

27pZK2

量子乱流の数値解析

小林未知数（東京大学）

共同研究者：坪田誠（大阪市立大学）

9月27日 日本物理学会2009年秋季大会
シンポジウム「量子流体力学の最前線」

発表内容

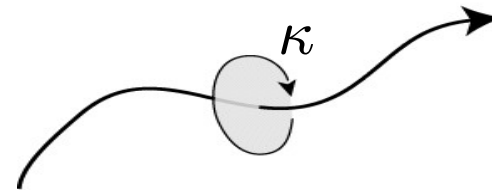
1. 数値解析を用いた量子乱流研究の意義
2. 数値解析手法
3. これまでに、分かったこと
4. これからの課題
5. (少しだけ) 現在取り組んでいる計算
6. まとめ

数値解析を用いた量子乱流研究の意義

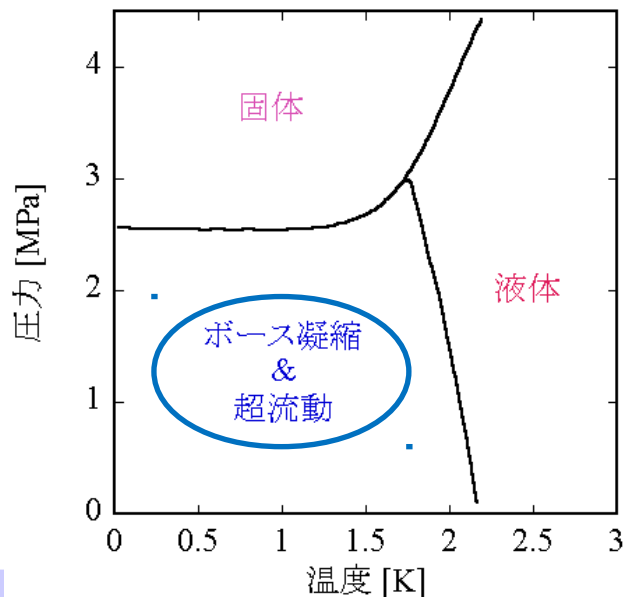
量子乱流は超流動液体Heで実現し、超流動中での回轉的な流れは量子渦によって引き起こされる

循環の量子化：

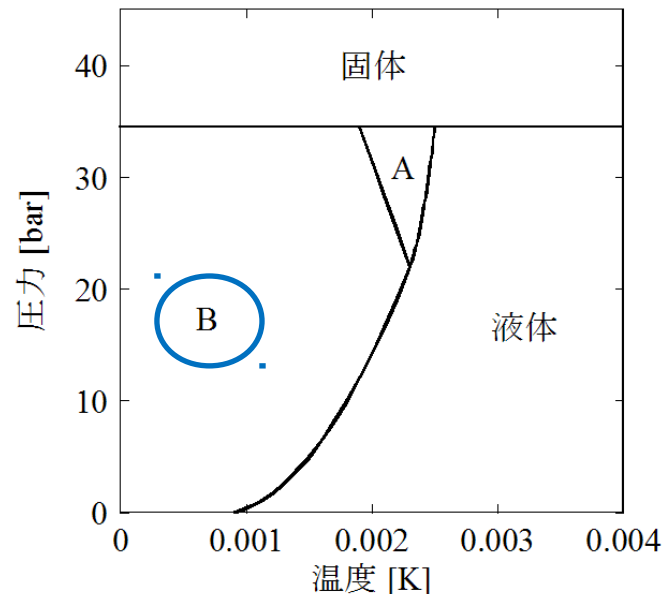
$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = h / m$$



