膨張・収縮ボース・アインシュタイン凝縮体における粒子生成のシミュレーション

東京大学・関西学院大学・京都大学・大阪市立大学

小林未知数・栗田泰生・森成隆夫

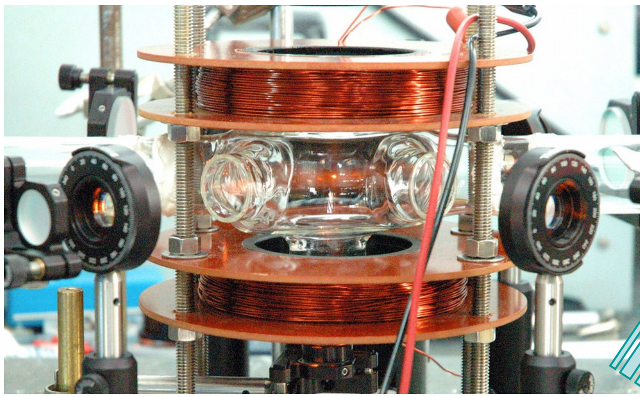
坪田誠・石原秀樹

日本物理学会　秋季大会　２００８年9月２２日

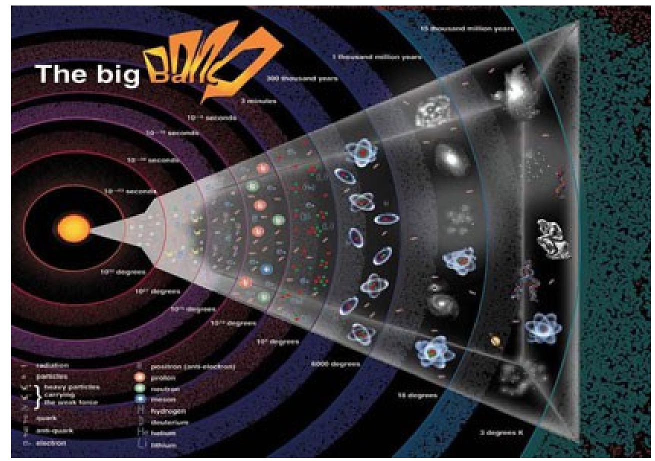
Contents

研究目的：量子論的宇宙論（粒子生成）を原子気体BECを用いて検証する

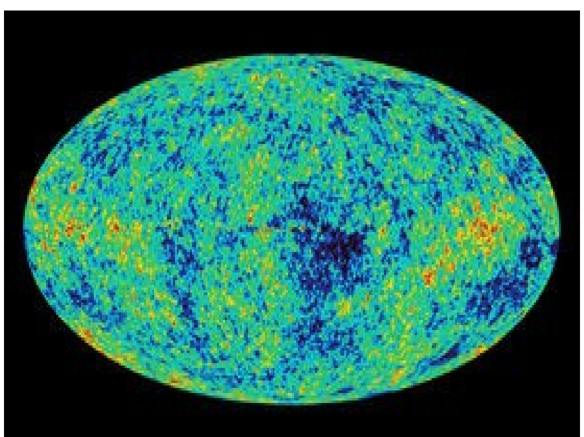
原子気体BEC



インフレーション宇宙

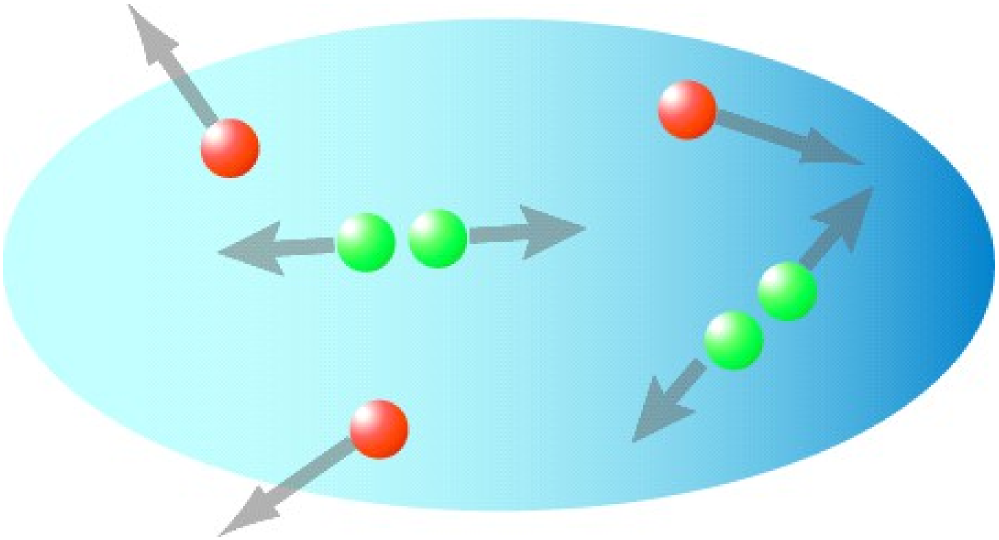


背景輻射揺らぎ



ブラックホールと
ホーキング輻射

BECにおける粒子生成アナロジーの基本的な考え



•凝縮体

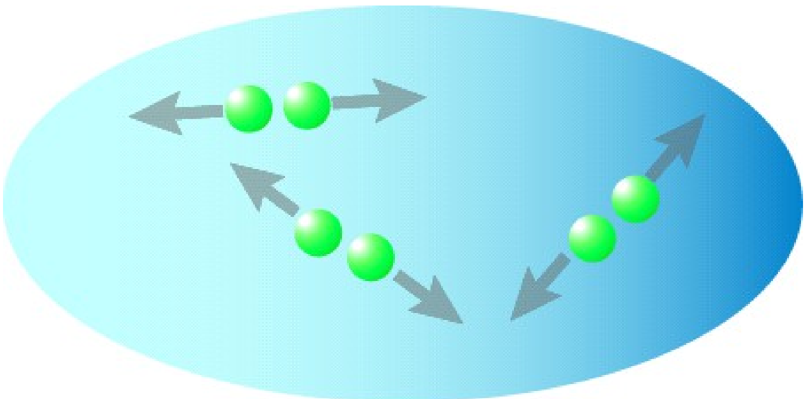
•Bogolon：素励起

•Quantum depletion：凝縮体の相互作用による量子揺らぎで、対になって存在する（$\boldsymbol{k}$ と $-\boldsymbol{k}$ の運動量ペア）

