ボース・アインシュタイン凝縮体の様々な位相欠陥とトポロジー

小林未知数

共同研究者：小林伸吾・川口由紀・新田宗土・上田正仁

東京大学総合文化研究科

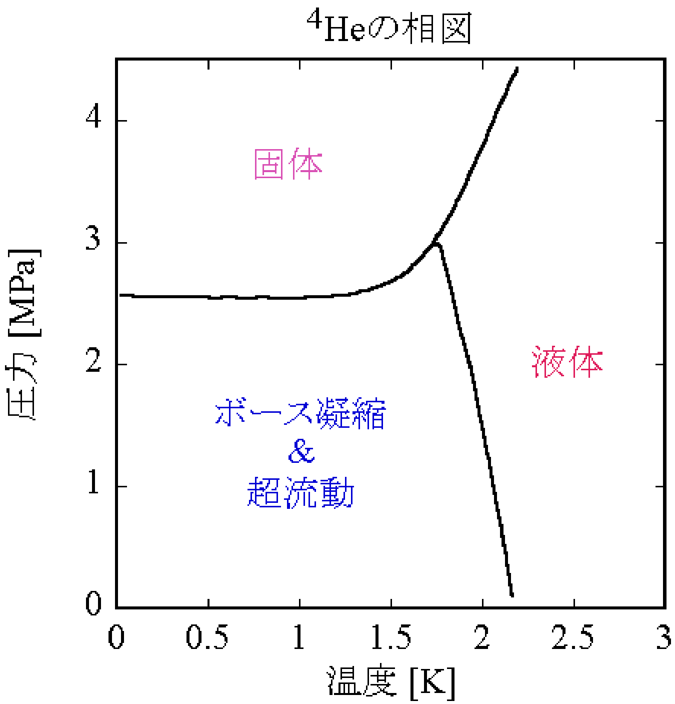
2010年1月21日　応用数学連携フォーラム第11回ワークショップ

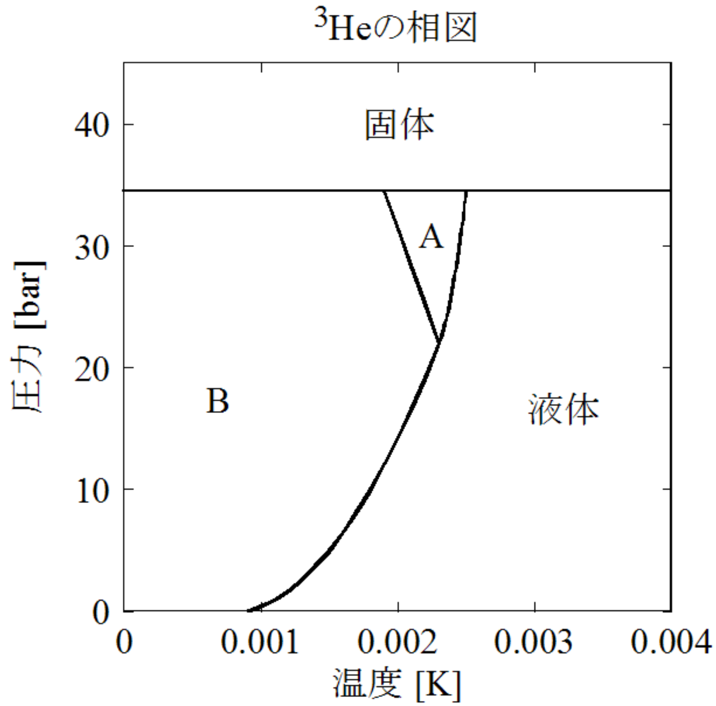
セミナーの内容

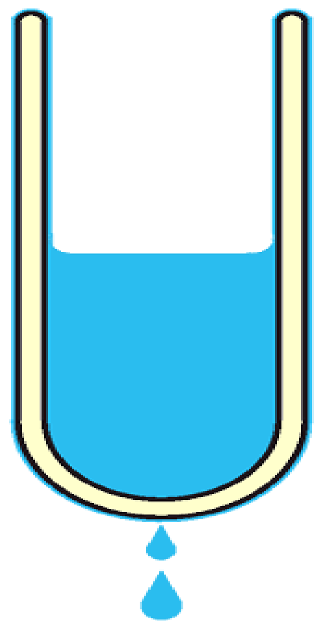
1. ボース・アインシュタイン凝縮体(BEC)とは？
2. BECにおける位相欠陥 – 量子渦
3. BECにおける位相欠陥 – スカーミオンなど
4. 量子渦の衝突シミュレーション
5. スカーミオンと量子渦の相互作用
6. 量子乱流
7. まとめ

