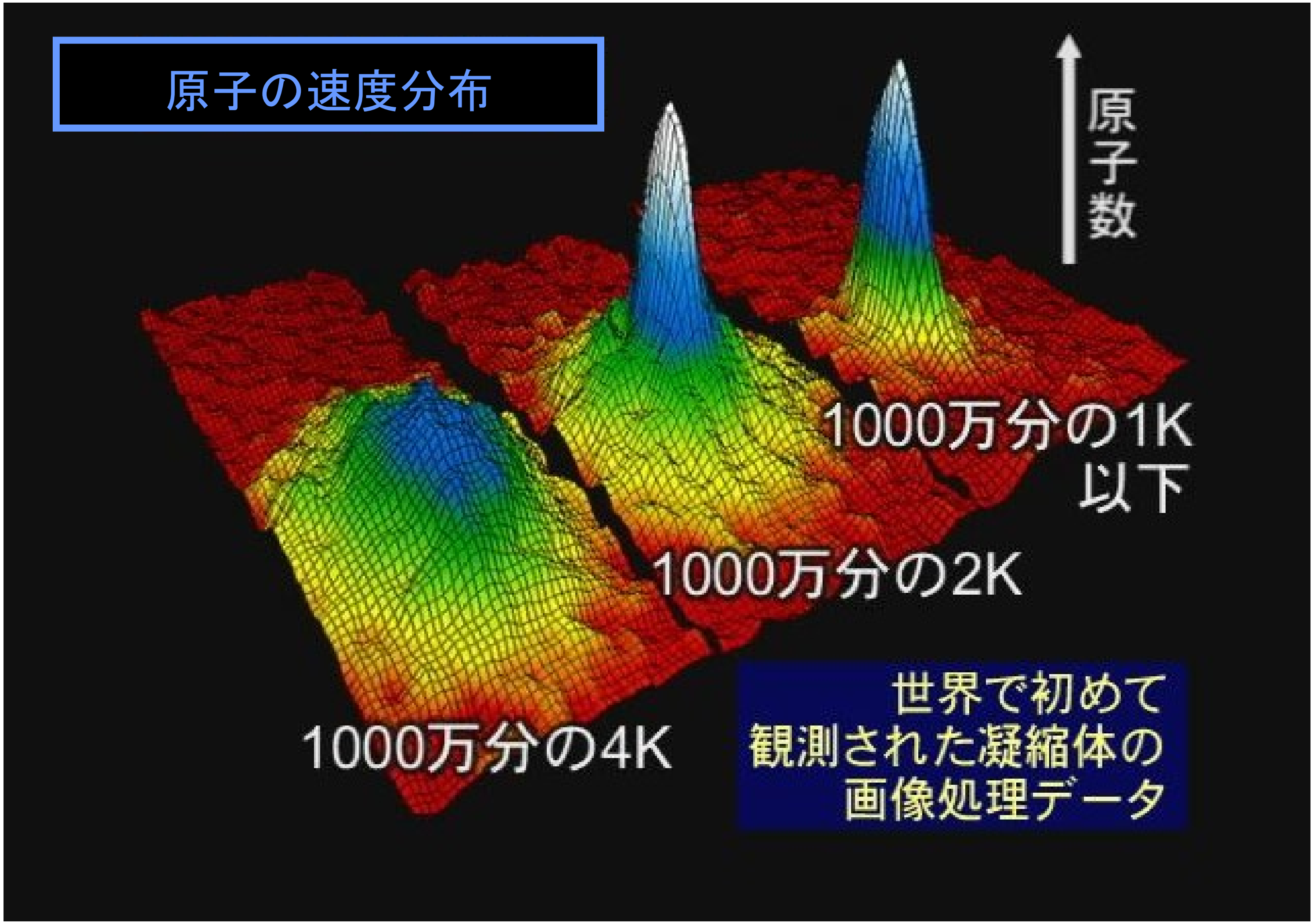
絶対温度1000万分の
１Kの温度が実現





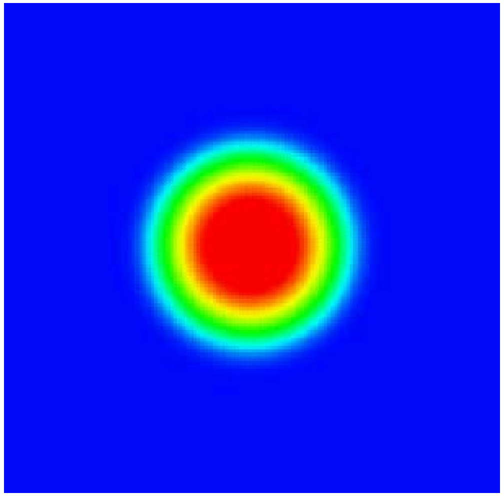
500km（東京～大阪）
の温度計に対して0K
から0.2mmの場所！

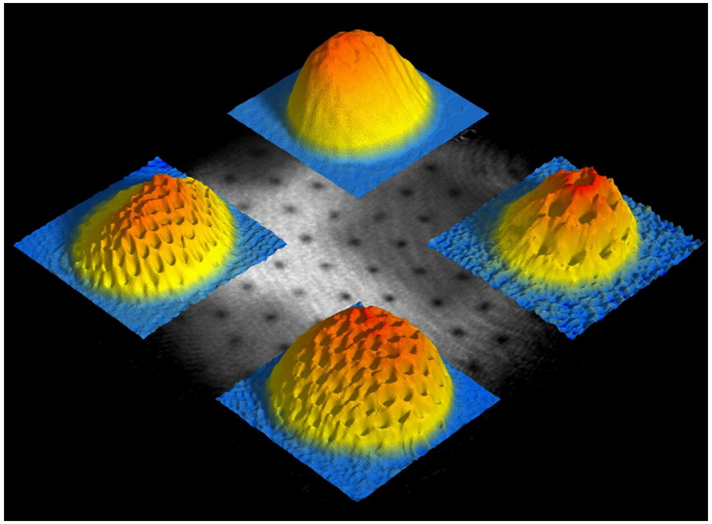
原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体