アナロジー時空における粒子生成

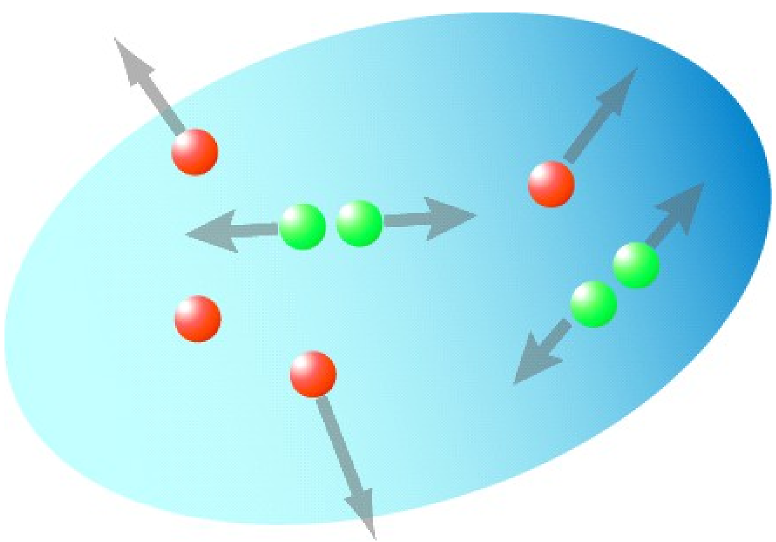
凝縮体の時間発展を考える

定常状態1



Bogolonの真空状態から出発する（Depletionのみ）

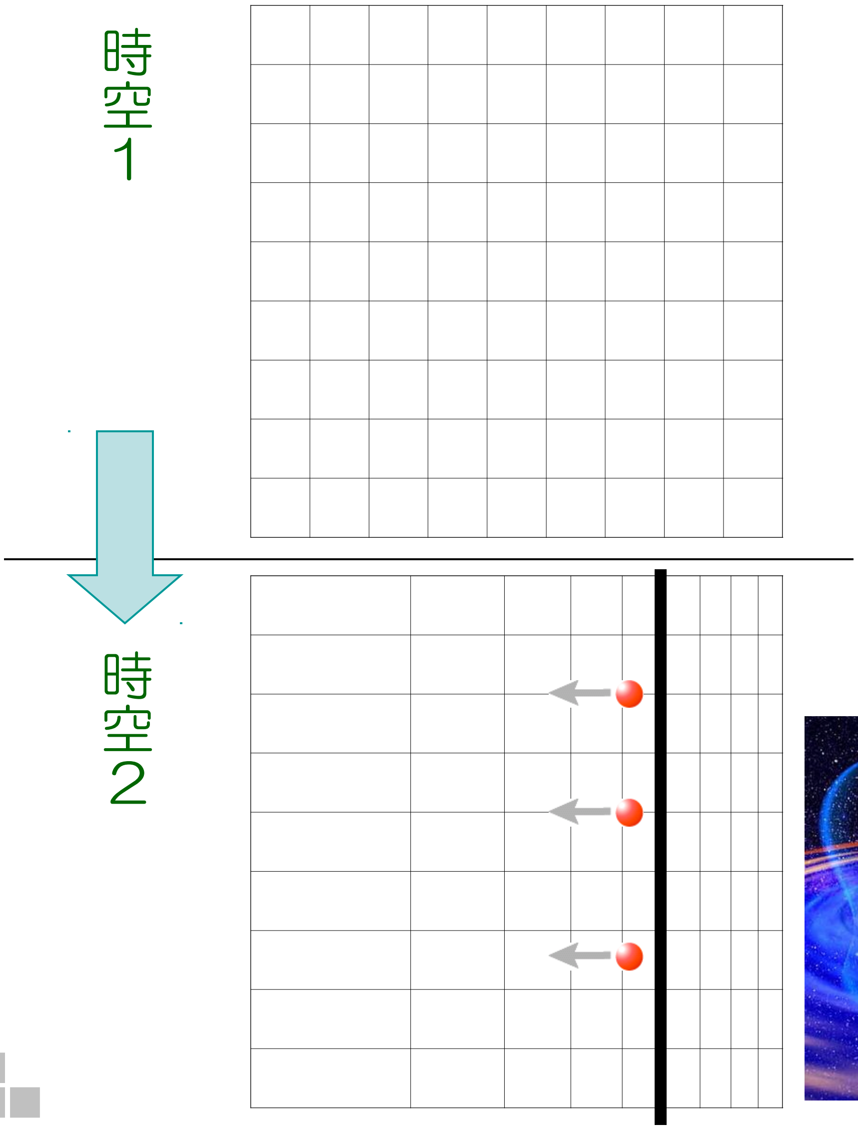
定常状態2



BECが時間発展しBogolonの真空の定義が変化するため、元々Depletionだったものや、凝縮体から生まれたDepletionがBogolonとして**「再定義される」**

→粒子(Bogolon)生成

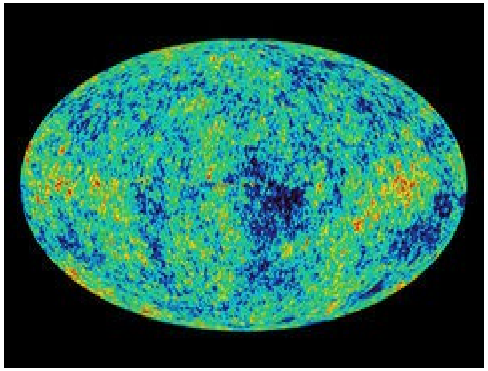
相対論的粒子生成とのアナロジー

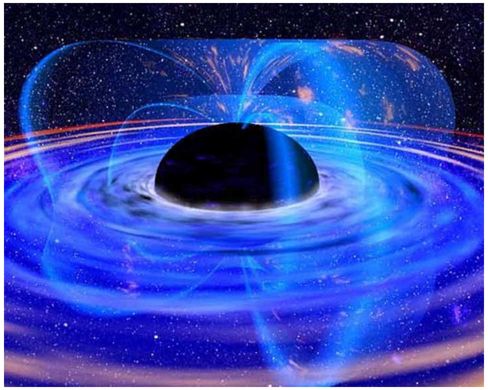


時空の変化により真空の定義が変化し、粒子生成が生じる

粒子(Bogolon)生成のアナロジー

背景輻射揺らぎ





ブラックホールとホーキング輻射

アナロジー

- 凝縮体（の流れ）
- Bogolonの生成
- （音速）

- （曲がった）時空
- 粒子生成
- （光速）

BECのメリット

1. 粒子間相互作用が弱いため、理論的な解析を行いやすい（⇔超流動^{4}He）。
2. マクロな量子流体であるため、量子論的粒子生成といった量子効果を調べられる（⇔古典流体）。
3. 相互作用、粒子数を初めとしたあらゆる物理パラメータをコントロールできる。

本研究の目的

- 膨張・収縮BECの数値シミュレーションを行い、また量子論的粒子生成のアナロジーを考える。
- 膨張BECと膨張宇宙のアナロジーを考え、その粒子生成を計算する。

Formulation

ボース場演算子の時間発展

$$i\hbar\partial_t\hat{\psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + V_{\mathrm{trap}} + U_0\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \right]\hat{\psi}$$

μ：化学ポテンシャル

$V_{\mathrm{trap}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$：トラップ

$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$：結合定数

Bogoliubov 近似：$\hat{\psi}$ の代わりに Ψ（凝縮体）と $\hat{\phi}$（Bogoliubov 場）で記述する

$\hat{\phi}$ の 3 次、4 次のオーダーを無視する

Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [L + U_0|\Psi|^2]\Psi$$

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$\Psi = \sqrt{n_0}\exp(iS)$$

$$\boldsymbol{j}_0 = n_0\frac{\hbar}{m}\nabla S$$

（第６３回年次大会：24aRF-6）

Formulation

Bogoliubov-de Gennes方程式

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\tilde{\phi} = W\tilde{\phi} + U_0 n_0 \tilde{\phi}^\dagger$$

$$-\mathrm{i}\hbar\partial_t\tilde{\phi} = W\tilde{\phi}^\dagger + U_0 n_0 \tilde{\phi}$$

$$W = L + 2U_0 n_0 + \hbar\partial_t S$$

$$\tilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S}\hat{\phi},\ \tilde{\phi}^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}\hat{\phi}^\dagger$$

$$\hat{\rho}' = \Psi^*\phi + \phi^\dagger\Psi$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}' = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\phi + \phi^\dagger\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\phi - (\nabla\phi^\dagger)\Psi]$$

新しい場を導入する

$$\Phi' = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}\sqrt{\rho_0}}(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger)$$