超流動とボース・アインシュタイン凝縮

液体ヘリウムは低温で超流動状態となり、粘性を持っていないかのように振る舞う



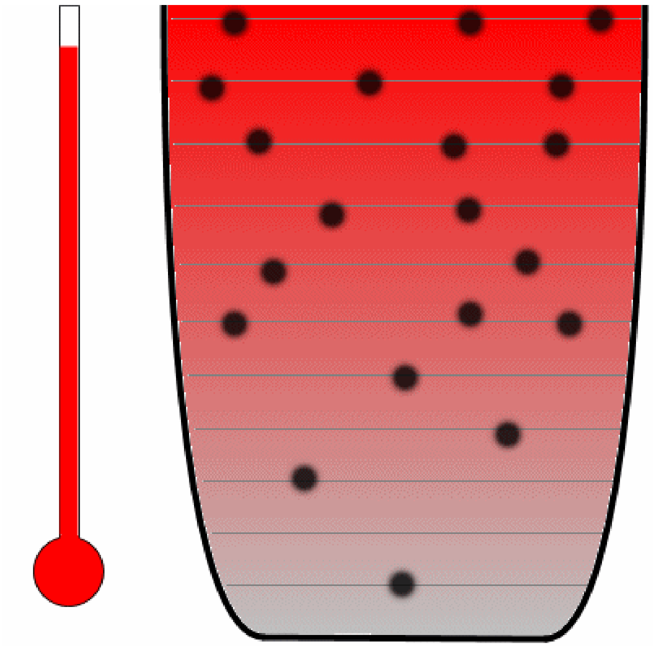




超流動薄膜

超流動とボース・アインシュタイン凝縮

超流動はボース・アインシュタイン凝縮(BEC)によって引き起こされる



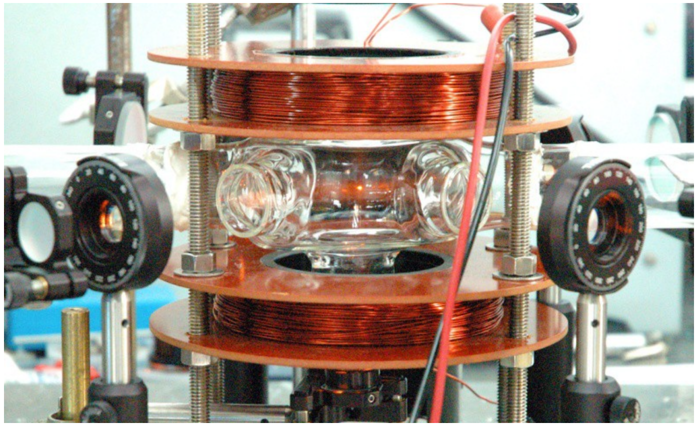
ボース系では低温において巨視的な数の原子が、1粒子の基底状態を占有し、巨視的な波動関数を形成する。

原子集団は巨視的波動関数としてコヒーレントに運動し、超流動を引き起こす。

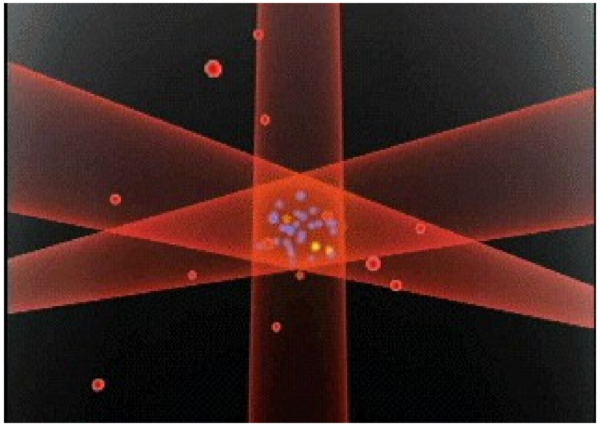
巨視的波動関数 : $\langle\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}^\dagger(y)\rangle \xrightarrow{|x-y|\to\infty} \Psi(x)\Psi^*(y)$