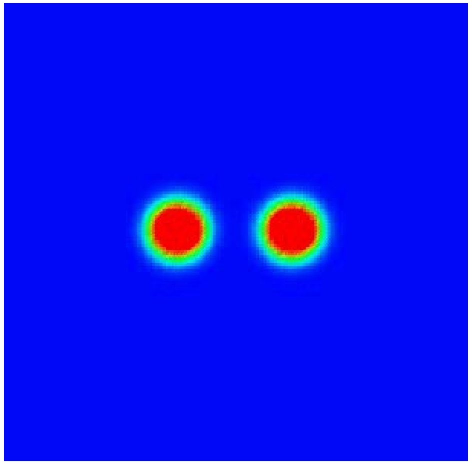


原子気体BECの量子的振る舞い

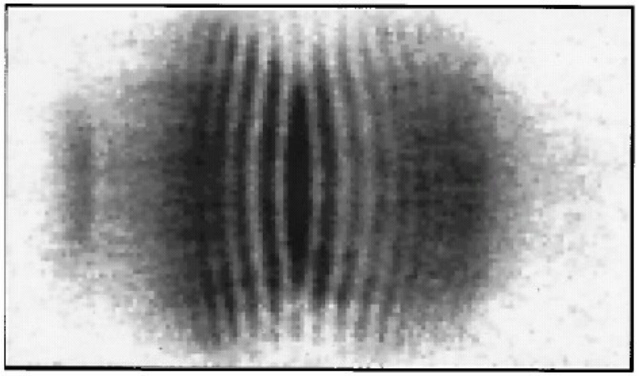
量子渦格子形成



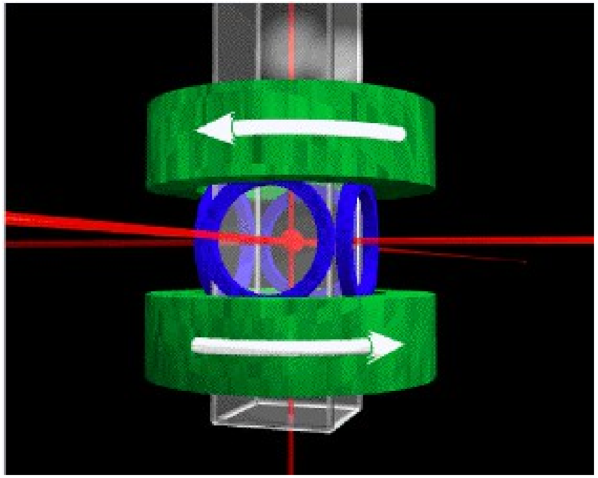




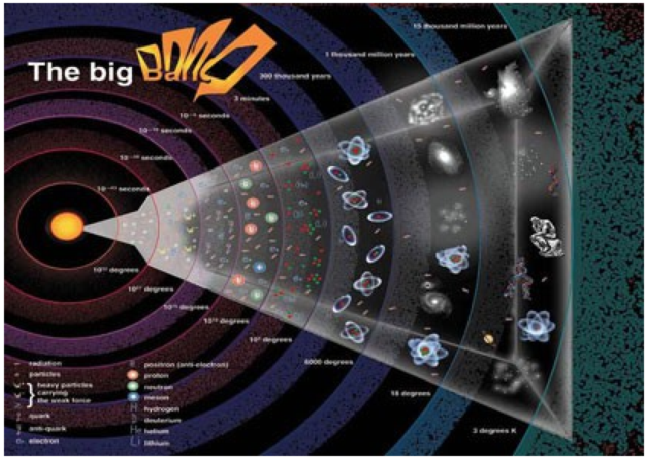
Hanbry-Brown-Twiss型量子干渉



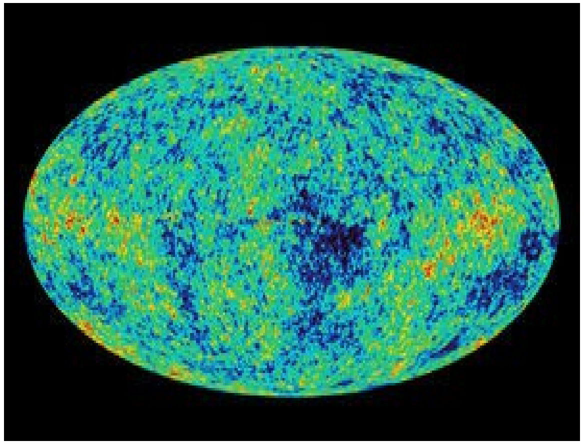
冷却原子を使って宇宙論を検証することが理論的・実験的に行われている

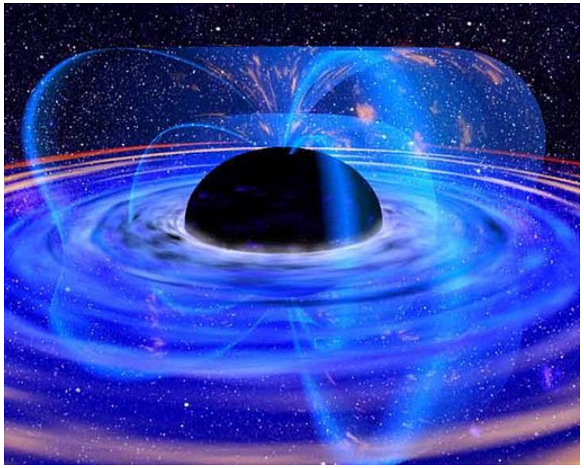


インフレーション宇宙



背景輻射揺らぎ

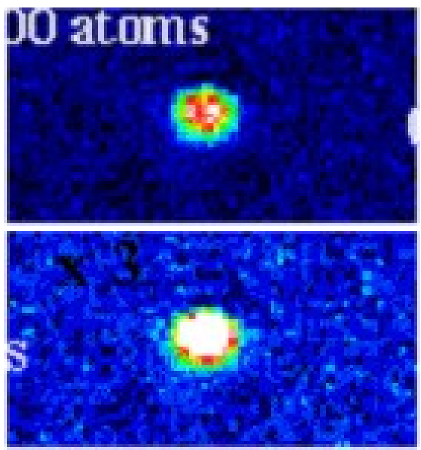




ブラックホールと
ホーキング輻射

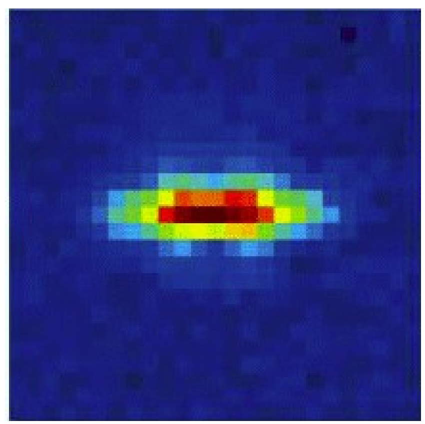
冷却原子を使って宇宙論を検証することが理論的・実験的に行われている

引力BECによるボースノバ



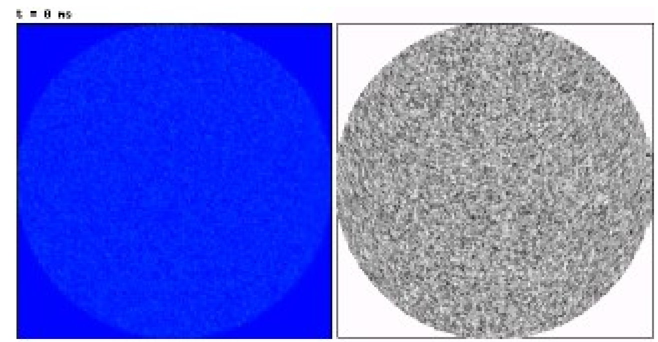
E. A. Donley, et al. Nature **412**, 295 (2001)

双極子相互作用による非等方なボースノバ

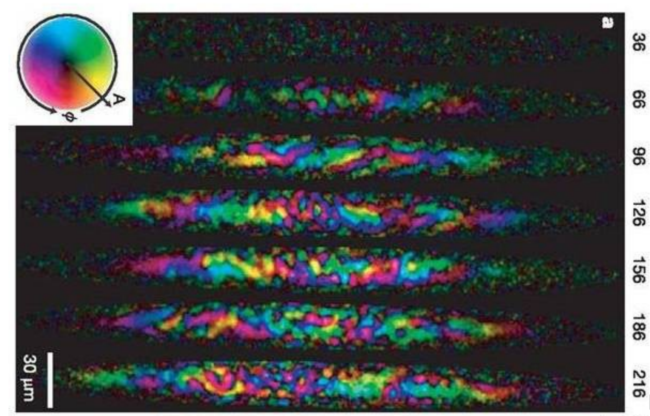


T. Lahaye, et al. PRL **101**, 080401 (2008)

Kibble-Zurek機構

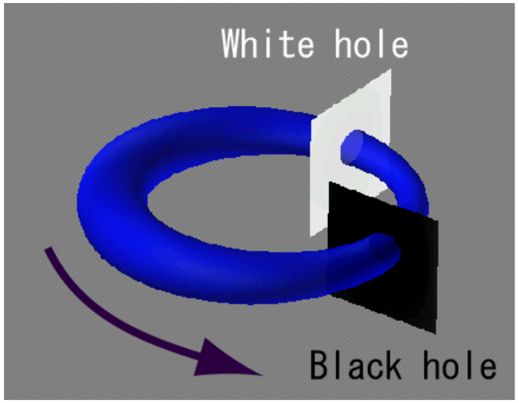


H. Saito, et al. PRA **76**, 043613 (2007)



Sadler et al., Nature **443**, 312 (2006)