流体近似：回復長ξ（BECのコヒーレンス長）より短いスケールを全て無視する

$$\xi = \frac{h}{\sqrt{2mU_0 n_0}}$$

（第６３回年次大会：24aRF-6）

Formulation

曲がった時空上でのBogoliubov場に対するアナロジーKlein-Gordon方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi'\right]=0$$

$$g_{\mu\nu}=\Lambda c_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}-(c_{\mathrm{s}}^2-v_0^2) & -v_0^a\\ -v_0^b & \delta_{ab}\end{pmatrix}$$

$g=\det g_{\mu\nu}$

$c_{\mathrm{s}}=\sqrt{\dfrac{n_0U_0}{m}}$: BEC の音速

$\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\hbar}{m}\nabla S$: 超流動速度場

- 空間に非一様な超流動速度場が曲がったアナロジー時空に対応する
- 凝縮体の音速が光速に対応

アナロジー

- 凝縮体（の流れ）
- 音速
- Bogolonの生成

- （曲がった）時空
- 光速
- 粒子生成

シミュレーションで粒子生成を検証！

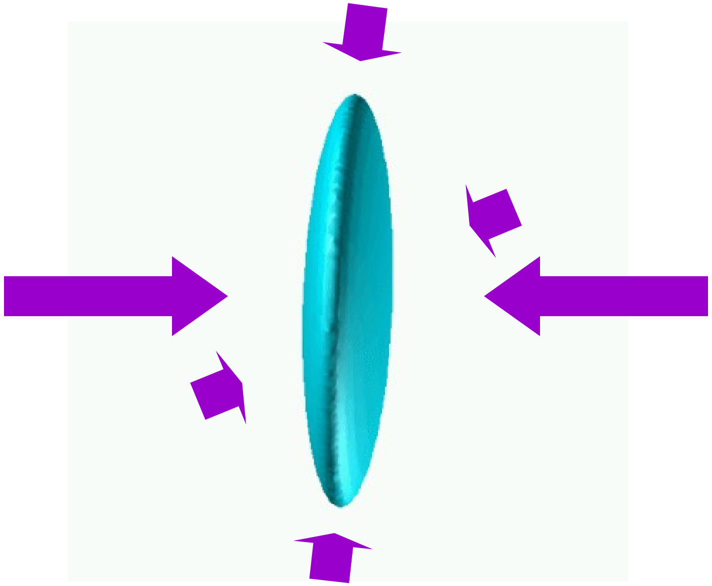
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi'\right]=0$$

$$g_{\mu\nu}=\Lambda c_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix} -(c_{\mathrm{s}}^2-v_0^2) & -v_0^a \\ -v_0^b & \delta_{ab} \end{pmatrix}$$

膨張・収縮Bose-Einstein凝縮体のシミュレーション

１次元方向のみ強く閉じこめられた
ディスク型BEC

$$\omega_x \gg \omega_y = \omega_z$$



擬１次元ダイナミクス（１次元方向のみ時間発展する）

$$\nabla \sim (\partial_x, 0, 0)$$

x 方向のみ
膨張・収縮

シミュレーション

$\omega_x = \omega_x^{\mathrm{i}}$ にて定常状態を用意

$\downarrow$

$t = 0$ において $\omega_x^{\mathrm{f}} = 0.707\ \omega_x^{\mathrm{i}}$ としてBECを膨張・収縮

シミュレーションパラメーター

^{87}Rb原子気体BEC

$$m = 1.46 \times 10^{-25}\mathrm{kg}$$

$$a = 5.61\mathrm{nm}$$

$$N = 250000$$

$$\omega_x^{\mathrm{i}} = 150 \times 2\pi\mathrm{Hz}$$

$$\omega_y = \omega_z = 50 \times 2\pi\mathrm{Hz}$$

物理量のユニット

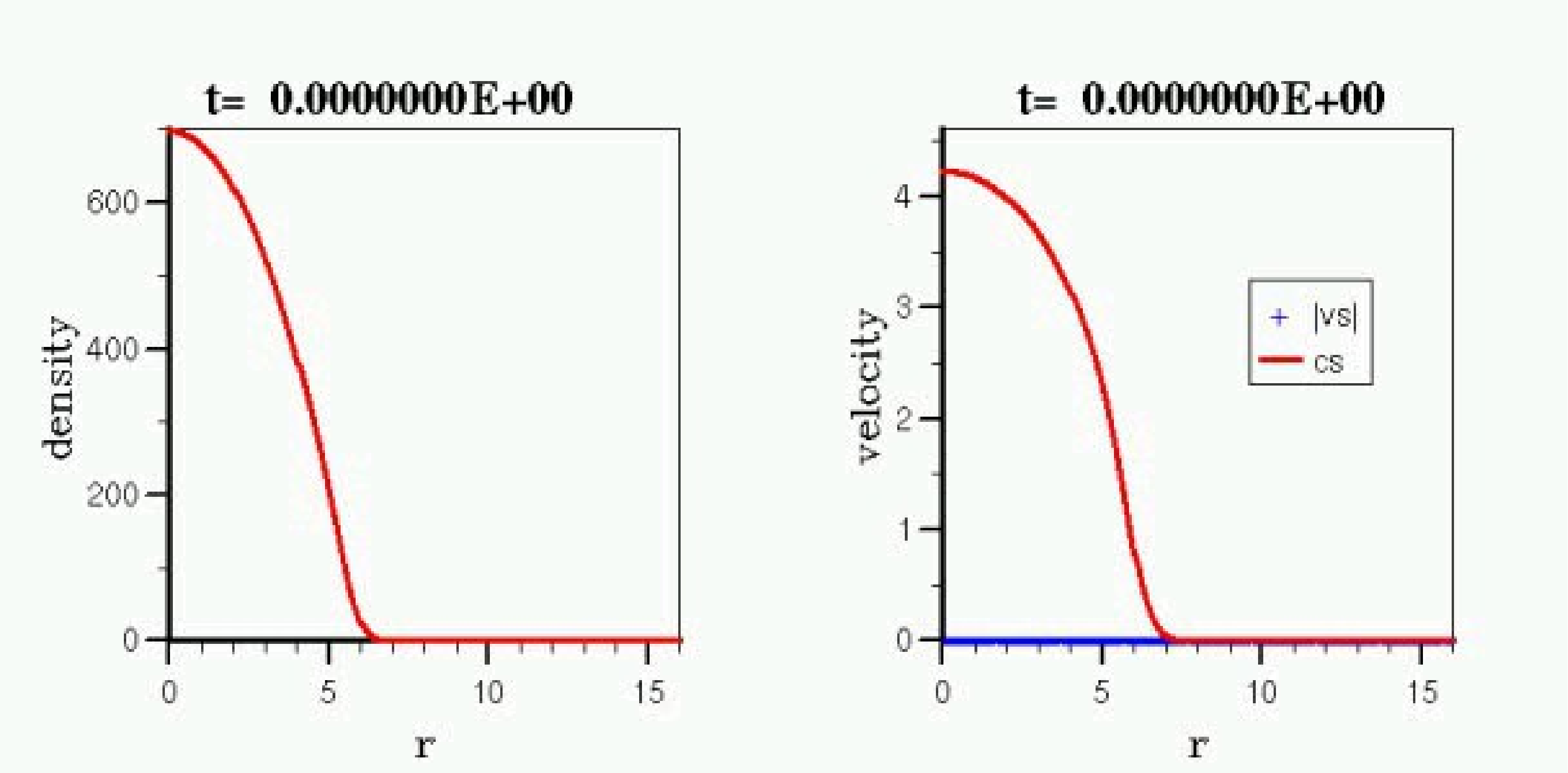
$$\hat{t} = 1/\omega_x^{\mathrm{i}}$$

$$\hat{x} = a_{\mathrm{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega_x^{\mathrm{i}}}$$