⁴Heの相図



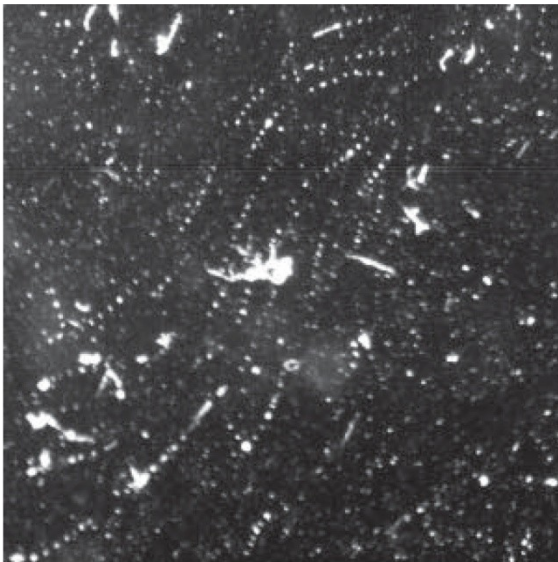
³Heの相図



Atomic BECでの
量子乱流
笠松健一氏
27pZK-7

数値解析を用いた量子乱流研究の 意義

固体水素を用いた
乱流中における量
子渦の可視化



G. P. Bewley et al.
Nature 441, 588 (2006)

量子乱流は量子渦の複雑な運動と、
多数の量子渦の協同現象によって実
現するが、そのダイナミクスを実験
的に追隨するのは非常に困難である

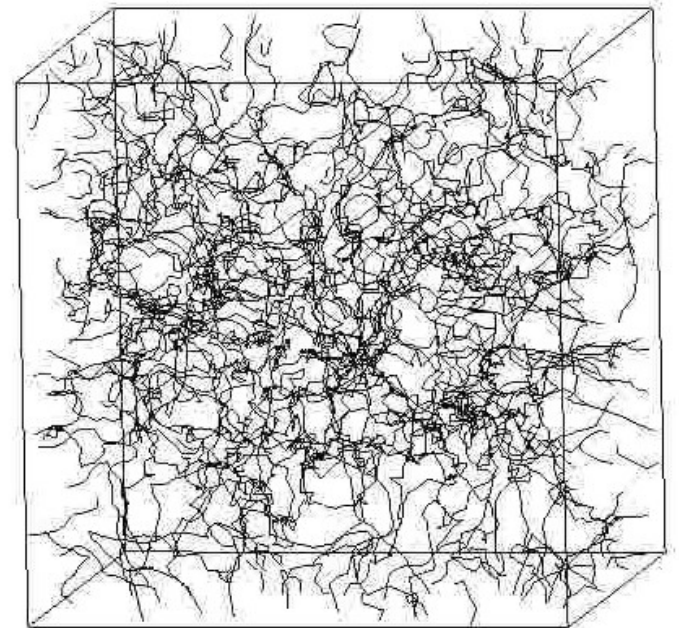
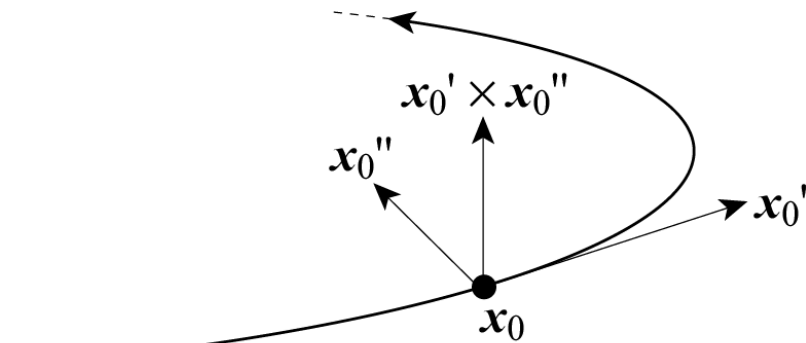


数値シミュレーションによって、実験
における量子渦の運動や量子乱流の統
計則を理解し、さらには量子乱流の振
る舞いを予測し制御する

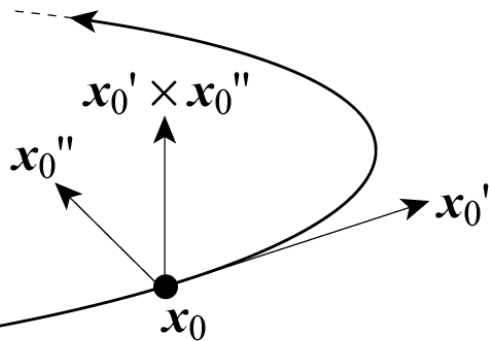
量子乱流の数値解析法

- 渦糸シミュレーション
- 非線形シュレディンガー方程式

渦の大きさ： $\sim \text{\AA}$ (^4He), $\sim 10 \text{ nm}$ ($^3\text{He-B}$)
→ 渦糸近似が現実的になるほど細い



渦糸シミュレーション



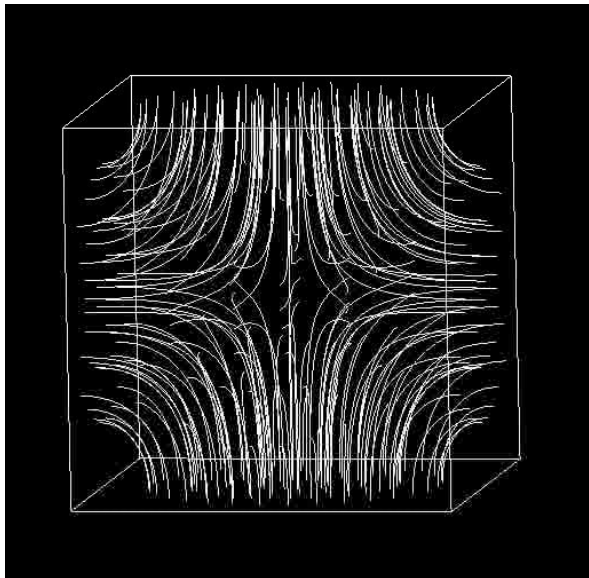
\mathbf{x}_0 : 渦糸要素の位置ベクトル

\mathbf{v}_{ind} : 渦糸が作る超流動速度場

\mathbf{v}_{sa} : 外部から駆動する超流動速度場

\mathbf{v}_b : 境界条件によって誘起される速度場

\mathbf{v}_m : 量子渦と常流体の相互摩擦力



$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{\text{sa}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_b(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}] \times d\mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}|^3}$$

$$\mathbf{v}_m(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{x}'_0 \times [\mathbf{x}'_0 \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]$$

渦糸シミュレーション

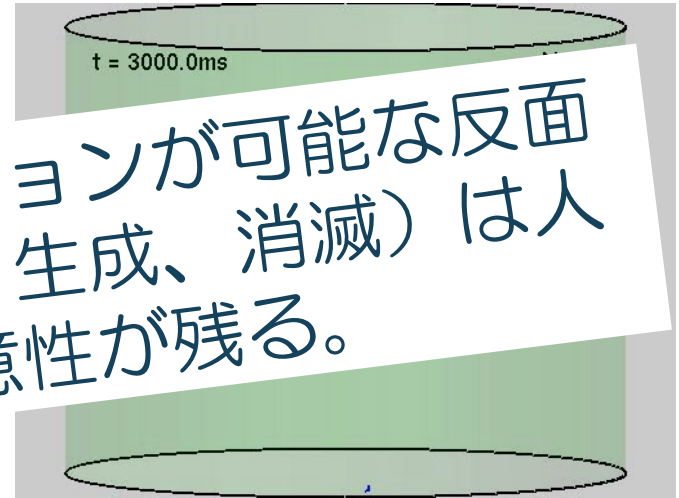
大きなシステム、多数の渦、複雑な形状を扱うことができる

R. Goto, et al. PRL **100**, 045301 (2008)

R. Hänninen, et al. PRB **75**, 064502 (2007)



実験に直接対応したシミュレーションが可能な反面、渦の素過程（量子渦の再結合、生成、消滅）は人工的に導入する必要があり、任意性が残る。



振動グリッドの後方に現れる量子乱流

D. I. Bradley, et al. PRL **95**, 035302 (2005)

非線形シュレディンガー方程式

超流動のオーダーパラメーター Ψ の時間発展を直接計算する

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) - \mu + \frac{\hbar^2}{2m\xi^2 \rho_0} |\Psi(\mathbf{x})|^2 \right] \Psi(\mathbf{x})$$