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮

1997年に希薄なアルカリ原子気体のボース・アインシュタイン凝縮が成功した

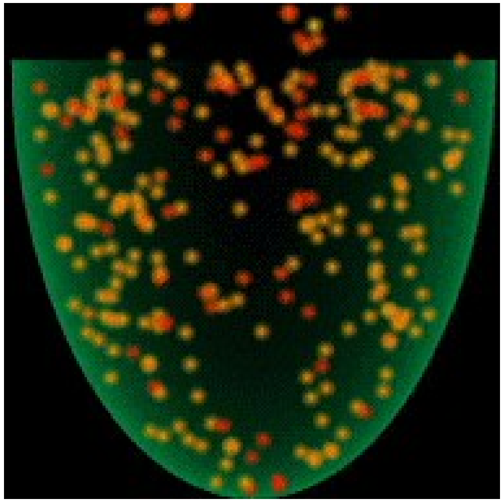


原子のトラップ



レーザーによる原子の冷却

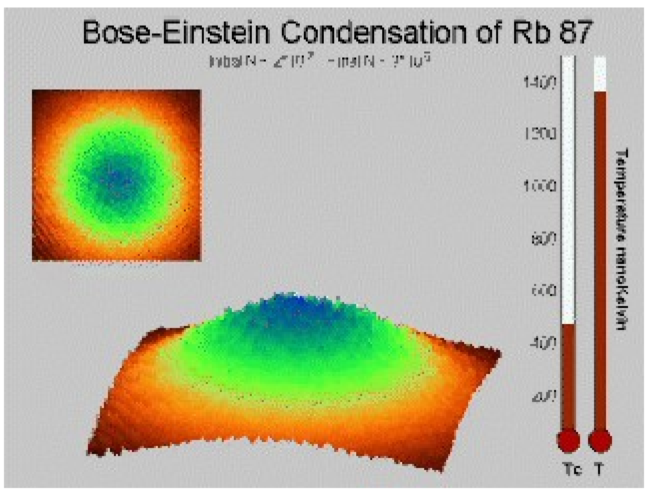
^{87}Rb, ^{23}Na, ^{7}Li, ^{1}H, ^{85}Rb, ^{41}K, ^{4}He, ^{133}Cs, ^{174}Yb, ^{52}Cr, ^{40}Ca, ^{84}Sr

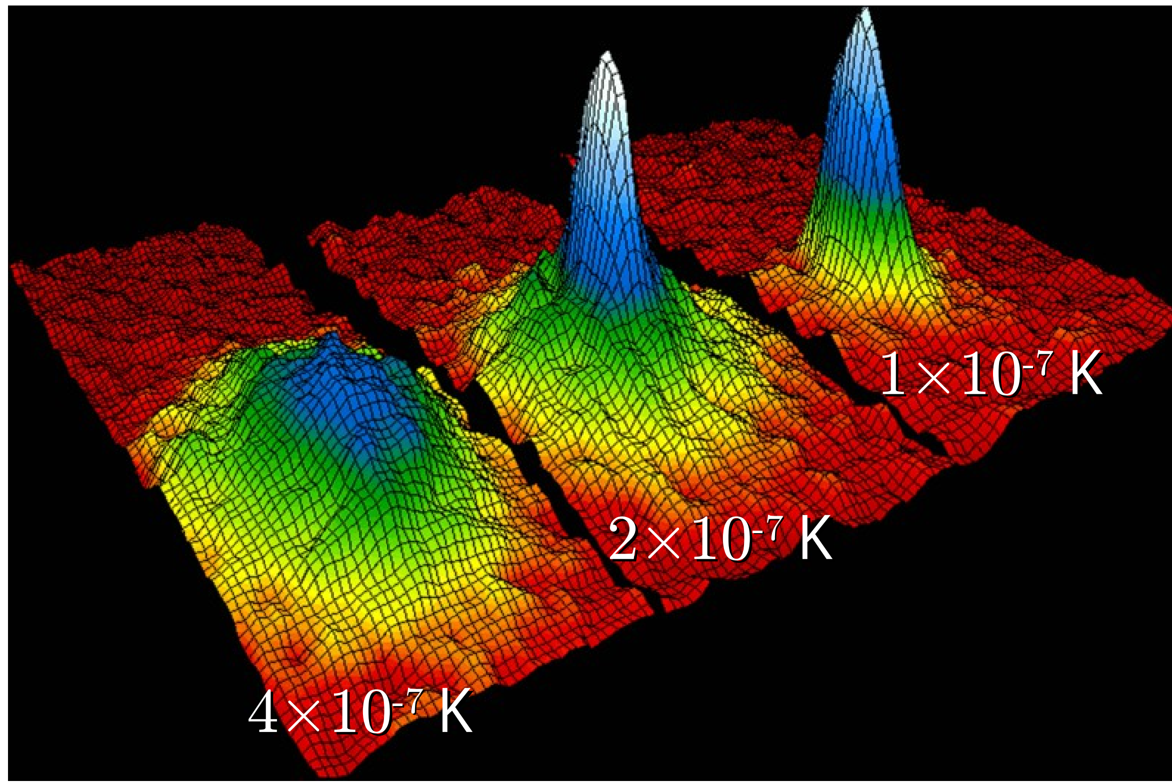


熱い原子を捨てる（蒸発冷却）

原子気体BEC

BEC of ^{87}Rb





BEC と $U(1)$ ゲージ対称性の破れ

BECの本質は巨視的波動関数の存在である

$$\langle \hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}^{\dagger}(y)\rangle \xrightarrow{|x-y|\to\infty} \Psi(x)\Psi^{*}(y)$$

$\Psi(x)=|\Psi(x)|\ \exp[i\ \varphi(x)]$：長時間にわたって位相$\varphi(x)$が決まる→$\Psi$に$U(1)$の自由度がある

絶対零度における平均場ハミルトニアン

$$\boxed{H=\int dx\ \left[\frac{\hbar^2}{2M}\nabla\Psi^{*}(x)\nabla\Psi(x)+\frac{c_0}{2}|\Psi(x)|^4\right]}$$

BEC と $U(1)$ ゲージ対称性の破れ

絶対零度における平均場ハミルトニアン

$$H = \int dx \left[\frac{\hbar^2}{2M} \nabla \Psi^*(\boldsymbol{x}) \nabla \Psi(\boldsymbol{x}) + \frac{c_0}{2} |\Psi(\boldsymbol{x})|^4 \right]$$

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = |\Psi(\boldsymbol{x})| \exp[\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{x})]$$