$$\hat{E} = \hbar\omega_x^{\mathrm{i}}$$

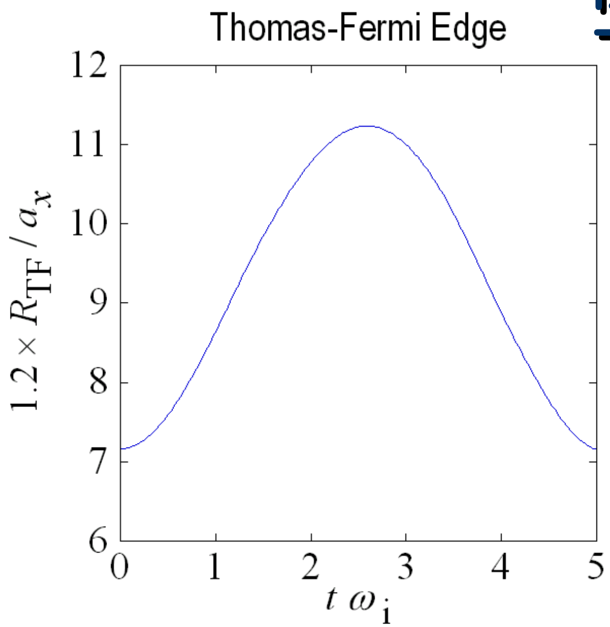
Gross-Piteavskii方程式の時間発展

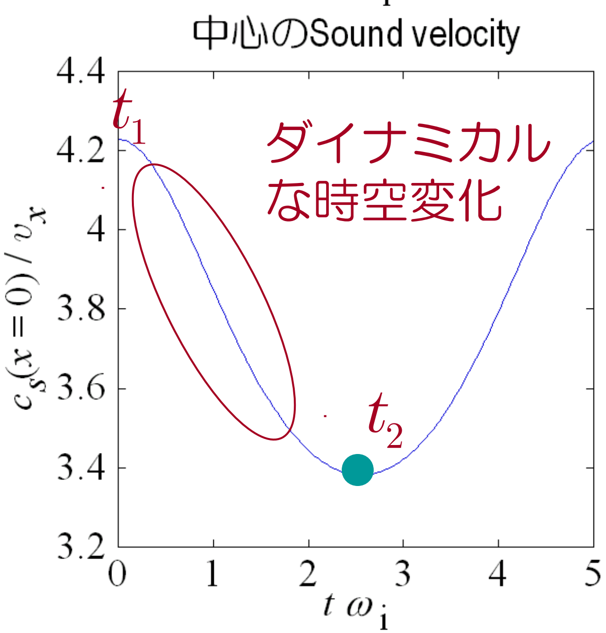
凝縮体密度　　　　　　　　　　　　音速　流速（絶対値）



流速のダイナミカルな変化→アナロジー時空のダイナミカルな変化

宇宙膨張のアナロジー



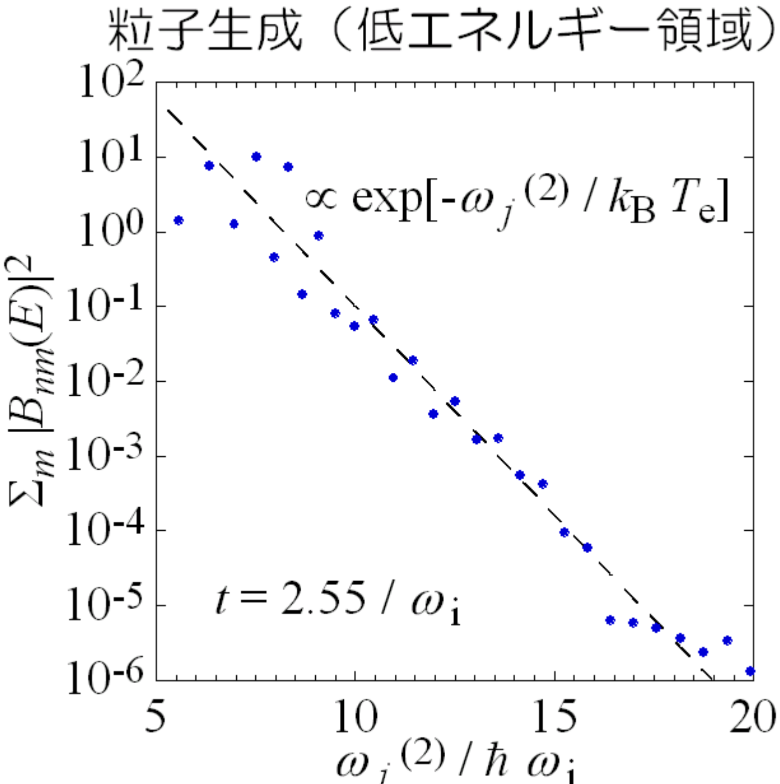


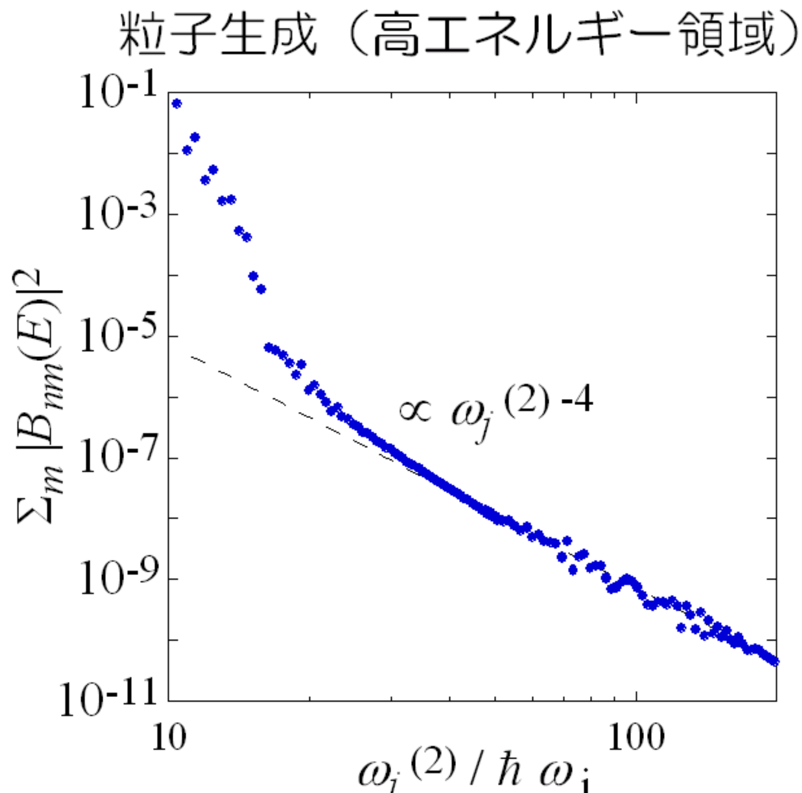
Thomas-Fermi edge（凝縮体の端）
が振動している

BECが膨張したときに音速が減少している→２点間の音波の伝搬に、より時間がかかるようになっている

光速の伝搬に時間がかかるようになることに対応し、宇宙の膨張を表している

粒子生成のスペクトル

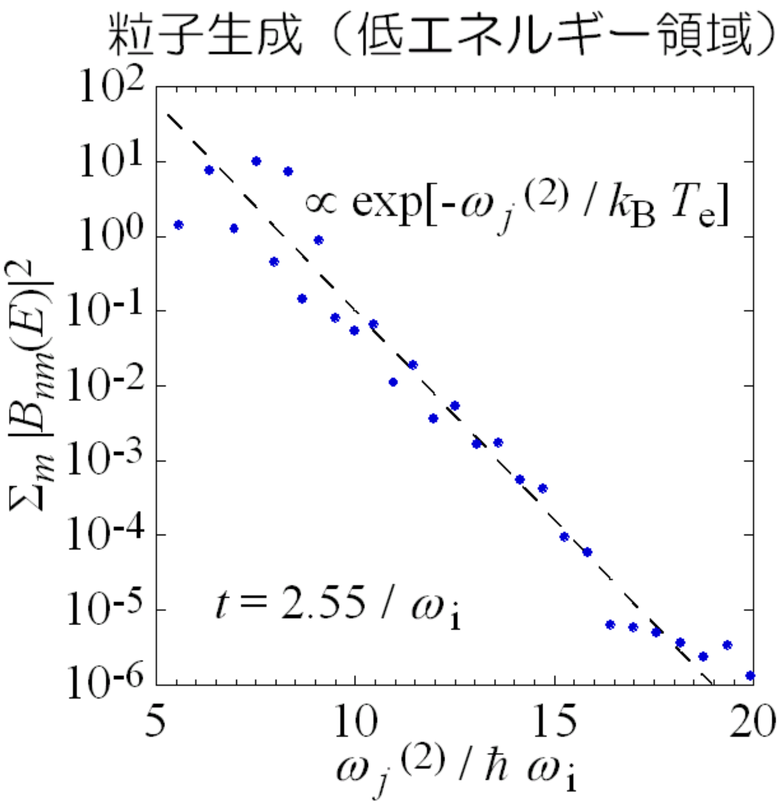




温度$T_e = 5.6$ nKのボルツマン分布に従う

逆4乗のべき分布（流体近似が成り立たない領域なので実験的には意味がないかも）

粒子生成のスペクトル