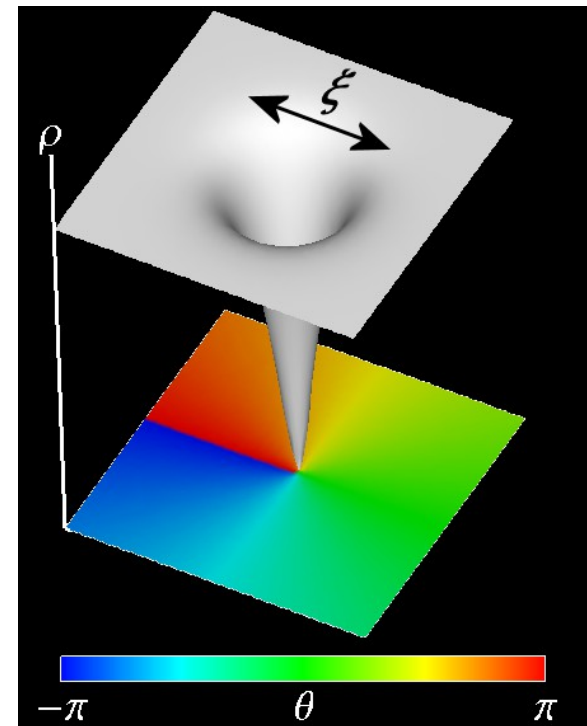
$$\Psi(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})| \exp[i\theta(\mathbf{x})]$$

$$\rho(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})|^2 : \text{超流動密度}$$

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = 2\nabla\theta(\mathbf{x}) : \text{超流動速度}$$

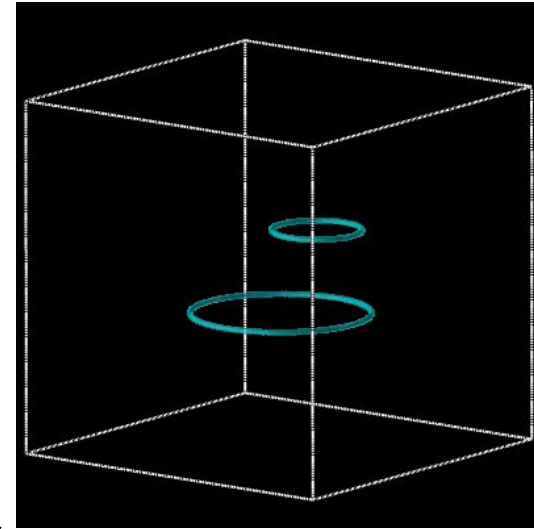
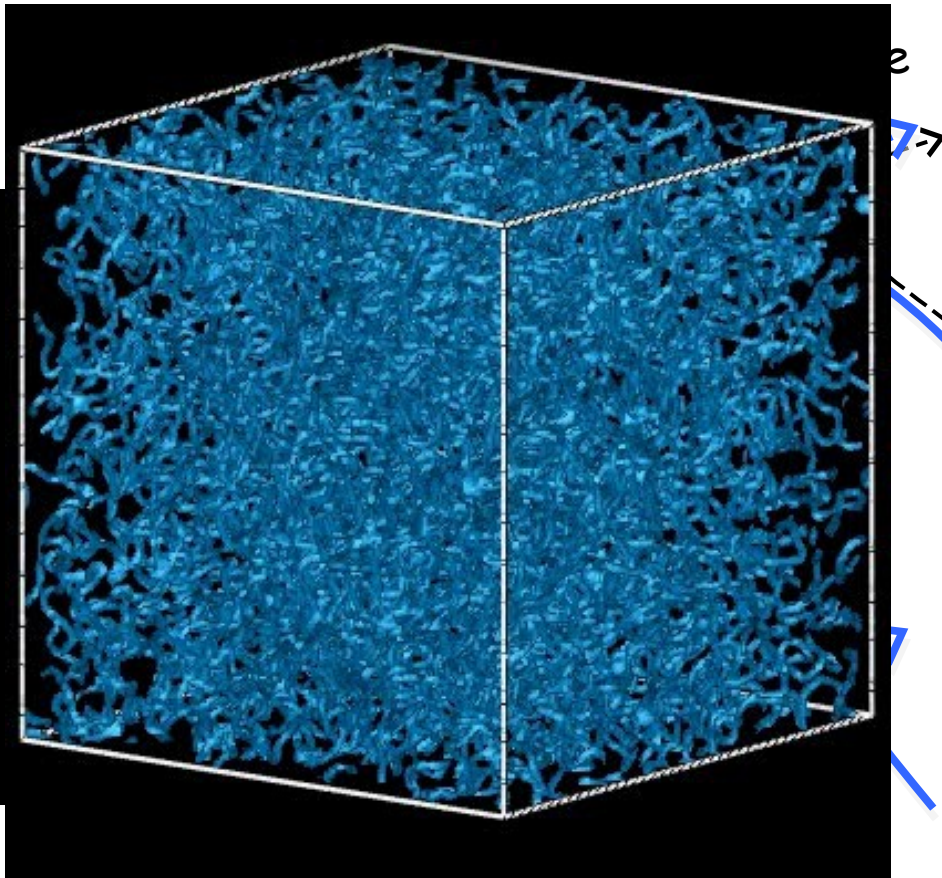
$$\xi = 1/\sqrt{g\rho} : \text{渦芯の大きさ}$$