$\rho(\boldsymbol{x}) = |\Psi(\boldsymbol{x})|^2$ ：流体の数密度

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\hbar}{m} \nabla \varphi(\boldsymbol{x})$ ：流体の流速

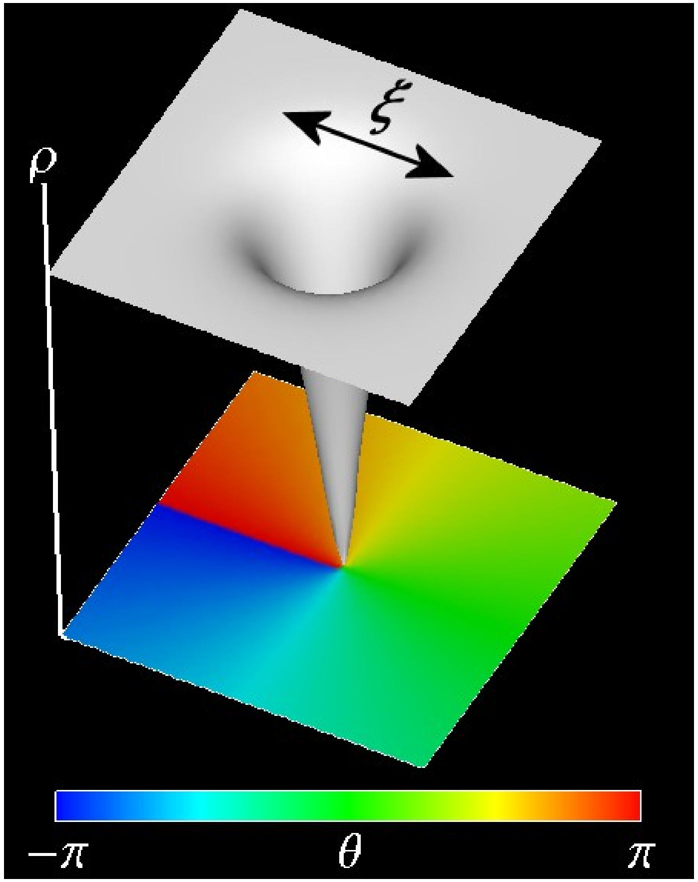
量子渦の出現

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = |\Psi(\boldsymbol{x})| \exp[\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{x})]$$

$\rho(\boldsymbol{x}) = |\Psi(\boldsymbol{x})|^2$: 流体の数密度

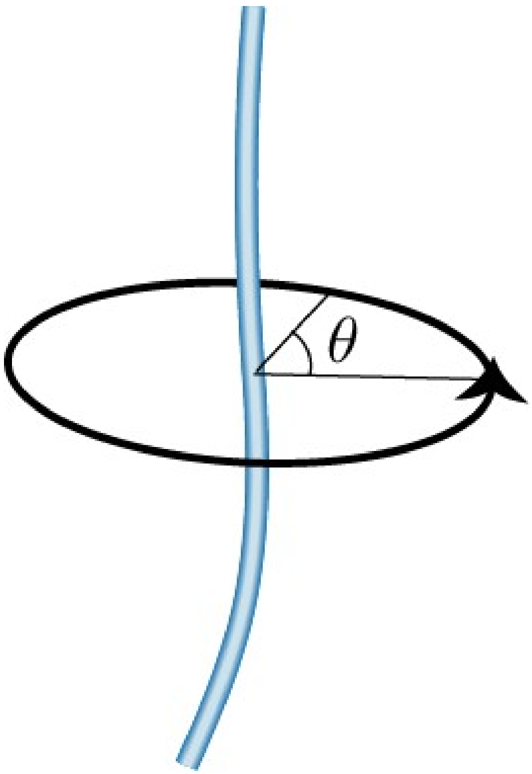
$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\hbar}{m}\nabla\varphi(\boldsymbol{x})$: 流体の流速