温度 $T_e = 5.6$ nKのボルツマン分布に従う

ボルツマン分布のスペクトル

・一様な宇宙膨張モデルでは現れない

・アナロジー時空での黒体輻射の揺らぎに対応？

→BECの非一様な膨張による非自明な効果か？

詳しい解析が必要

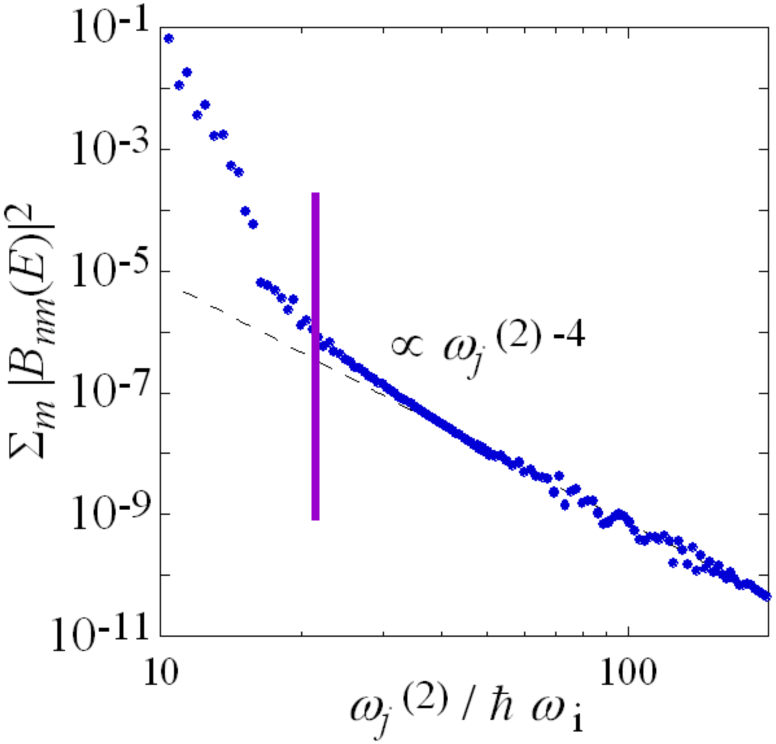
粒子生成のスペクトル

スペクトルが変化するエネルギーは流体近似の破れるエネルギースケールに一致

↓

流体近似の成り立つアナロジー時空でのみボルツマン分布が現れることを強く示唆している

粒子生成（高エネルギー領域）



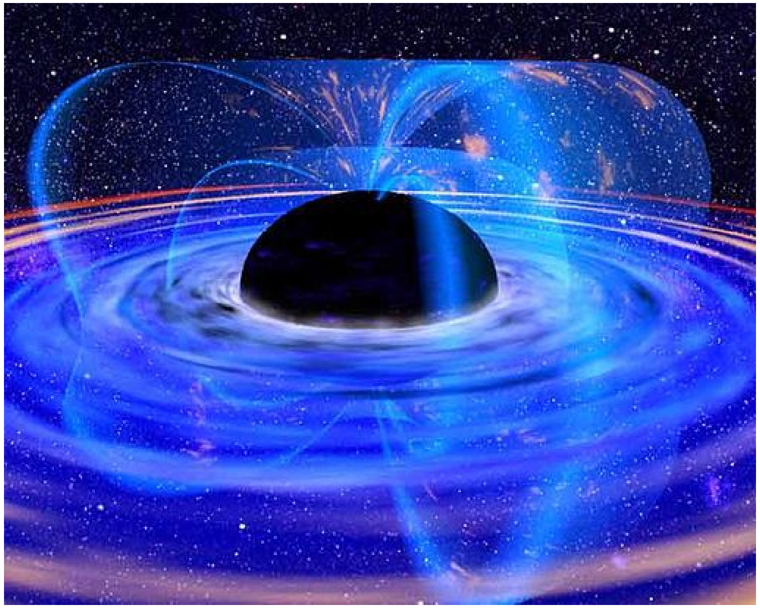
逆4乗のべき分布（流体近似が成り立たない領域なのでアナロジーとしては意味がない）

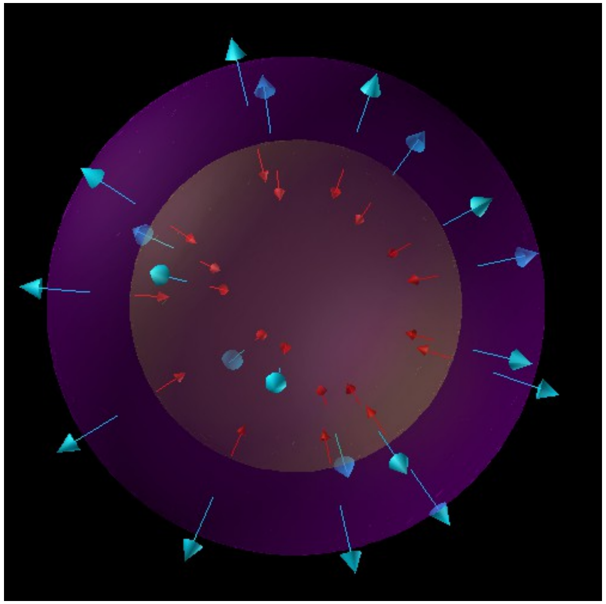
まとめ（考察）

- 膨張・収縮するBECのシミュレーションから膨張宇宙における粒子生成のアナロジーを考えた
- 得られたスペクトルから低エネルギー領域において、 $T_{\mathrm{e}} = 5.6$ nKのボルツマン分布を得た←実験でぎりぎり観測可能か？
- （例えば）宇宙背景輻射の揺らぎに対応していると考えられる
→詳しい理論的解析が必要