量子渦は位相欠陥として
自然に導入される

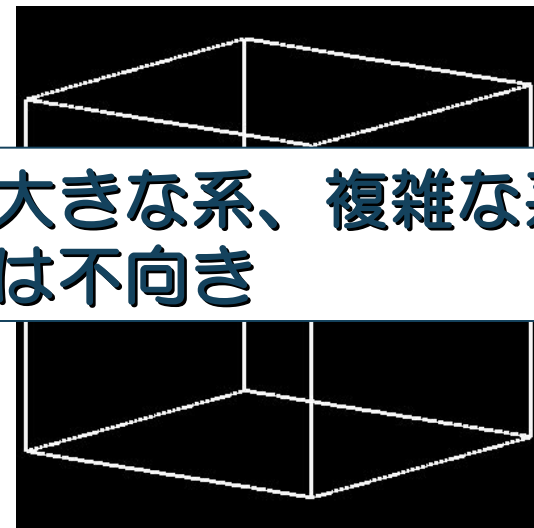


非線形シュレディンガー方程式

素過程まで含めて量子渦のダイナミクスを議論することができる



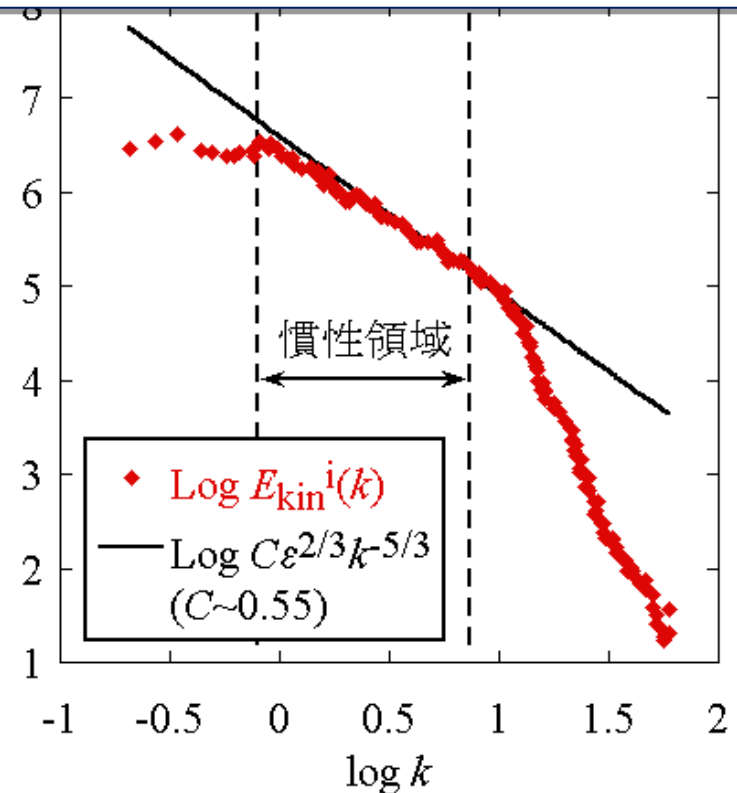
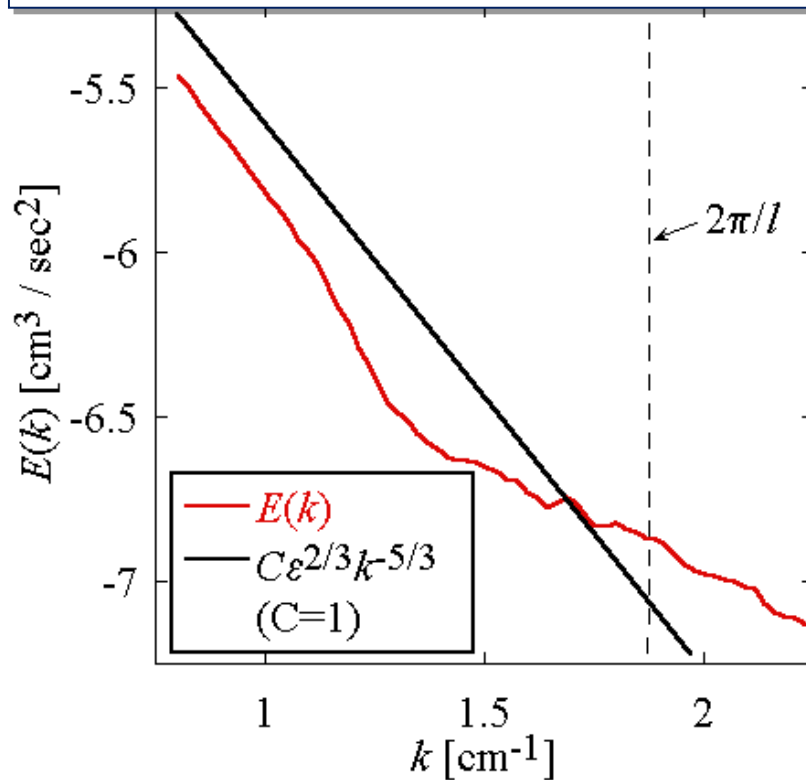
渦輪の再結合