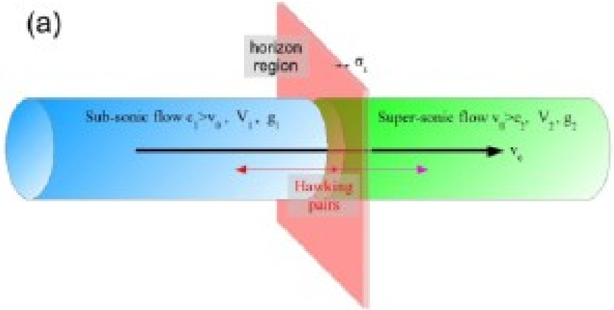
BECを用いた流体ブラックホール



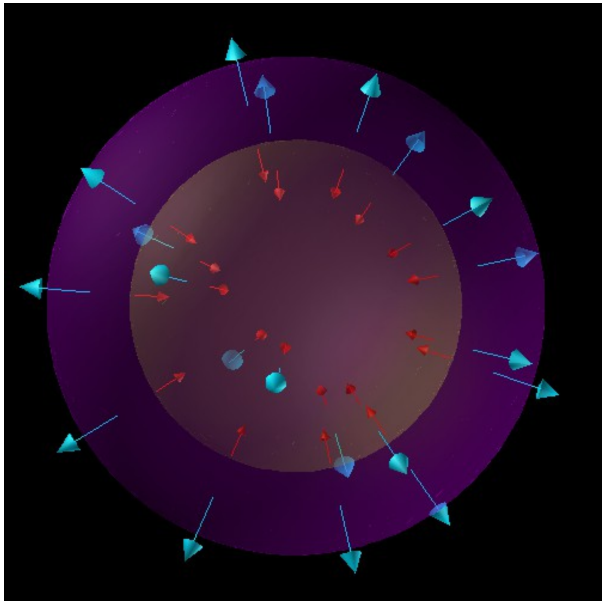
環状BECを用いたブラックホール・ホワイトホール対

L. J. Garay, et al.
PRA **63**, 023611

非一様Feshbach共鳴を用いた流体ブラックホール



I. Carusotto, et al. arXiv:0803.0507



膨張BECの外側にできるブラックホール

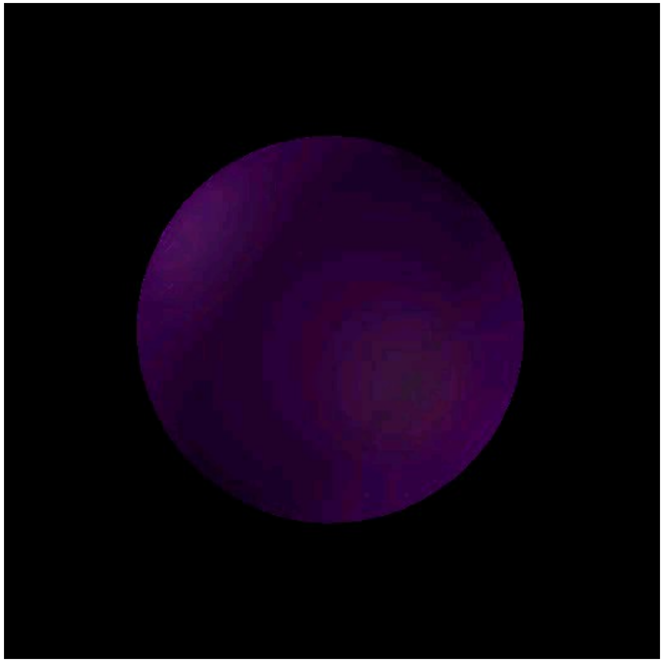
Y. Kurita and T. Morinari,
PRA**76** (2007) 053603

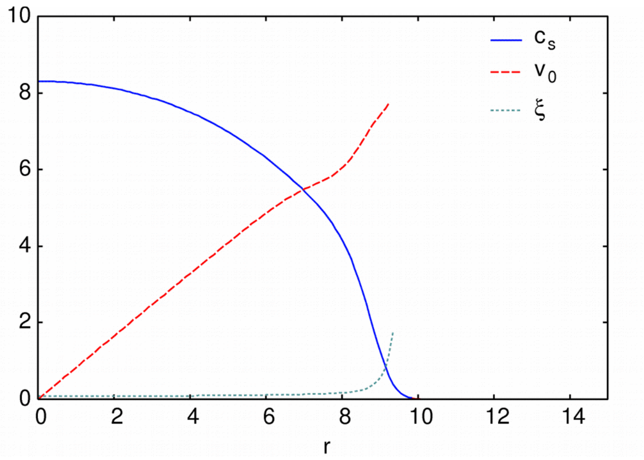
BECのメリット・デメリット

- メリット
  1. 粒子間相互作用が弱いため、理論的な解析を行いやすい。
  2. マクロな量子流体であるため、量子論的粒子生成といった量子効果を調べやすい。
  3. 相互作用、粒子数を初めとしたあらゆる物理的パラメータをコントロールできる。
- デメリット
  1. 希薄な気体であるため流体近似のできない領域が存在する。
  2. 幾何学的形状のコントロールが難しい。

膨張BECの外側にできるブラックホール

Y. Kurita and T. Morinari, PRA**76** (2007) 053603





膨張するBECの外側に流速が音速を超える領域ができる

→シンプルな状況

（膨張BECのような）シンプルなシステムで（Hawking輻射のような）量子論的効果を考えてみる。

本研究の目的

- 膨張・収縮BECの数値シミュレーションを行い、また量子論的粒子生成のアナロジーを考える。
- 膨張BECと膨張宇宙のアナロジーを考え、その粒子生成を計算する。
- 膨張BECの外側にできるブラックホールのHawking輻射を考える。

Formulation（簡潔に）

ボース場のハミルトニアン

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \hat{\psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} - \mu + V_{\mathrm{trap}} + U_0 \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \right] \hat{\psi}$$

μ：化学ポテンシャル

$V_{\mathrm{trap}} = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$：トラップ

$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$：結合定数

Bogoliubov 近似 :$\hat{\psi} \to \Psi$（：凝縮体）$+ \hat{\phi}$（：Bogoliubov 場）

$\hat{\phi}$ の 3 次、4 次のオーダーを無視する

Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [L + U_0 |\Psi|^2] \Psi$$

$L = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

$\Psi = \sqrt{n_0} \exp(\mathrm{i}S)$

$\boldsymbol{j}_0 = n_0 \frac{\hbar}{m} \nabla S$

Formulation（簡潔に）

Bogoliubov-de Gennes方程式

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\tilde{\phi} = W\tilde{\phi} + U_0 n_0 \tilde{\phi}^\dagger$$

$$-\mathrm{i}\hbar\partial_t\tilde{\phi} = W\tilde{\phi}^\dagger + U_0 n_0 \tilde{\phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & W = L + 2U_0 n_0 + \hbar\partial_t S \\ & \tilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S}\hat{\phi},\ \tilde{\phi}^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}\hat{\phi}^\dagger \\ & \hat{\rho}' = \Psi^*\phi + \phi^\dagger\Psi \\ & \hat{\boldsymbol{j}}' = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\phi + \phi^\dagger\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\phi - (\nabla\phi^\dagger)\Psi] \end{aligned}}$$

保存則

$$\partial_t n_0 + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_0 = 0$$

$$\partial_t \hat{\rho}' + \mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{j}}' = 0$$

Formulation（簡潔に）

新しい場を導入する

$$\Phi' = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}\sqrt{\rho_0}}(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger)$$

流体近似：回復長ξ（BECのコヒーレンス長）より短いスケールを全て無視する

$$\xi = \frac{h}{\sqrt{2mU_0 n_0}}$$

曲がった時空上でのKlein-Gordon方程式のアナロジー

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi'\right] = 0$$

$$g_{\mu\nu} = \Lambda c_\mathrm{s}\begin{pmatrix} -(c_\mathrm{s}^2 - v_0^2) & -v_0^a \\ -v_0^b & \delta_{ab} \end{pmatrix}$$

$$g = \det g_{\mu\nu}$$

$$c_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{n_0 U_0}{m}}\ \text{：BEC の音速}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\hbar}{m}\nabla S\ \text{：超流動速度場}$$

Formulation（簡潔に）

Bogoliubov場を展開

$$\tilde{\phi} = \sum_i [u_i \hat{\alpha}_i - v_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger]$$

$$\tilde{\phi}^\dagger = \sum_i [u_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger - v_i \hat{\alpha}_i]$$