今後の課題

1. 得られたボルツマン分布の解析
2. Hawking輻射のシミュレーション
3. 等方系での粒子生成

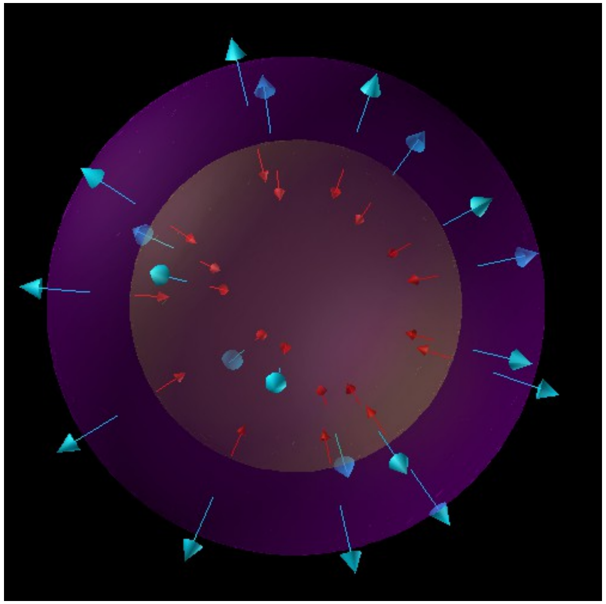




今後の課題

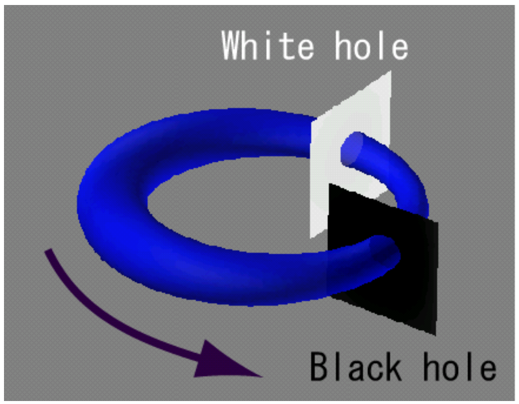
等方な宇宙からの非等方な粒子生成の計算
→1次元計算から球対称BECへの拡張

Y. Kurita and T. Morinari, PRA**76** (2007) 053603



BECを用いた流体ブラックホール

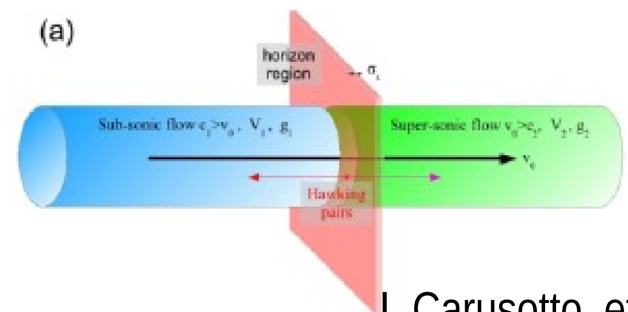
量子論的粒子生成の１つ：ブラックホールからのHawking輻射



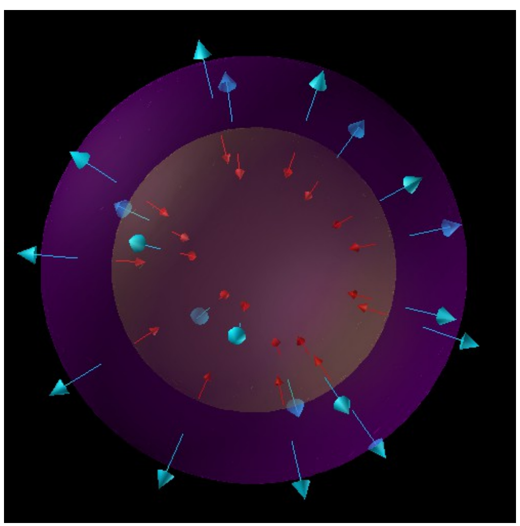
環状BECを用いたブラックホール・ホワイトホール対

L. J. Garay, et al.
PRA **63**, 023611

非一様Feshbach共鳴を用いた流体ブラックホール



I. Carusotto, et al.
arXiv:0803.0507



膨張BECの外側にできるブラックホール

Y. Kurita and T. Morinari,
PRA**76** (2007) 053603

Formulation

Bogoliubov場を展開

$$\tilde{\phi} = \sum_i [u_i \hat{\alpha}_i - v_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger]$$

$$\tilde{\phi}^\dagger = \sum_i [u_i^* \hat{\alpha}_i^\dagger - v_i \hat{\alpha}_i]$$

$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger$: 素励起 Bogolon の消滅・生成演算子

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

$$\int \mathrm{d}V (u_j^* u_k - v_j^* v_k) = \delta_{jk}$$

$$\int \mathrm{d}V (u_j u_k - v_j v_k) = 0$$

: Klein-Gordon 内積とのアナロジー

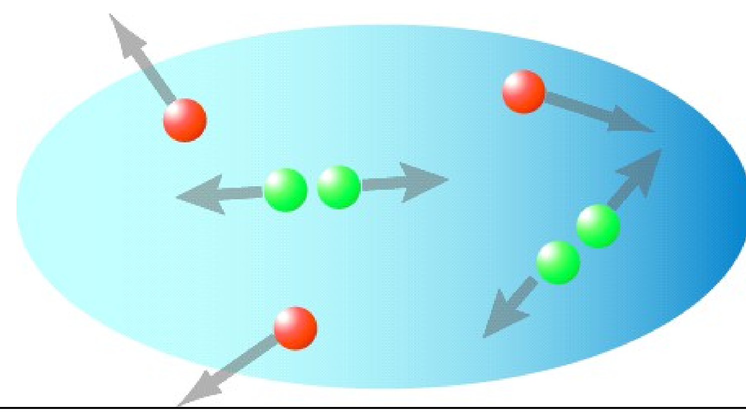
$n = n_0 + n_{\mathrm{B}} + n_{\mathrm{Q}}$

凝縮体 : $n_0 = |\Psi|^2$

Bogolon : $n_{\mathrm{B}} = \sum_j (|u_j|^2 + |v_j|^2) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle$

Quantum depletion : $n_{\mathrm{Q}} = \sum_j |v_j|^2$

非凝縮体 : $n' = n_{\mathrm{B}} + n_{\mathrm{Q}}$



（第６３回年次大会：24aRF-6）

粒子生成

$$\Phi' \propto \tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger = \sum_i \left[(u_i^{(1)} + v_i^{(1)}) \hat{a}_i^{(1)} + (u_i^{(1)*} + v_i^{(1)*}) \hat{a}_i^{(1)\dagger} \right] : \text{定常状態}\,1$$

$$= \sum_i \left[(u_i^{(2)} + v_i^{(2)}) \hat{a}_i^{(2)} + (u_i^{(2)*} + v_i^{(2)*}) \hat{a}_i^{(2)\dagger} \right] : \text{定常状態}\,2$$

$$\hat{a}_i^{(1)} = \sum_j (A_{ij} a_j^{(2)} + B_{ij} a_j^{(2)\dagger})$$

粒子生成 $:{}_{(1)}\langle 0 | \hat{a}_i^{(2)\dagger} \hat{a}_i^{(2)} | 0 \rangle_{(1)} = \sum_j |B_{ij}|^2$

$$B_{ij} = \int_{t=t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, (u_i^{(2)} v_j^{(1)} - v_i^{(2)} u_j^{(1)}) : \text{Klein-Gordon 内積より}$$