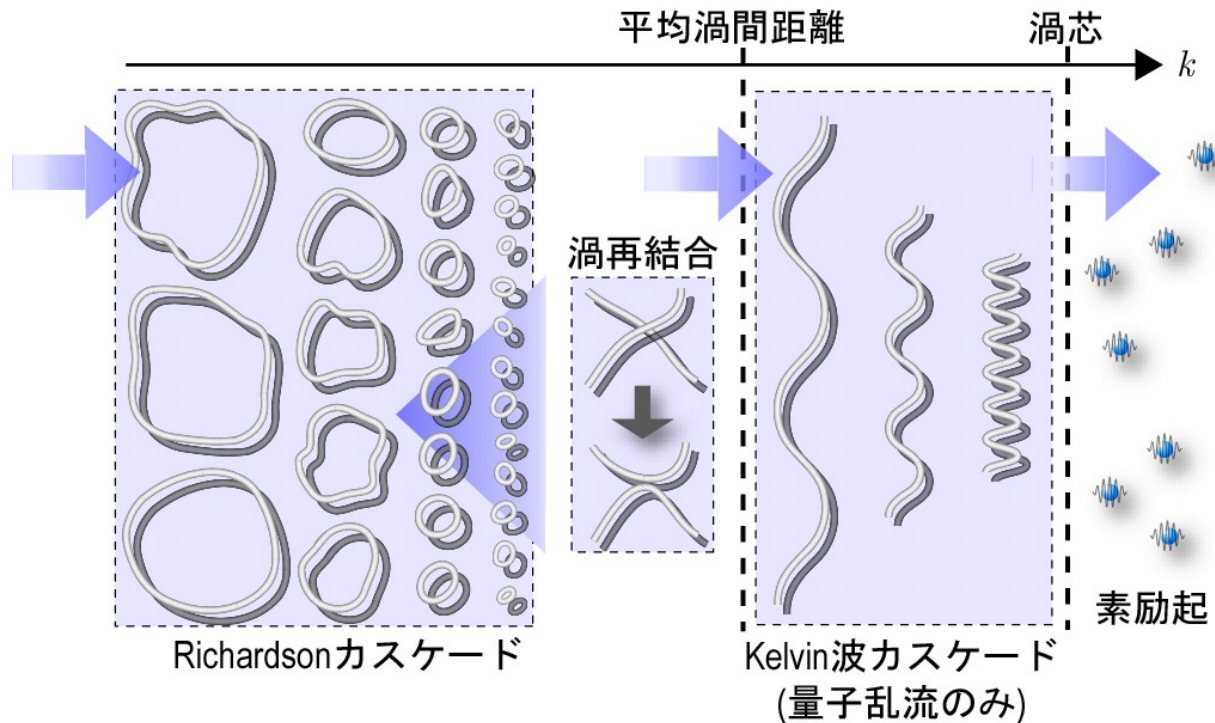
大きな系、複雑な系には不向き

これまでに分かったこと

乱流中の平均渦間距離よりも大きなスケールにおいて、量子乱流は古典乱流で成り立つ Kolmogorovの-5/3乗則に従う



量子渦のカスケード



W. F. Vinen and R. Donnelly,
Physics Today **60**, 43 (2007)

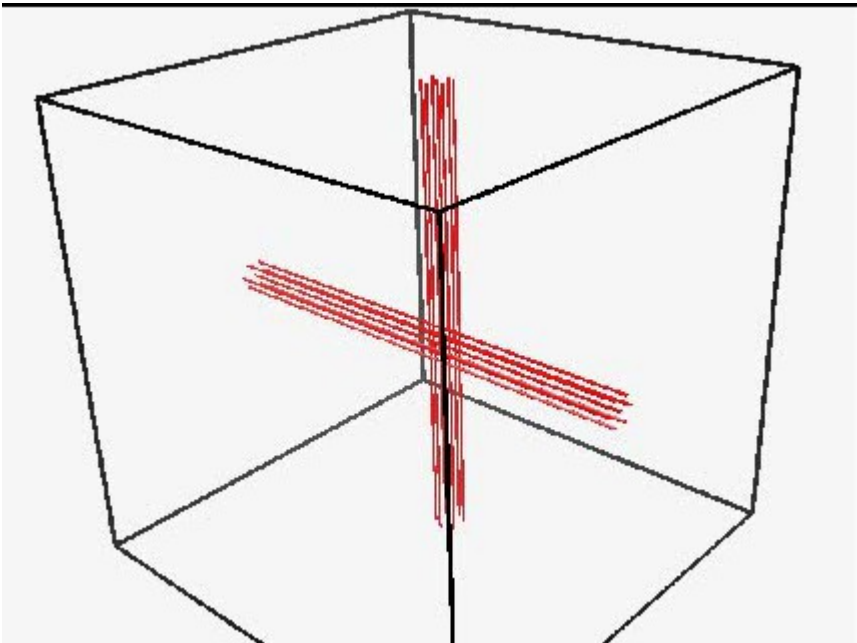
M. Tsubota and M. Kobayashi,
PLTP **16**, 349 (2008)

•平均渦間距離より大きなスケールでは、再結合を介した量子渦のサイズ、スケールにおけるRichardsonカスケードがあり、古典乱流中の渦と類似のダイナミクスを引き起こすと考えられている