$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger$: 素励起 Bogolon の消滅・生成演算子

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

$$\int \mathrm{d}V (u_j^* u_k - v_j^* v_k) = \delta_{jk}$$

$$\int \mathrm{d}V (u_j u_k - v_j v_k) = 0$$

: Klein-Gordon 内積とのアナロジー

系の3つの粒子数（密度）

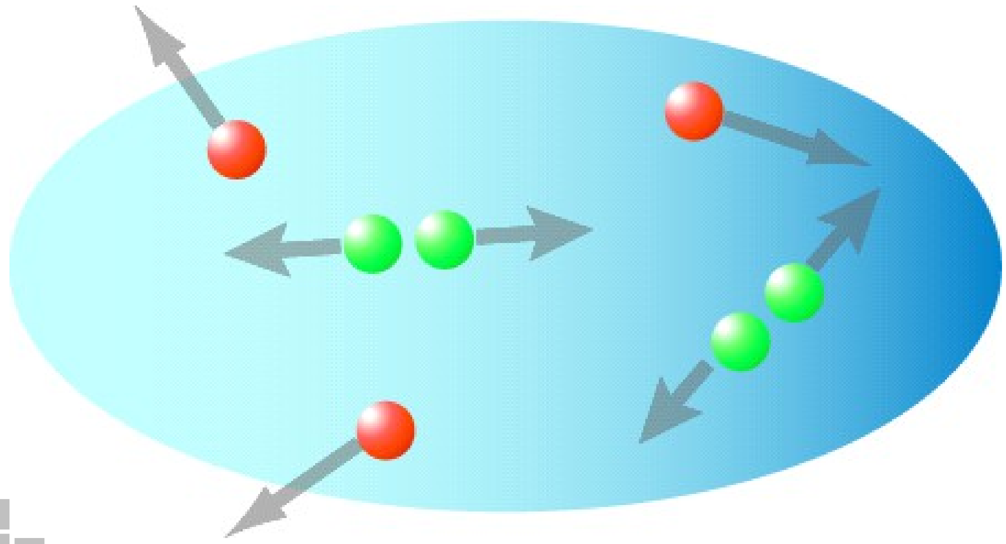
$$n = n_0 + n_{\mathrm{B}} + n_{\mathrm{Q}}$$

凝縮体：$n_0 = |\Psi|^2$

Bogolon：$n_{\mathrm{B}} = \sum_j (|u_j|^2 + |v_j|^2)\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle$

Quantum depletion：$n_{\mathrm{Q}} = \langle \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \rangle - n_{\mathrm{B}} = \sum_j |v_j|^2$

非凝縮体：$n' = n_{\mathrm{B}} + n_{\mathrm{Q}}$

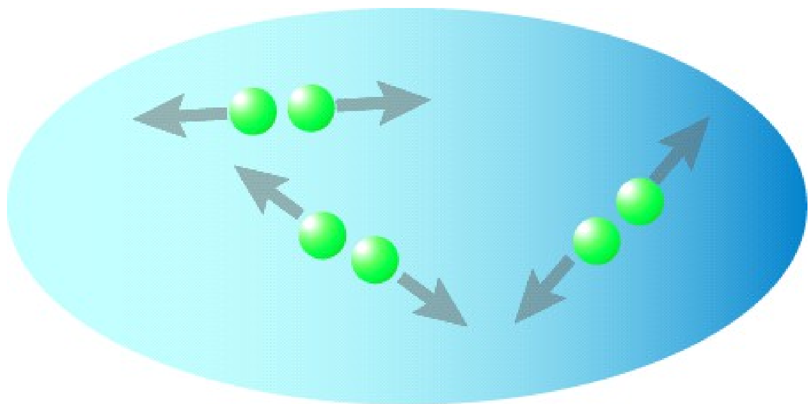


- 凝縮体
- Bogolon：素励起
- Quantum depletion：粒子間相互作用による量子揺らぎで、対になって存在する

アナロジー時空における粒子生成

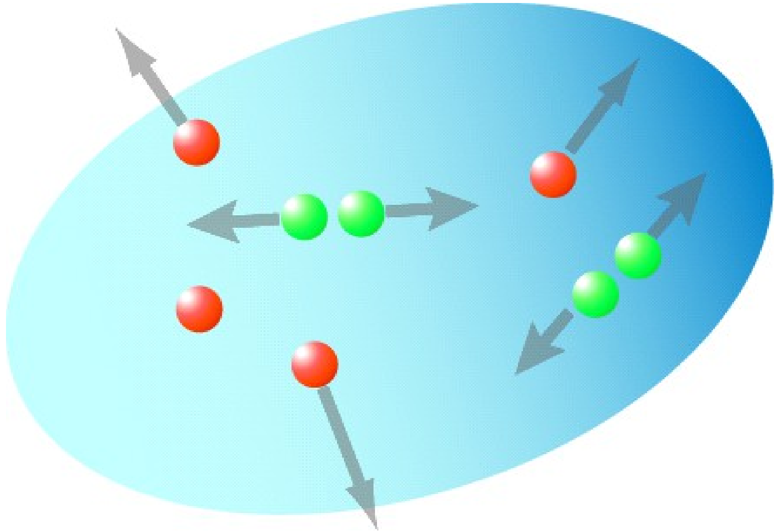
凝縮体の時間発展を考える

定常状態1



Bogolonのない初期状態から出発する（Depletionのみ）

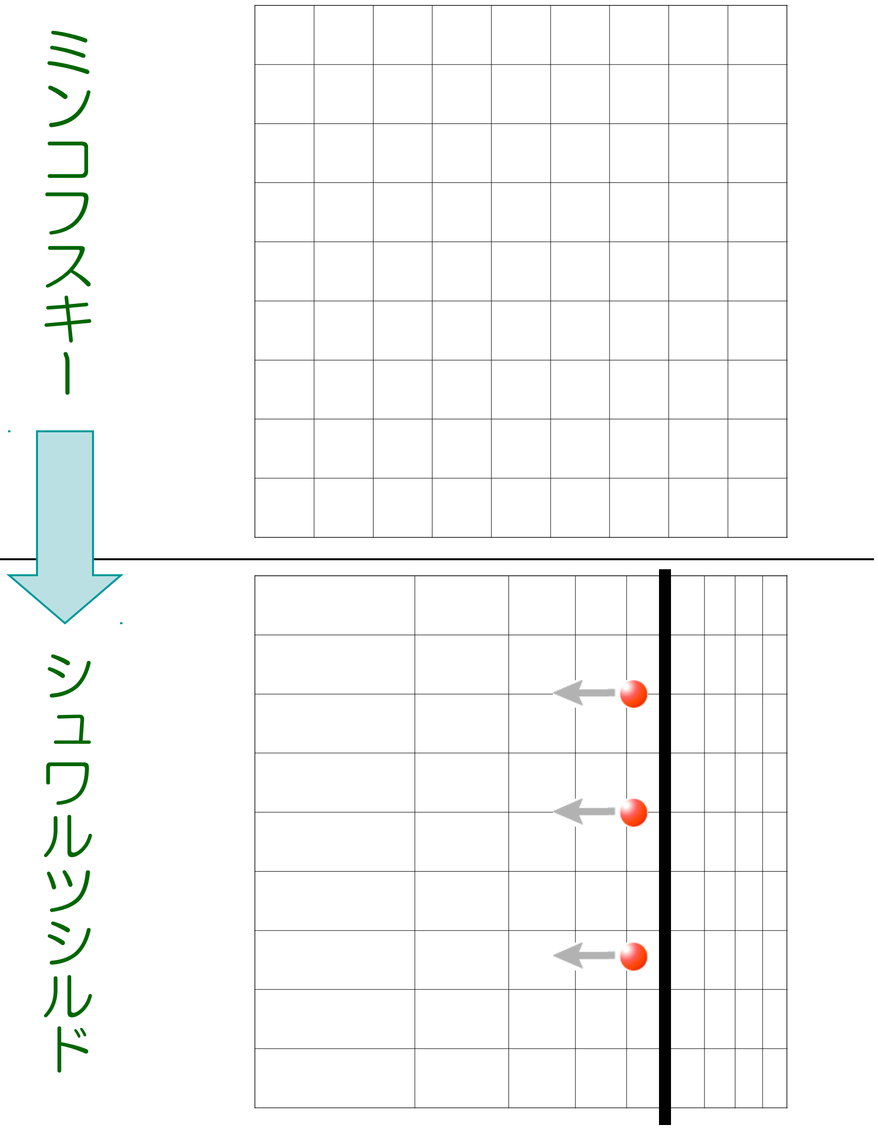
定常状態2



BECが時間発展しBogolonやDepletionの定義が変化するため、元々Depletionだったものや、凝縮体から生まれたDepletionの幾つかがBogolonとして再定義されるようになる