（第６３回年次大会：24aRF-6）

重要な問題点？？？

現時点でのFormulationで全流量：$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_\mathrm{B} + \boldsymbol{j}_\mathrm{Q}$ が保存則

$$\partial_t n + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = 0$$

を満たしていない（非凝縮体部分にわき出しが存在する）

保存則が凝縮体で閉じている： $\partial_t n_0 + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_0 = 0$ ため、非凝縮体から凝縮体への影響がない。

Backreaction（非凝縮体の運動が凝縮体へ与える影響）の考慮が必要になる？

（宇宙論の粒子生成はいいのかもしれないが、少なくとも実験系のダイナミクスをきちんと記述するには不十分）

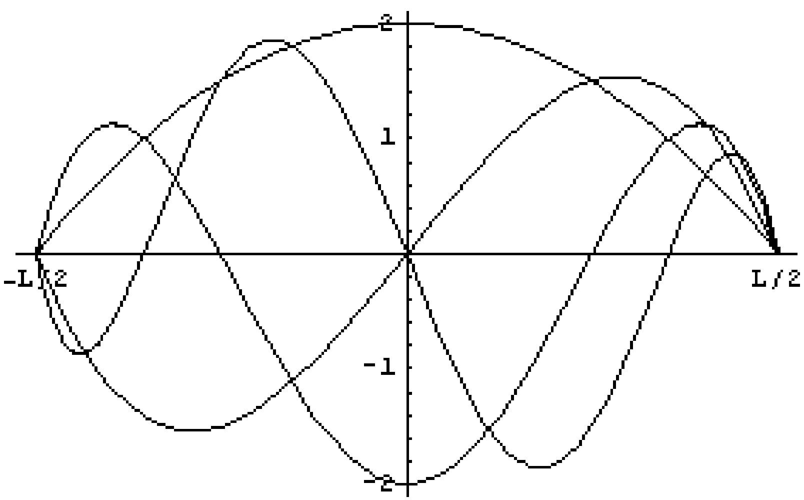
数値計算法

１次元シミュレーション：

全格子点数：1024
空間刻み： $\Delta x = 0.0625$
時間刻み： $\Delta t = 1\times 10^{-8}$

数値計算法：

空間：エリアジング完全除去の元でのチェビシェフ－ガラーキン法
（境界条件：ディリクレ境界条件）
時間：４次のルンゲークッタ法



境界条件を満たすチェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式波動関数の基底とし、２０４８個のチェビシェフ多項式で波動関数を展開する。そのうち１０２４個を実際の計算に用い、残り１０２４個をエリアジング除去に用いる。ハミルトニアンを対角化する際にも２０４８個の基底を用いる

Bogoliubov-de Gennes方程式

Bogoliubov-de Gennes 方程式（初期状態）

$$\omega_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

行列を対角化することでBogolonの真空状態が求まる

Bogoliubov-de Gennes 方程式（時間発展）

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi = [L + U_0|\Psi|^2]\Psi$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

Gross-Pitaevskii方程式と連立させて解く

計算のフローチャート

$$\omega_i^{(1)} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ v_i^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ v_i^{(1)} \end{pmatrix}$$

$t = t_1$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi = [L + U_0|\Psi|^2]\Psi$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ v_i^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ v_i^{(1)} \end{pmatrix}$$

$t_1 < t < t_2$

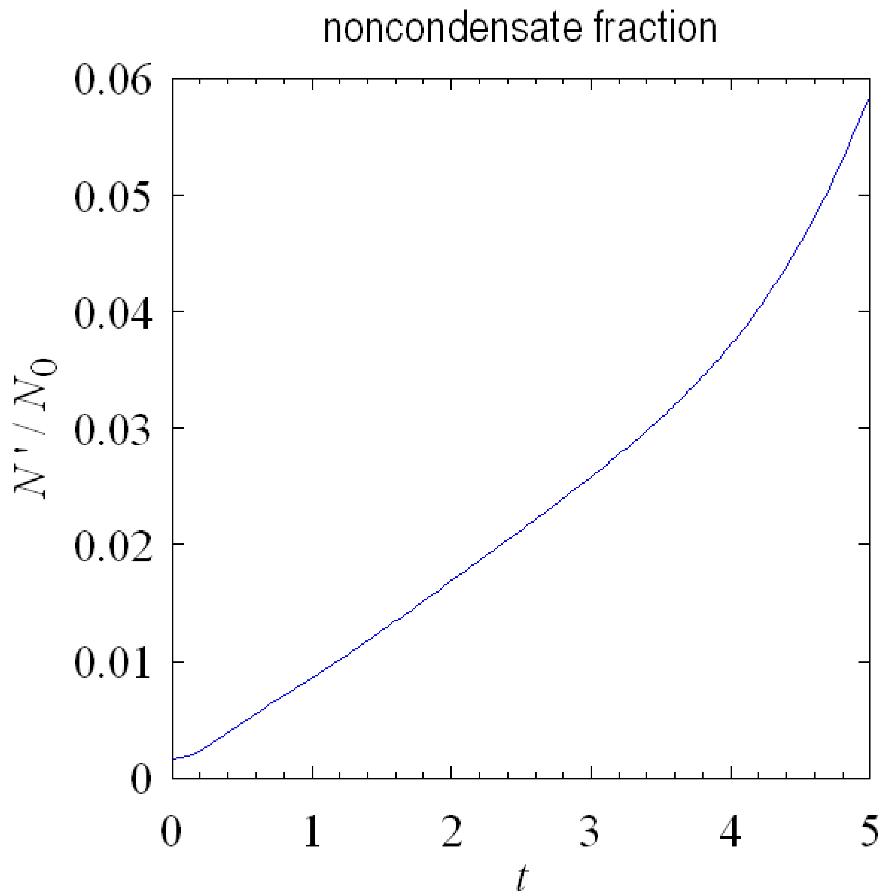
$$\omega_i^{(2)} \begin{pmatrix} u_i^{(2)} \\ v_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(2)} \\ v_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$t = t_2$

粒子生成 : ${}_{(1)}\langle 0|\hat{a}_i^{(2)\dagger}\hat{a}_i^{(2)}|0\rangle_{(1)} = \sum_j |B_{ij}|^2$

$$B_{ij} = \int_{t=t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, (u_i^{(2)} v_j^{(1)} - v_i^{(2)} u_j^{(1)})$$

非凝縮体粒子数(= Bogolon + Depletion)



凝縮体の運度により非凝縮体が増えていっている

→Backreactionが入っていないが、増えた分のいくらかが粒子生成に寄与すると考えればある程度は妥当な計算だと思われる

直交性

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[u_i u_j^* - v_i v_j^*\right] = A\delta_{ij}$$

素励起 $:A = 1$

凝縮体 $:A = 0, \quad \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|u_i|^2 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|v_i|^2 = N_0$

$(\because u_i = v_i^* = \Psi)$

時間発展の方では数値計算の精度内で直交性を満たしている。また対角化の方では縮退しているGaplessのモード間は通常直交しないが、適当な線形結合をとることにより、各々を直交させ、かつ