•平均渦間距離より小さなスケールでは、再結合によって励起されたKelvin波のカスケードが予想されている

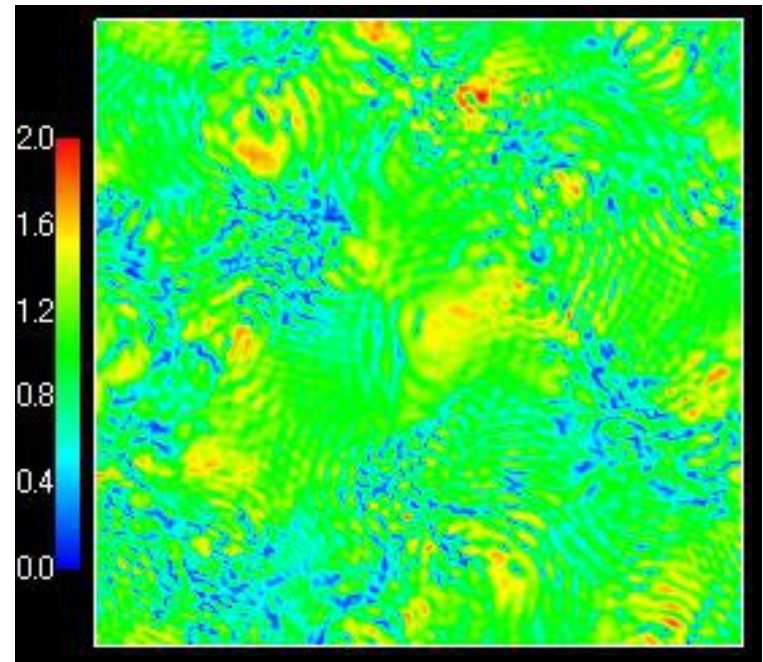
Vortex Bundle Structure

渦のスケールは渦輪のサイズだけでなく束となったvortex bundleとしてのスケールを持っている



Vortex bundleの再結合

S. Z. Alamri, et al., arXiv:0809.4746



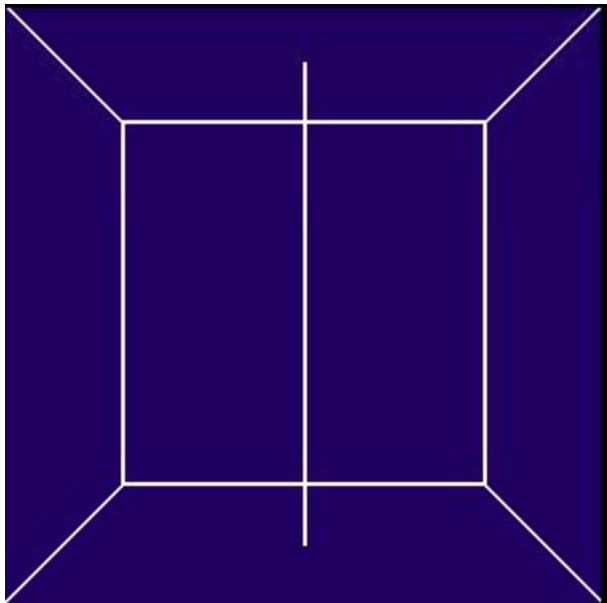
乱流中のVortex bundle

N. Sasa et al. Talk in 2007

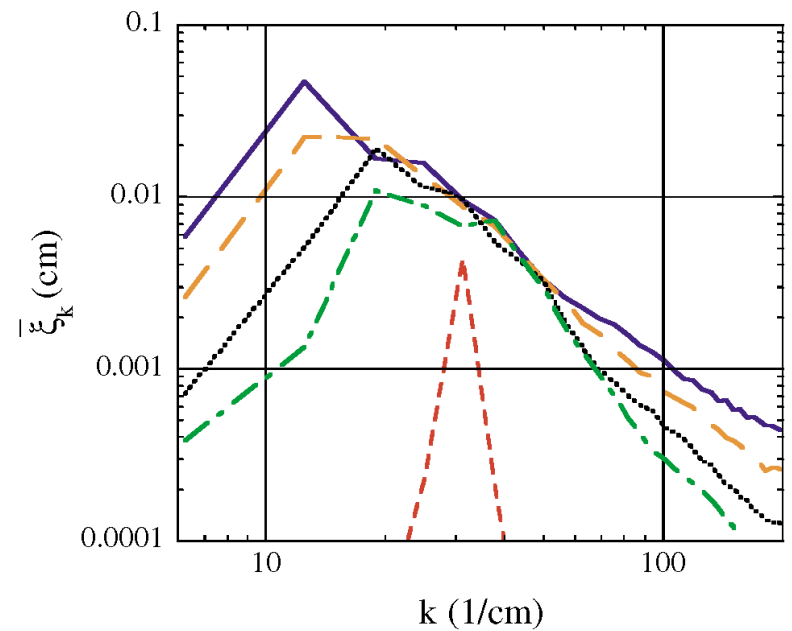
これからの課題

量子乱流中のKelvin波カスケード

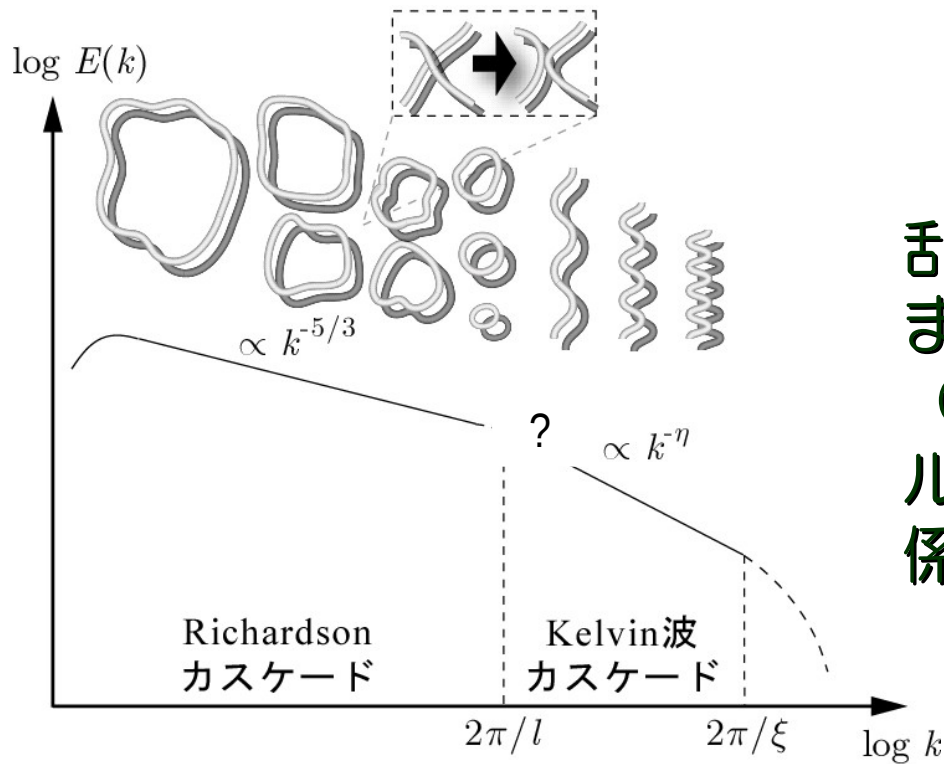
1本の渦のKelvin波カスケード



W. F. Vinen, et al., PRL **91** 135301 (2003)



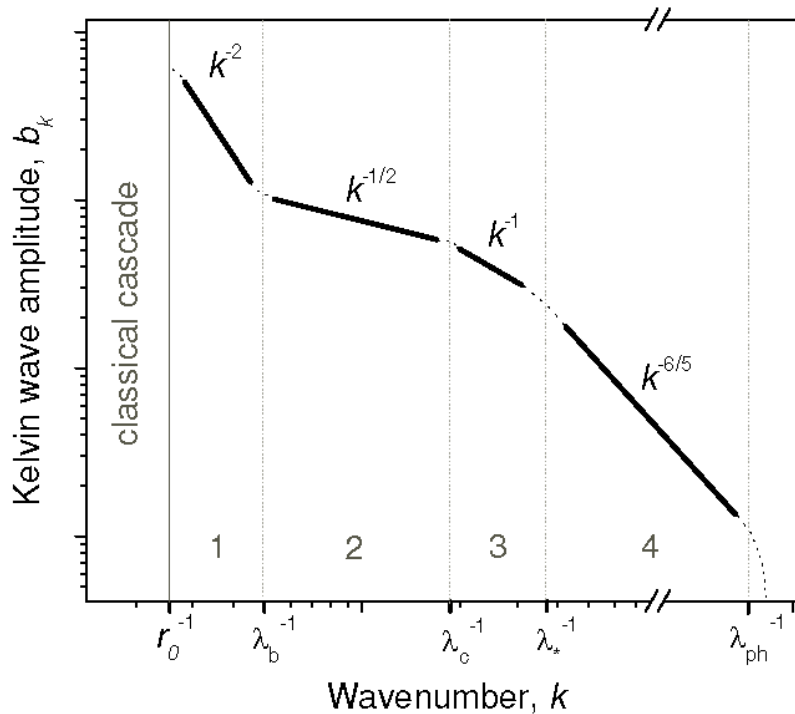
Kelvin波カスケード



乱流中のKelvin波カスケードはまだ完全には分かっていない
(エネルギースペクトル、Richardsonカスケードとの関係、速度場のPDF等)