→粒子(Bogolon)生成

Hawking輻射でイメージ



時空の変化により真空の定義が変化し、粒子生成が生じる

粒子(Bogolon)生成の　アナロジーが成り立つか？

粒子生成

$$\Phi' \propto \tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger = \sum_i \left[(u_i^{(1)} + v_i^{(1)})\hat{a}_i^{(1)} + (u_i^{(1)*} + v_i^{(1)*})\hat{a}_i^{(1)\dagger} \right] : \text{定常状態 } 1$$

$$= \sum_i \left[(u_i^{(2)} + v_i^{(2)})\hat{a}_i^{(2)} + (u_i^{(2)*} + v_i^{(2)*})\hat{a}_i^{(2)\dagger} \right] : \text{定常状態 } 2$$

$$\hat{a}_i^{(1)} = \sum_j (A_{ij}\hat{a}_j^{(2)} + B_{ij}\hat{a}_j^{(2)\dagger})$$

$$\text{粒子生成 }: {}_{(1)}\langle 0 | \hat{a}_i^{(2)\dagger} \hat{a}_i^{(2)} | 0 \rangle_{(1)} = \sum_j |B_{ij}|^2$$

$$B_{ij} = \int_{t=t_2} d\boldsymbol{r}\, (u_i^{(2)} v_j^{(1)} - v_i^{(2)} u_j^{(1)}) : \text{Klein-Gordon 内積より}$$

アナロジー

•凝縮体（の流れ）	•（曲がった）時空
•音速	•光速
•Bogolonの生成	•粒子生成
•Quantum depletion	•真空揺らぎ？

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi'\right]=0$$

$$g_{\mu\nu}=\Lambda c_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}-(c_{\mathrm{s}}^2-v_0^2) & -v_0^a \\ -v_0^b & \delta_{ab}\end{pmatrix}$$

重要な問題点？？？

現時点でのFormulationで全流量：$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_\mathrm{B} + \boldsymbol{j}_\mathrm{Q}$ が保存則

$$\partial_t n + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = 0$$

を満たしていない（非凝縮体部分にわき出しが存在する）

保存則が凝縮体で閉じている：$\partial_t n_0 + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_0 = 0$
ため、非凝縮体から凝縮体への影響がない。

Backreaction（非凝縮体の運動が凝縮体へ与える影響）の考慮が必要になる？

（宇宙論の粒子生成はいいのかもしれないが、少なくとも実験系のダイナミクスをきちんと記述するには不十分）

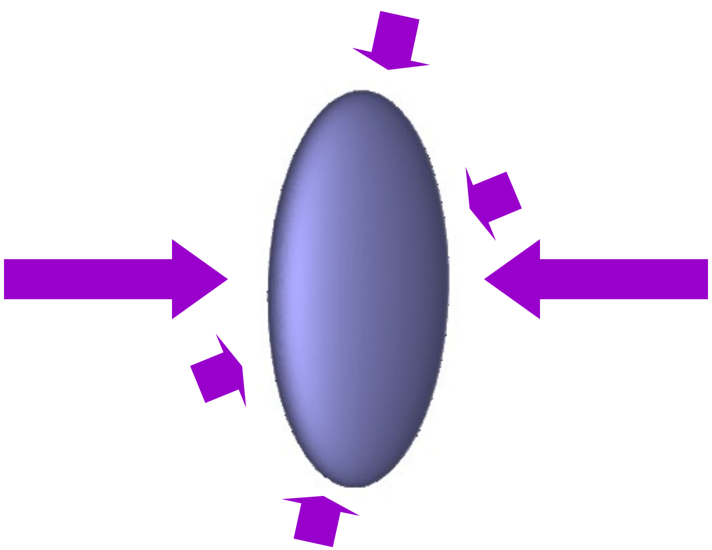
数値シミュレーション

膨張・収縮Bose-Einstein凝縮体のシミュレーション

１次元方向のみ強く閉じこめられたディスク型BEC

$$\omega_x \gg \omega_y = \omega_z$$

擬１次元ダイナミクス（１次元方向のみ時間発展する）



$$\nabla \sim (\partial_x, 0, 0)$$

x 方向のみ
膨張・収縮

シミュレーション

$\omega_x = \omega_x^{\mathrm{i}}$ にて定常状態を用意

↓

$t = 0$ において $\omega_x^{\mathrm{f}} = 0.707\ \omega_x^{\mathrm{i}}$ としてBECを膨張・収縮

シミュレーションパラメーター

^{87}Rb原子気体BEC

$$m = 1.46 \times 10^{-25}\mathrm{kg}$$

$$a = 5.61\mathrm{nm}$$

$$N = 250000$$

$$\omega_x^{\mathrm{i}} = 150 \times 2\pi\mathrm{Hz}$$

$$\omega_y = \omega_z = 50 \times 2\pi\mathrm{Hz}$$

物理量のユニット

$$\hat{t} = 1/\omega_x^{\mathrm{i}}$$

$$\hat{x} = a_{\mathrm{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega_x^{\mathrm{i}}}$$