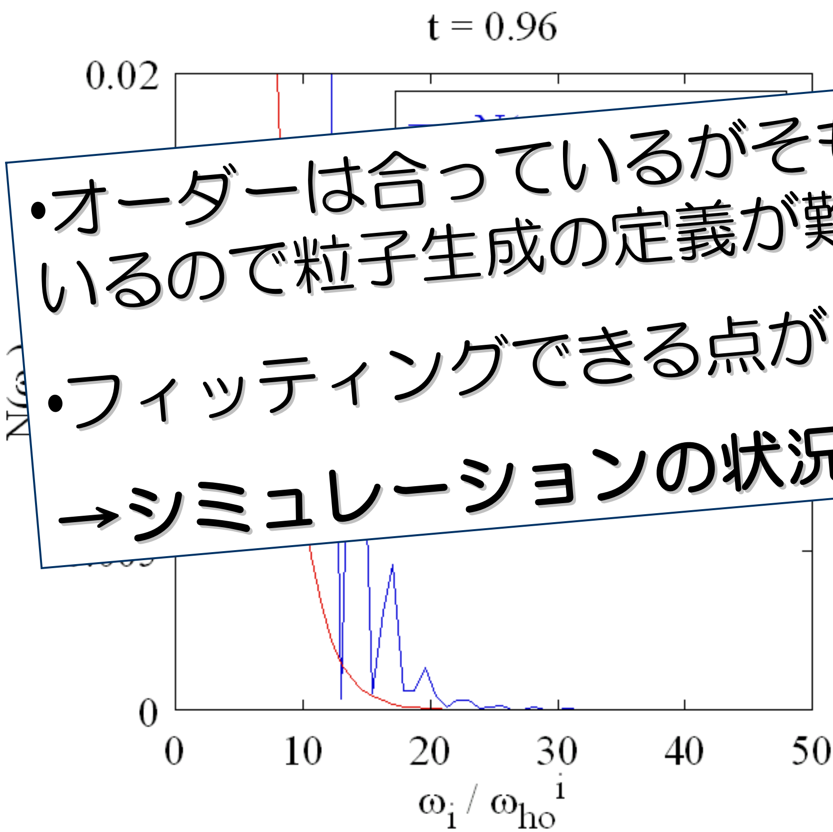
$$\sum_{i \in \mathrm{gapless}} u_i = \Psi$$

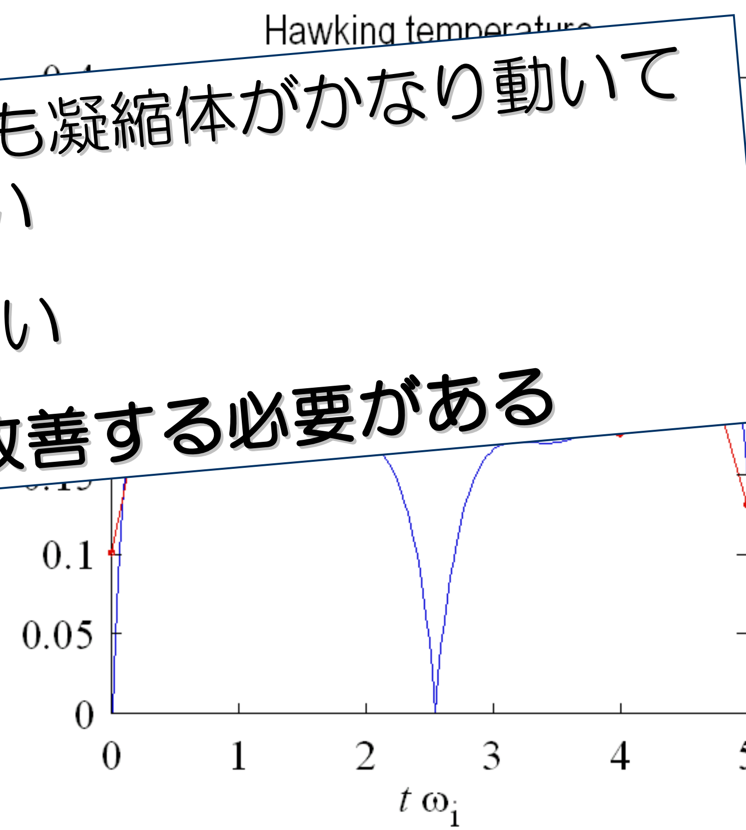
を満たすことができる。

ホーキング輻射

膨張の途中で粒子生成を計算

$$T_{\rm pc} = \frac{\hbar}{2\pi k_{\rm B}} \frac{\partial (v_{\rm s} - c_{\rm s})}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\rm H}}$$



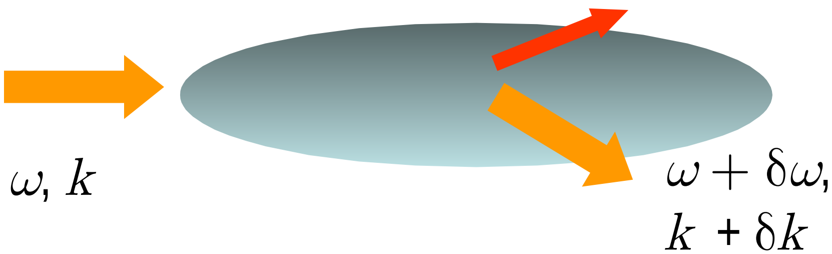


- オーダーは合っているがそもそも凝縮体がかなり動いているので粒子生成の定義が難しい
- フィッティングできる点が少ない

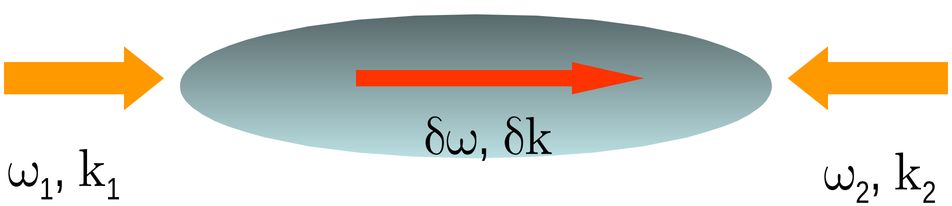
→シミュレーションの状況を改善する必要がある

実験はどうすればいい？→Bragg Spectroscopy

Bragg spectroscopy：系に光子を入れて励起させ励起状態（BogolonやDepletion）を調べる



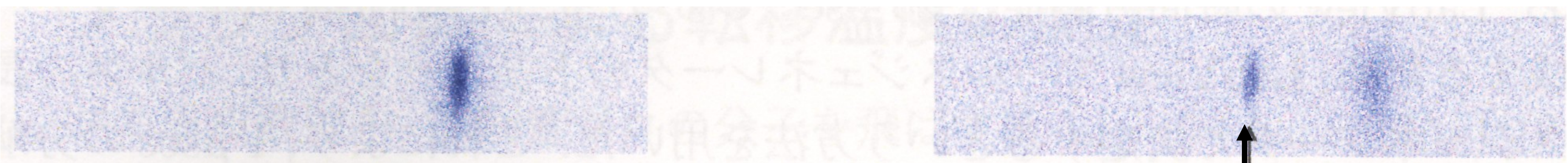
粒子を励起させる（超流動Heの中性子散乱に対応）。



凝縮体や特定量子数の非凝縮体のみを動かす。

実験はどうすればいい？→Bragg Spectroscopy

パルスを当てない　　　　　　　　　　パルスを当てる



凝縮体が吹っ飛ばされる

凝縮体が吹っ飛ばされ、Bogolonとdepletionのみが残るのでそこからu, v, ωの情報を得ることができるか？

詳細なBragg Spectroscopyのシミュレーションが必要！