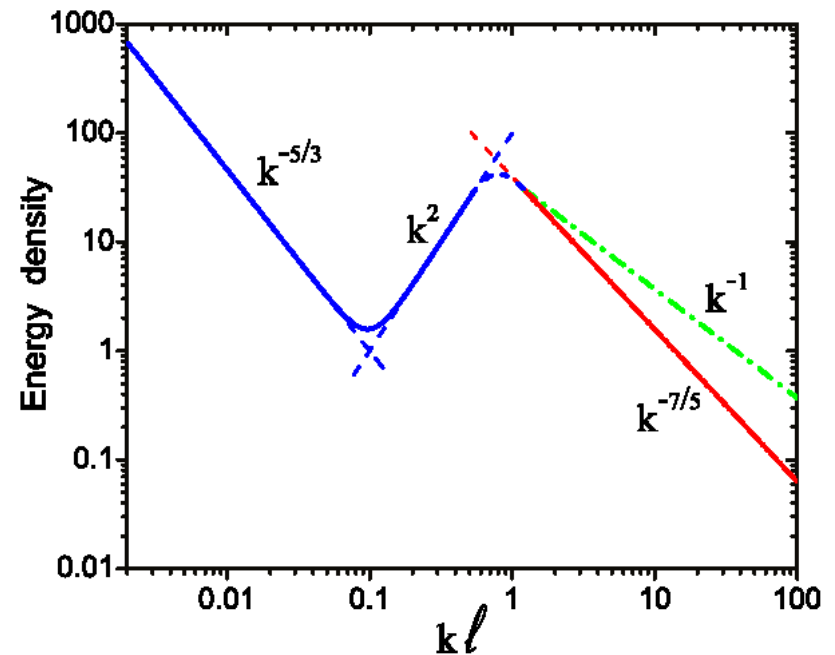
理論的予想

E. Kozik and B. Svistunov, PRB 77, 060502 (2008)



Bundle再結合 → Bundleと1本の渦の再結合
 → 自己再結合 → Kelvin波カスケード

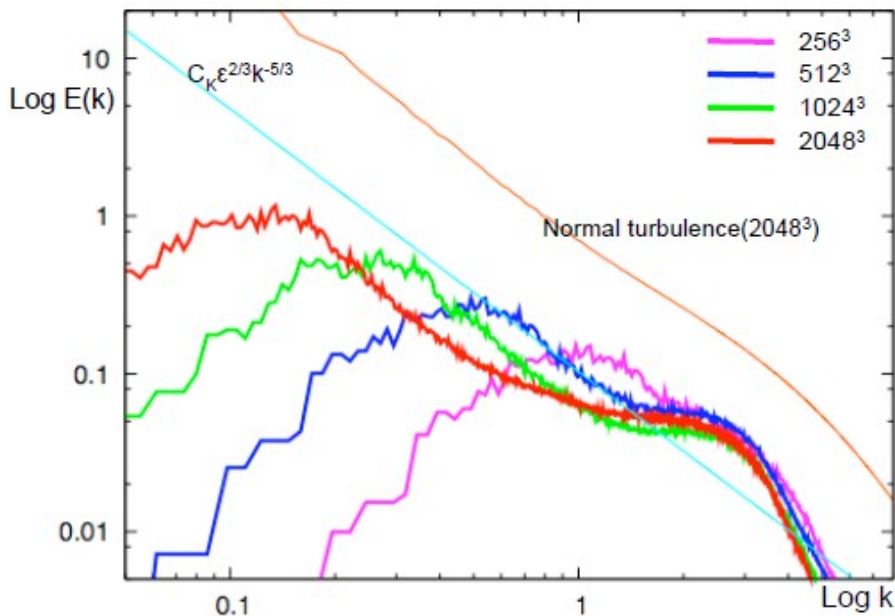
V. S. L'vov, et al., PRB 76, 024520 (2007)