波動関数の位相φが2πずれている部分があると、その中心では波動関数を定義できず$(\rho = 0)$欠陥(defect)となる。



量子渦

欠陥は線状に走り、量子渦となる



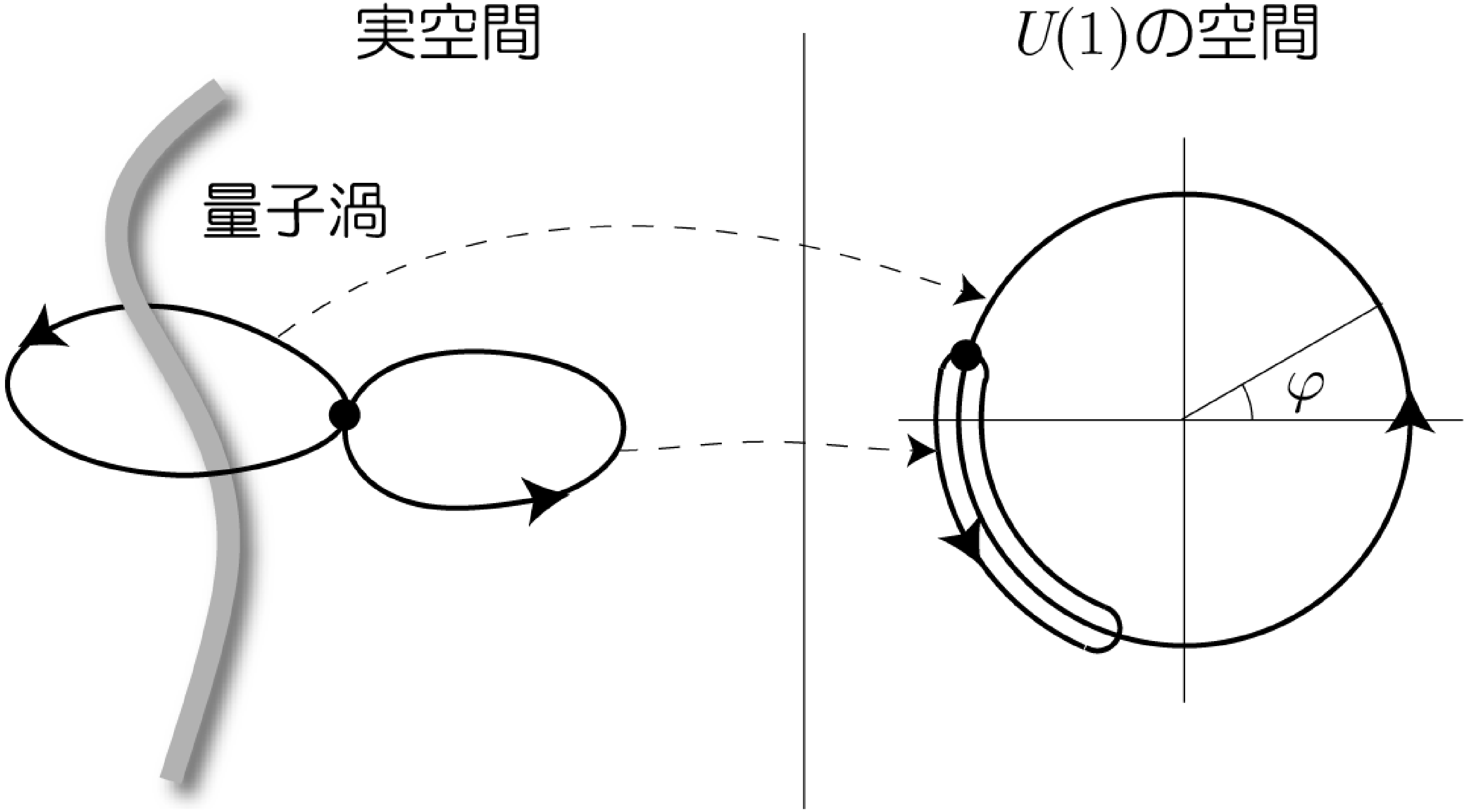
$$\Psi = \sqrt{\rho}\exp[in\theta]$$

$$\boldsymbol{v} = (n\hbar/m)\nabla\theta$$: 流体の速度場

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{h}{m}n$$: 渦の循環

実際には2πだけでなく、2πの整数倍nだけの位相のずれが可能である。

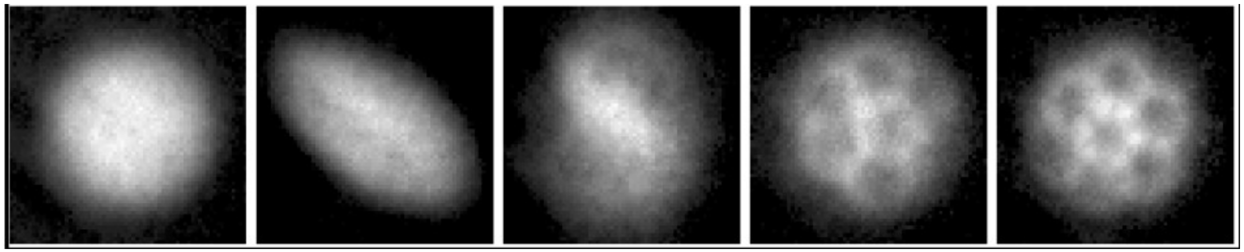