$$\hat{E} = \hbar\omega_x^{\mathrm{i}}$$

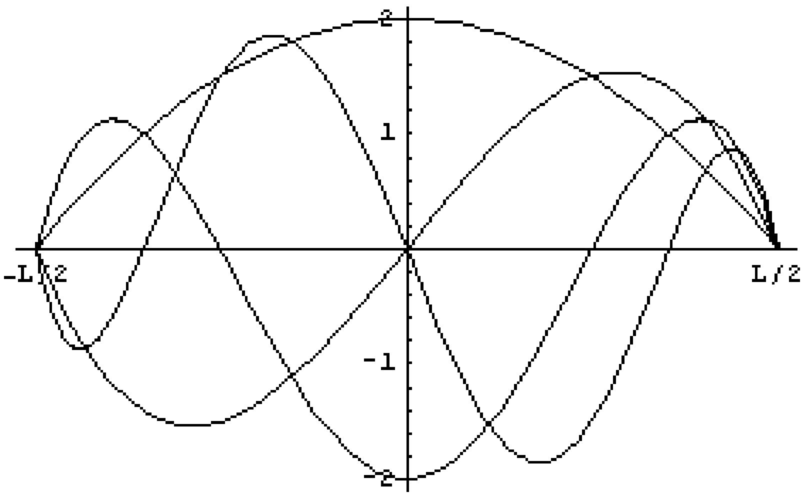
数値計算法

１次元シミュレーション：

全格子点数：1024
空間刻み：　$\Delta x = 0.0625$
時間刻み：　$\Delta t = 1\times 10^{-8}$

数値計算法：

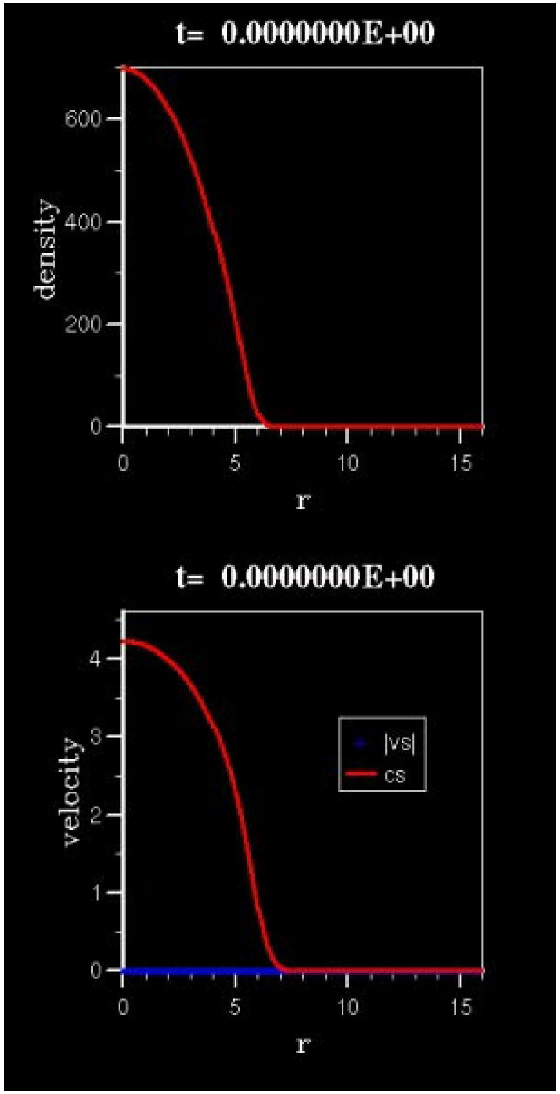
空間：エリアジング完全除去の元でのチェビシェフ－ガラーキン法
　（境界条件：ディリクレ境界条件）
時間：４次のルンゲークッタ法



境界条件を満たすチェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式波動関数の基底とし、２０４８個のチェビシェフ多項式で波動関数を展開する。そのうち１０２４個を実際の計算に用い、残り１０２４個をエリアジング除去に用いる。ハミルトニアンを対角化する際にも２０４８個の基底を用いる

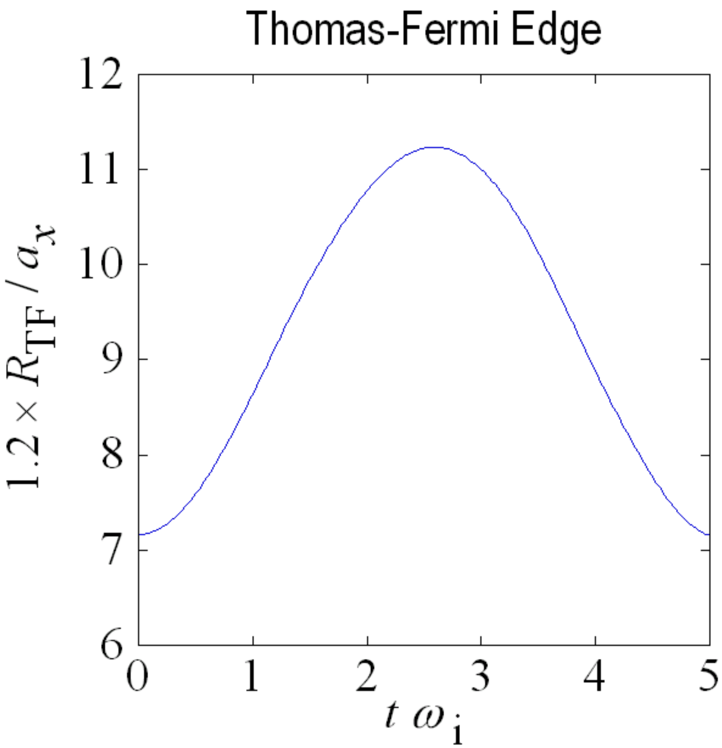
Gross-Piteavskii方程式の時間発展



凝縮体密度

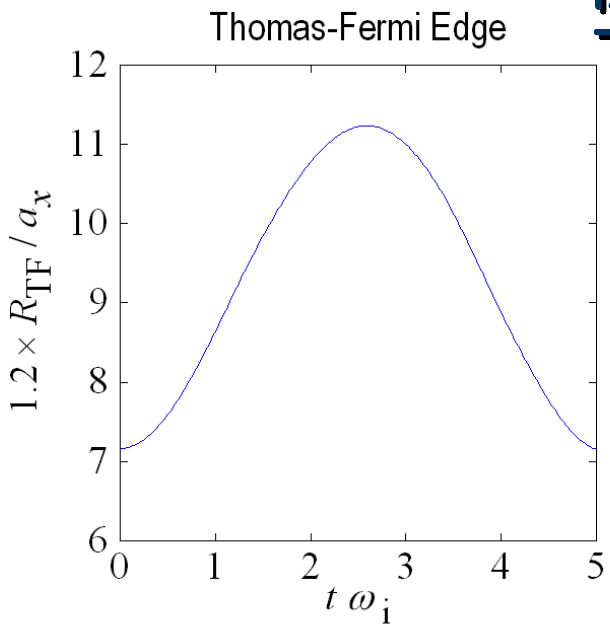
音速

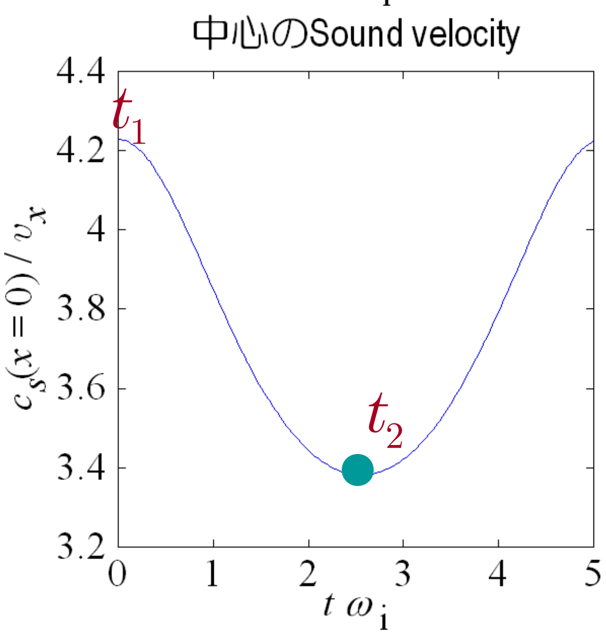
流速（絶対値）



Thomas-Fermi edge（凝縮体の端）が振動している

宇宙膨張のアナロジー





BECが膨張したときに音速が減少している→音波の伝搬に、より時間がかかるようになっている

光速の伝搬に時間がかかるようになることに対応し、宇宙の膨張を表している

Bogoliubov-de Gennes方程式の真空状態

Bogoliubov-de Gennes 方程式（初期状態）

$$\tilde{\phi} = \sum_i [u_i \hat{\alpha}_i - v_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger]$$

$$\tilde{\phi}^\dagger = \sum_i [u_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger - v_i \hat{\alpha}_i]$$

$\partial_t S$ は
扱いにくい

$$\hat{\phi} = \sum_i [u_i' \hat{\alpha}_i - v_i'^* \hat{\alpha}_i^\dagger]$$

$$\hat{\phi}^\dagger = \sum_i [u_i'^* \hat{\alpha}_i^\dagger - v_i' \hat{\alpha}_i]$$

$$\boxed{\omega_i \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + 2U_0 n_0 & -U_0 \Psi^2 \\ U_0 \Psi^{*2} & -L - 2U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix}}$$

行列を対角化することでBogolonの真空状態が求まる

Bogoliubov-de Gennes方程式の時間発展

Bogoliubov-de Gennes 方程式（時間発展）

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi = [L + U_0|\Psi|^2]\Psi$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + 2U_0 n_0 & -U_0\Psi^2 \\ U_0\Psi^{*2} & -L - 2U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix}$$

Gross-Pitaevskii方程式と連立させて解く

計算のフローチャート

$$\omega_i^{(1)} \begin{pmatrix} u_i^{(1)\prime} \\ v_i^{(1)\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + 2U_0 n_0 & -U_0 \Psi^2 \\ U_0 \Psi^{*2} & -L - 2U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)\prime} \\ v_i^{(1)\prime} \end{pmatrix} \qquad t = t_1$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi = [L + U_0 |\Psi|^2]\Psi$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i^{(1)\prime} \\ v_i^{(1)\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + 2U_0 n_0 & -U_0 \Psi^2 \\ U_0 \Psi^{*2} & -L - 2U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)\prime} \\ v_i^{(1)\prime} \end{pmatrix} \qquad t_1 < t < t_2$$

$$\omega_i^{(2)} \begin{pmatrix} u_i^{(2)\prime} \\ v_i^{(2)\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + 2U_0 n_0 & -U_0 \Psi^2 \\ U_0 \Psi^{*2} & -L - 2U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(2)\prime} \\ v_i^{(2)\prime} \end{pmatrix} \qquad t = t_2$$