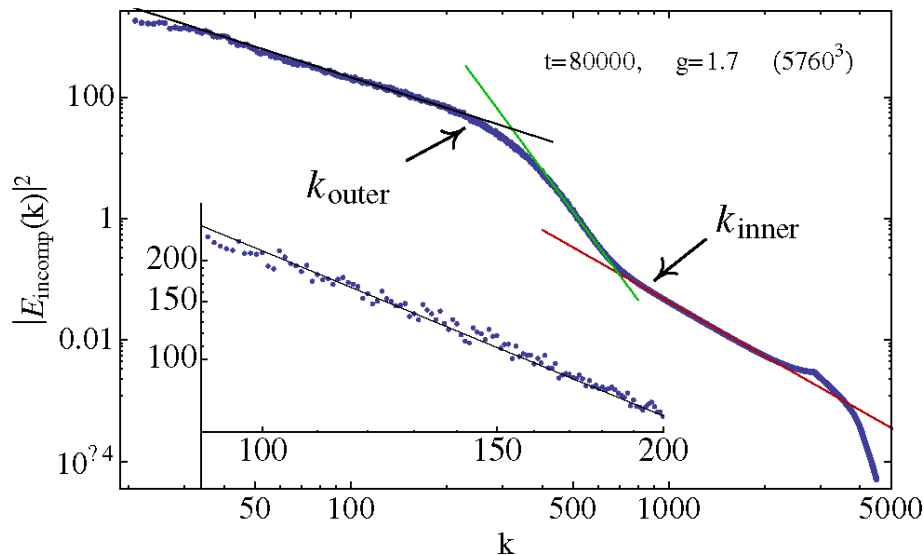
Bottleneck効果による熱力学的
 等分配の出現

Kelvin波カスケードを調べるには 大規模なシミュレーションが必要

M. Machida et al. Talk in 2008

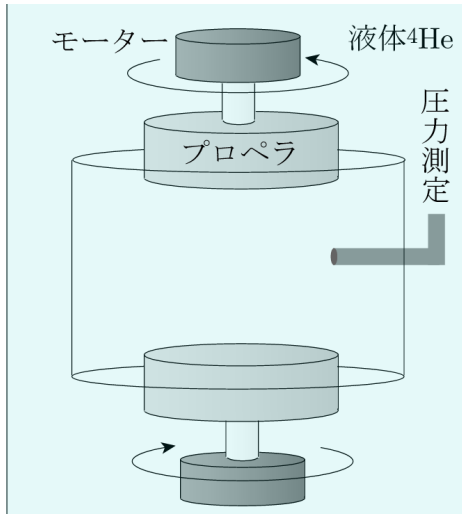


J. Yepez et al. PRL **108** 084501 (2009)



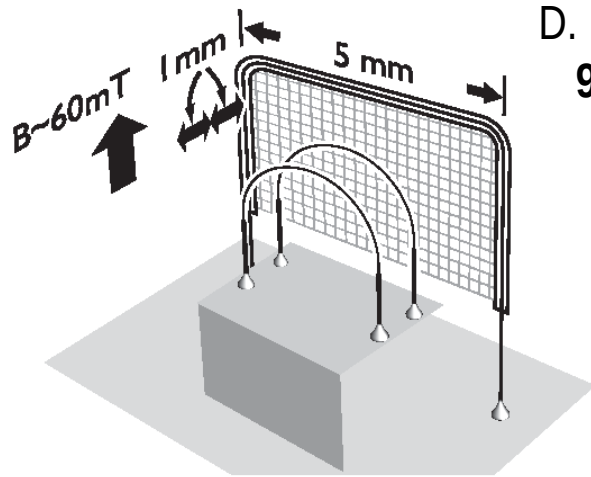
Kelvin波カスケードの問題はまだ議論の収束までたどり着いていない。
Kelvin波以外にも乱流の発生メカニズム、散逸メカニズム、乱流・相流転移、量子力学との関係やPDF等、解決しなければならない問題はたくさんある。

量子乱流実験の進展



J. Maurer and P. Tabeling, *Europhys. Lett.* **43** (1), 29 (1998)

振動回転円盤

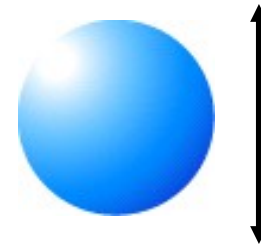


D. I. Bradley, et al. *PRL* **96**, 035301 (2006).

振動グリッド

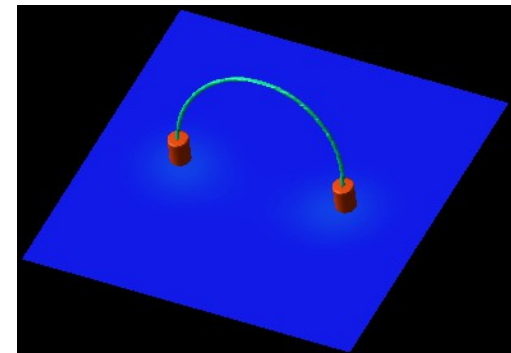
W. Schoepe, *PRL* **92**, 095301 (2004)

振動マイクロ球



H. Yano, et al., *PRB* **75**, 12502 (2007)

振動ワイヤー



量子乱流実験の進展

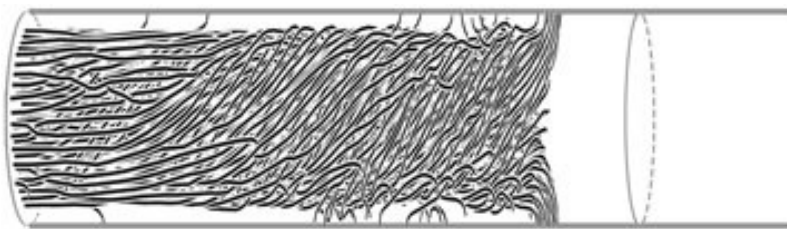
回転を用いた乱流の作成、減衰機構の観測

P. M. Warmsley, et al. PRL **99** 265302 (2007)

(a) (b)

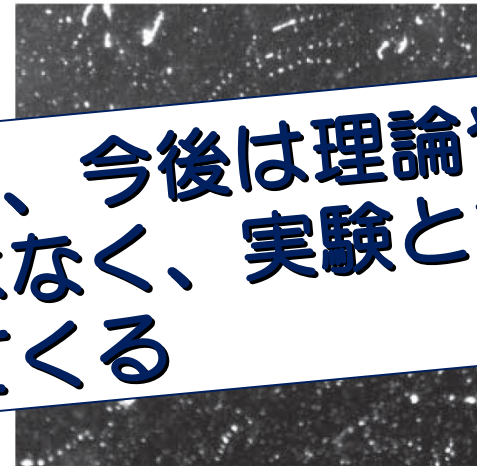
実験のめざましい進展に伴って、今後は理論や数値シミュレーション単独ではなく、実験と並行した研究がより重要になってくる

V. B. Eltsov, et al. PRL **96** 215302 (2006)



固体水素を用いた量子渦の可視化

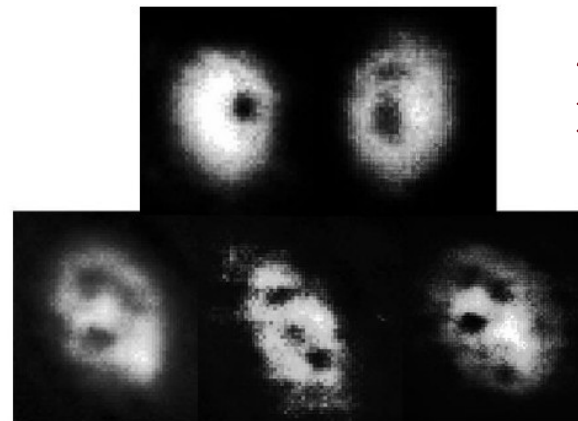
G. P. Bewley et al. Nature **441**, 588 (2006)



← 3 mm →

冷却原子BECでの量子乱流

E. A. Henn, et al. PRL **103**, 045301 (2009)



まとめ

量子乱流の数値解析は量子乱流研究へのモチベーションと量子乱流の理解に多大な貢献をしてきたし、実験の進歩にも伴って今後も続くと思われる。まだまだ解決すべき問題は多く残っている。

Special Thanks :

坪田誠氏 畑徹氏 矢野英雄氏 笠松健一氏 佐々成正氏
町田昌彦氏 大阪市立大学素励起物理学研究室、超低温物理学研究室内の皆様