量子渦のトポロジー



量子渦の分類：$U(1)$の空間を何周したか？ よ連
→基本群によって表される：$\pi_1[U(1)] \cong \mathbb{Z}$

量子渦の観測

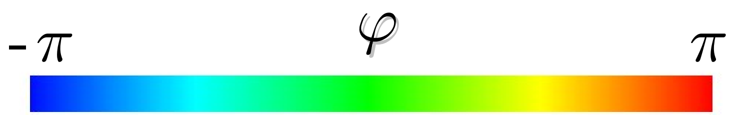
原子気体ボース・アインシュタイン凝縮での渦格子

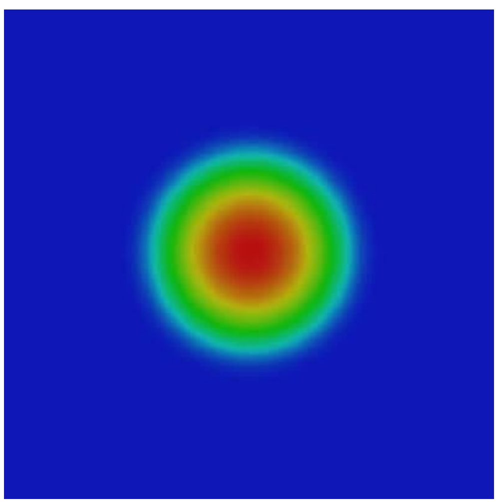


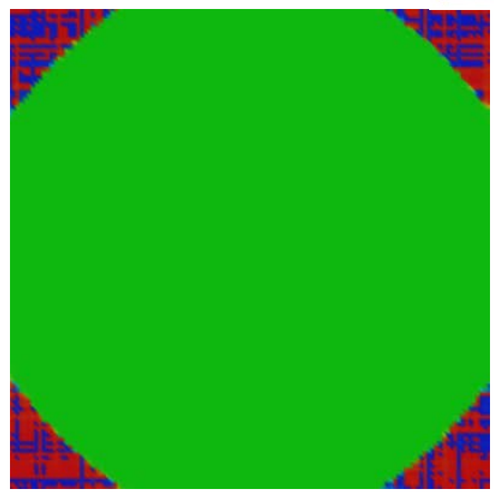
^{87}Rb BECでの
渦格子

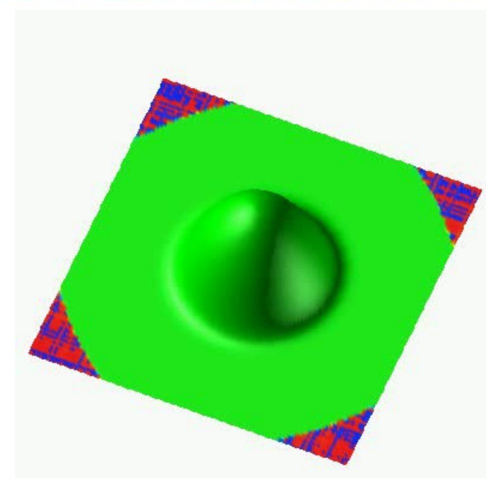
K. W. Madison et al. PRL **86**, 4443 (2001)