粒子生成：$_{(1)}\langle 0|\hat{a}_i^{(2)\dagger}\hat{a}_i^{(2)}|0\rangle_{(1)} = \sum_j |B_{ij}|^2$

$$B_{ij} = \int_{t=t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, (u_i^{(2)} v_j^{(1)} - v_i^{(2)} u_j^{(1)})$$

直交性

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,[u_i u_j^* - v_i v_j^*] = A\delta_{ij}$$

素励起 $: A = 1$

凝縮体 $: A = 0,\ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|u_i|^2 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|v_i|^2 = N_0$

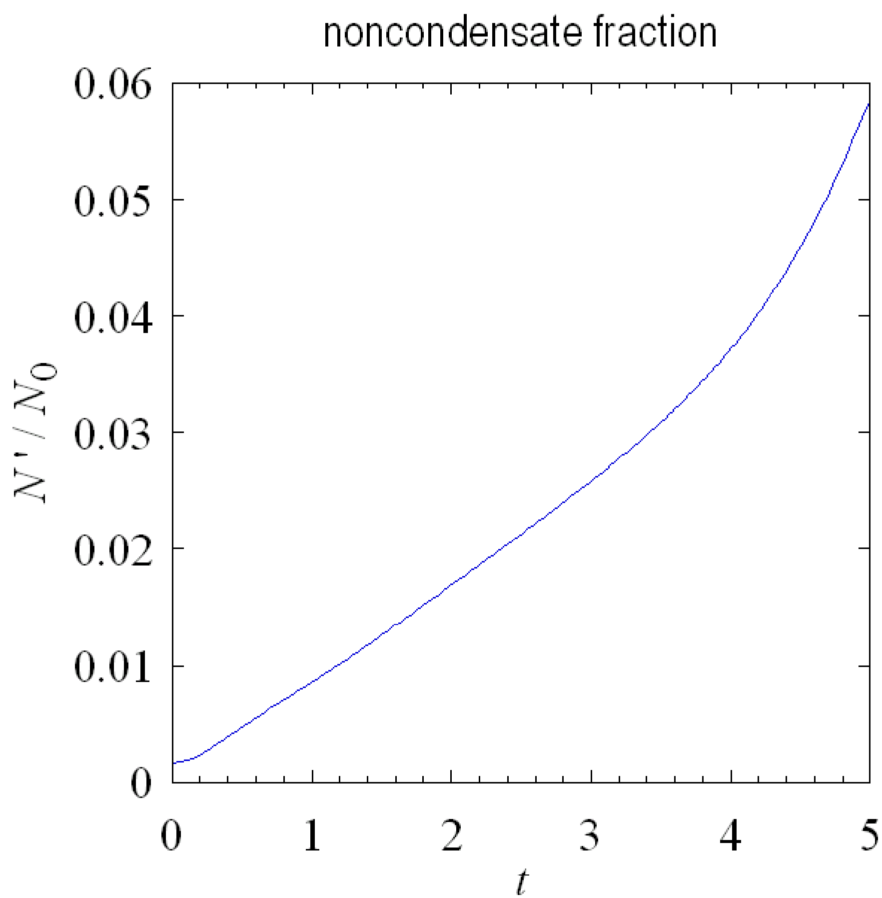
$(\because u_i = v_i^* = \Psi)$

時間発展の方では数値計算の精度内で直交性を満たしている。また対角化の方では縮退しているGaplessのモード間は通常直交しないが、適当な線形結合をとることにより、各々を直交させ、かつ

$$\sum_{i \in \mathrm{gapless}} u_i = \Psi$$

を満たすことができる。

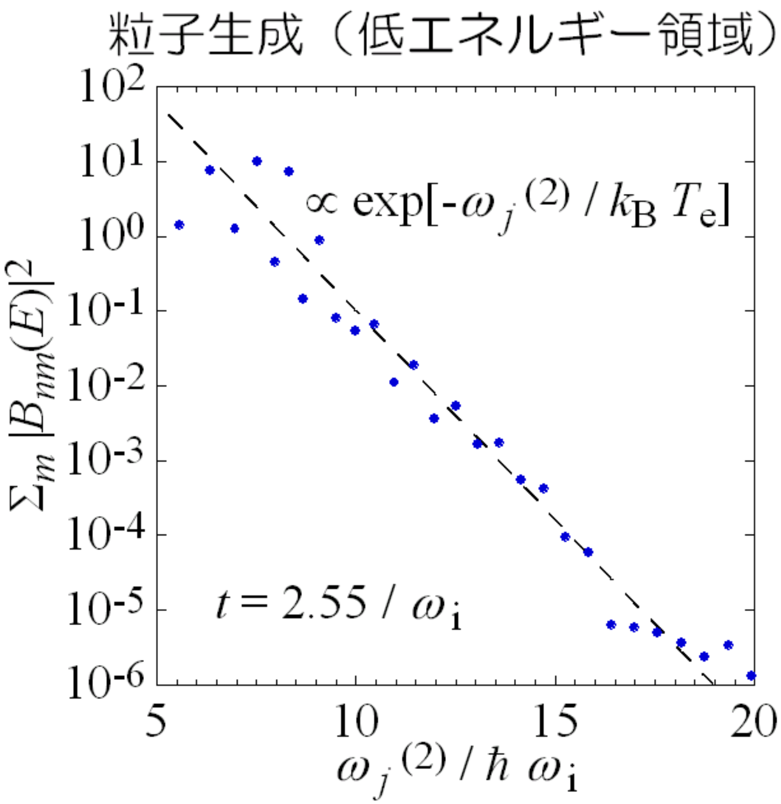
非凝縮体粒子数(= Bogolon + Depletion)