渦格子形成のシミュレーション





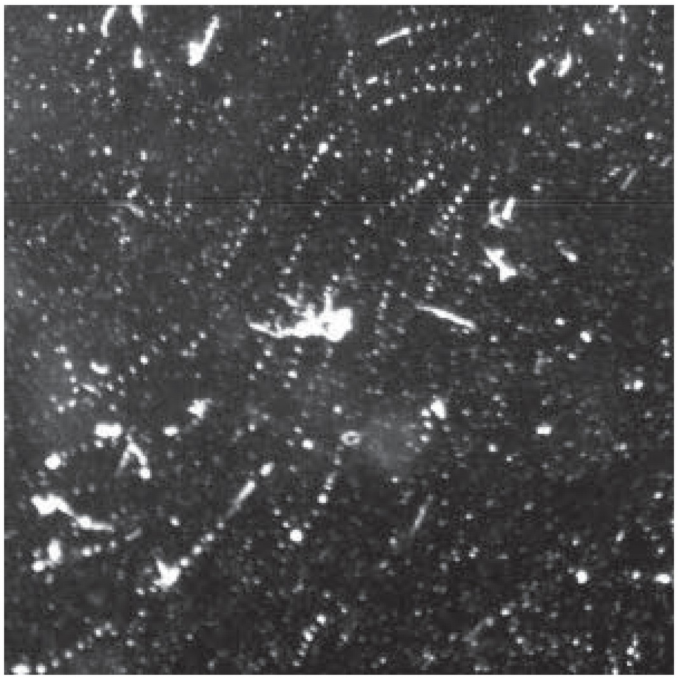




量子渦の観測

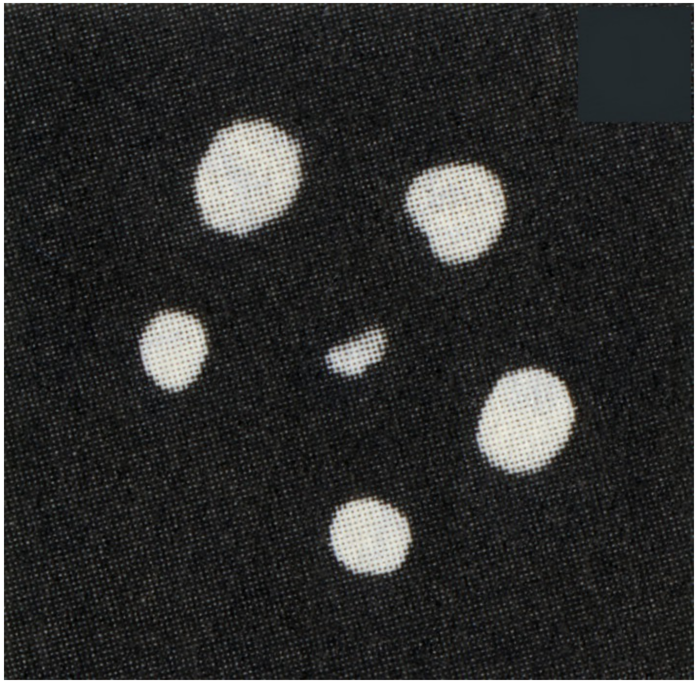
超流動^{4}He中の渦タングル

G. P. Bewley et al. Nature **441**, 588 (2006)



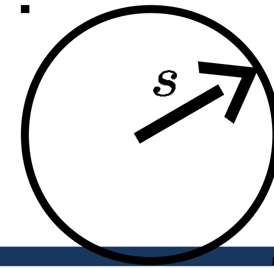
超流動^{4}He中の渦格子

Packard 1982

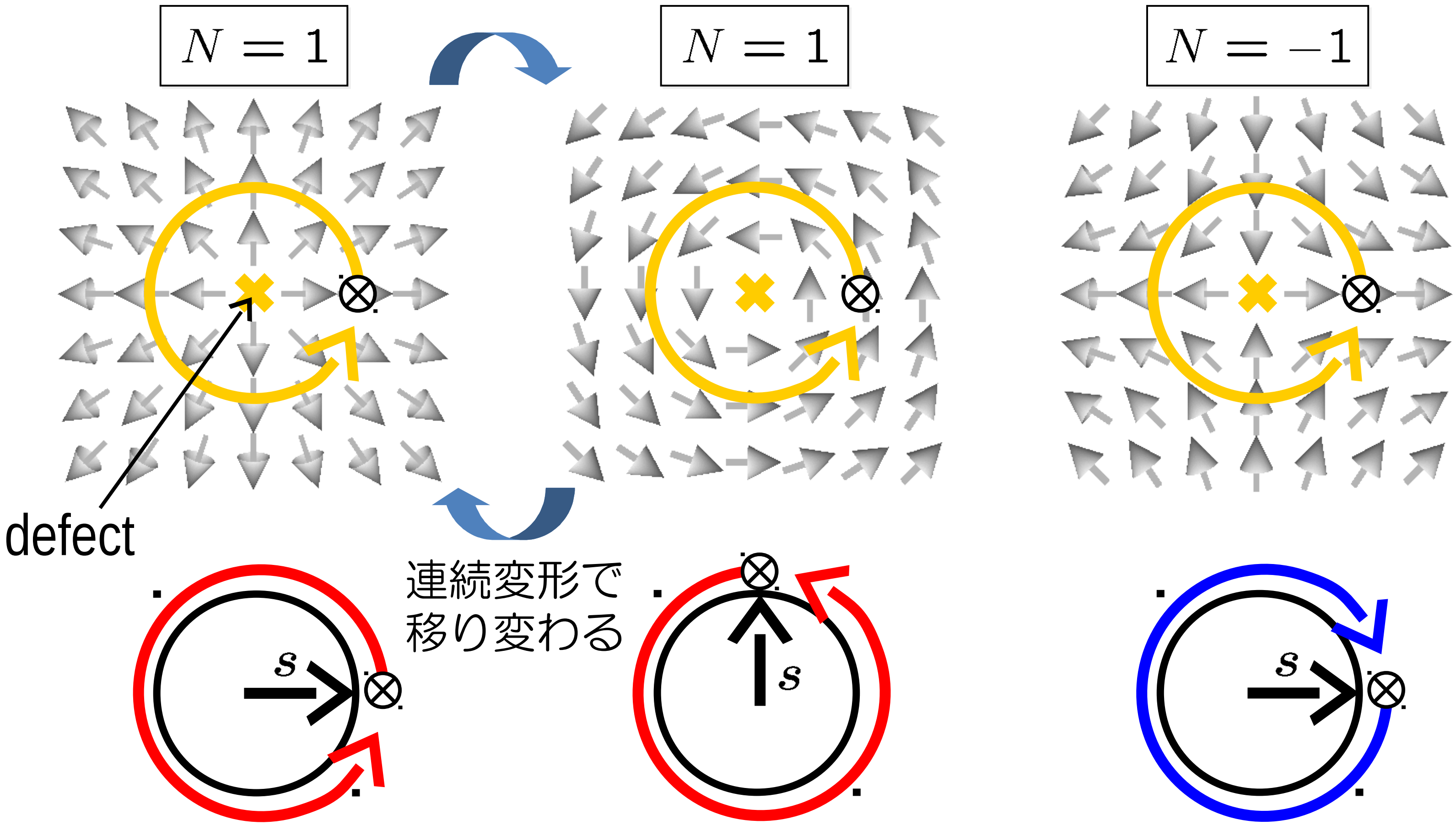


XY Spin

$$\boldsymbol{s} = (s_x,\ s_y)$$
$$U(1) \cong S^1$$



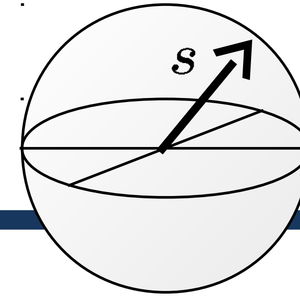
- 秩序変数：２次元単位ベクトル