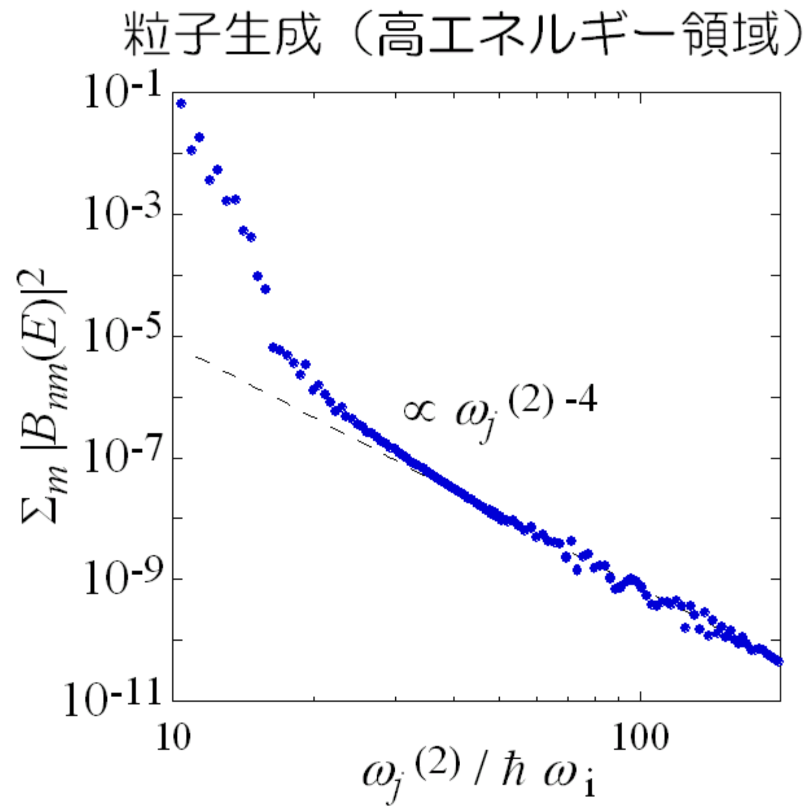


凝縮体の運度により非凝縮体が増えていっている

→Backreactionが入っていないが、増えた分のいくらかが粒子生成に寄与すると考えればある程度は妥当な計算だと思われる

粒子生成のスペクトル





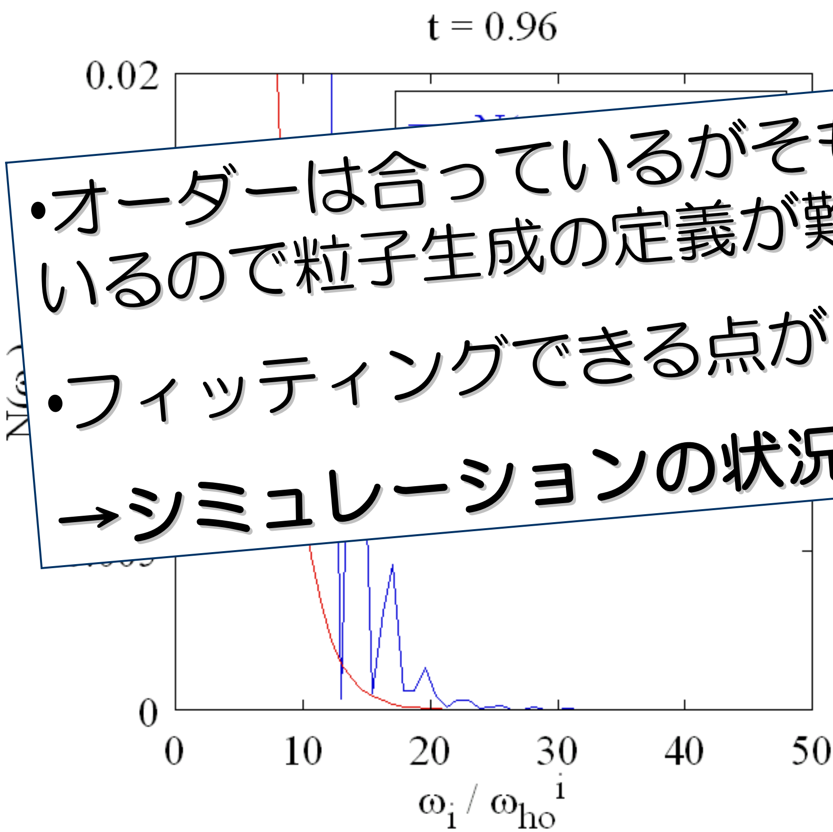
温度T_e = 5.6 nKのボルツマン分布に従う

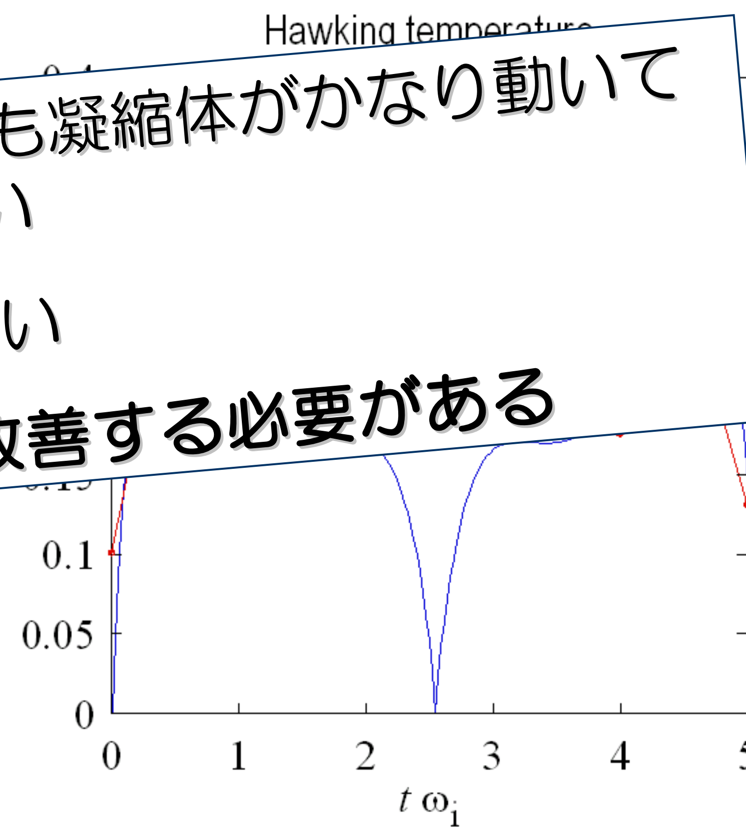
逆4乗のべき分布（流体近似が成り立たない領域なのでアナロジー的には無意味？）

ホーキング輻射

膨張の途中で粒子生成を計算

$$T_{\rm pc} = \frac{\hbar}{2\pi k_{\rm B}} \frac{\partial(v_{\rm s} - c_{\rm s})}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\rm H}}$$



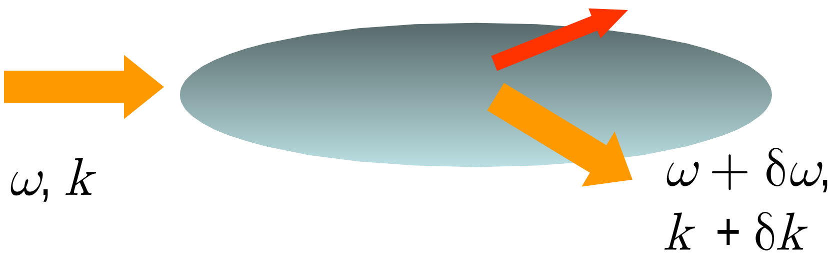


- オーダーは合っているがそもそも凝縮体がかなり動いているので粒子生成の定義が難しい
- フィッティングできる点が少ない

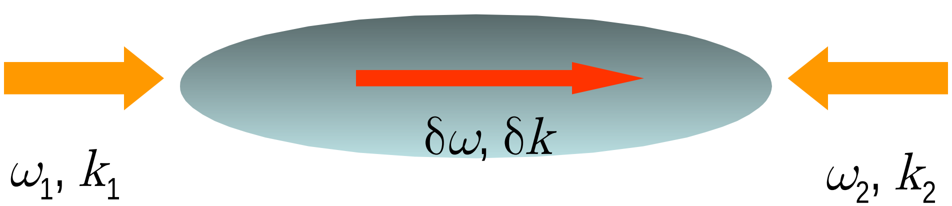
→シミュレーションの状況を改善する必要がある

実験はどうすればいい？→Bragg Spectroscopy

Bragg spectroscopy：系に光子を入れて励起させ励起状態（BogolonやDepletion）を調べる



粒子を励起させる（超流動Heの中性子散乱に対応）。



凝縮体や特定量子数の非凝縮体のみを動かす。

実験はどうすればいい？→Bragg Spectroscopy

パルスを当てない　　　　　　　　　　パルスを当てる

凝縮体が吹っ飛ばされる

凝縮体が吹っ飛ばされ、Bogolonとdepletionのみが残るのでそこからu_i, v_i, ω_i の情報を得ることができるか？

詳細なBragg Spectroscopyのシミュレーションが必要！

まとめ（考察）

- 膨張・収縮するBECのシミュレーションから膨張宇宙における粒子生成のアナロジーを考えた
- 得られたスペクトルから低エネルギー領域において、 $T_{\mathrm{e}} = 5.6$ nKのボルツマン分布を得た←実験でぎりぎり観測可能か？
- （例えば）宇宙背景輻射の揺らぎに対応している？
→詳しい理論的解析が必要

今後の課題

1. 得られたボルツマン分布の解析
2. Backreactionの導入
3. Hawking輻射のシミュレーション
4. 実験との対応と実験方法の提案：Bragg spectroscopyのシミュレーション
5. 量子計算（Bogoliubov近似を使わない）

今後の課題

等方な宇宙からの非等方な粒子生成の計算
→1次元計算から球対称BECへの拡張

Y. Kurita and T. Morinari, PRA**76** (2007) 053603