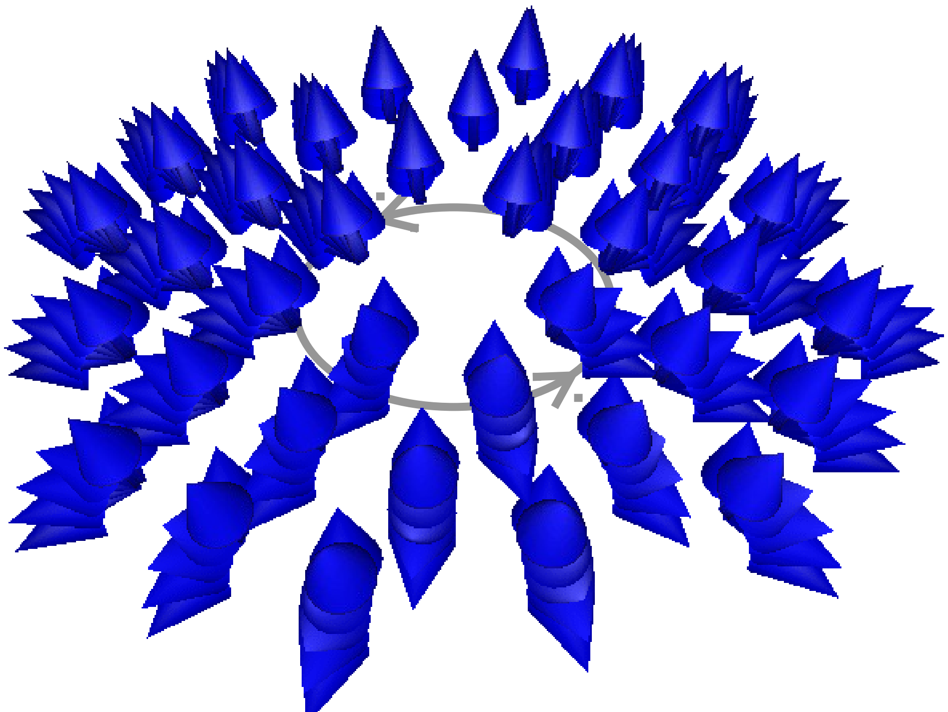
Heisenberg Spin

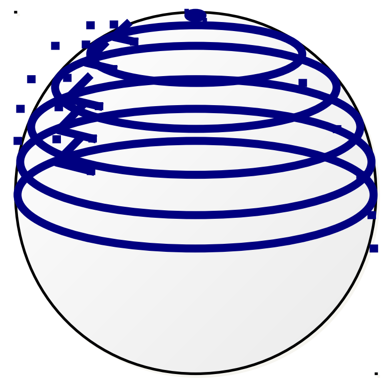
$\boldsymbol{s} = (s_x,\ s_y,\ s_z)$

二次元球面 S^2



- 秩序変数：３次元単位ベクトル





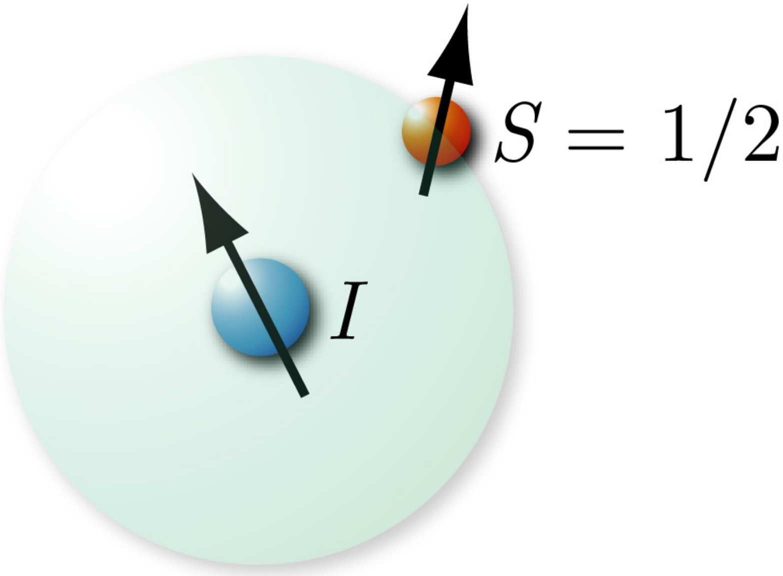
３次元的に回転させることによってXYスピンの欠陥は消える

⟶ 渦かどうかは秩序変数の自由度で決まる

スピノールBEC

原子のスピン自由度が生きているようなBECを考える

超微細相互作用により核と電子のスピンが結合する$(F = I + S + L)$



^{87}Rb, ^{23}Na, ^{7}Li, ^{41}K	F=1, 2
^{85}Rb	F=2, 3
^{133}Cs	F=3, 4
^{52}Cr	S=3, I=0

スピノールBEC

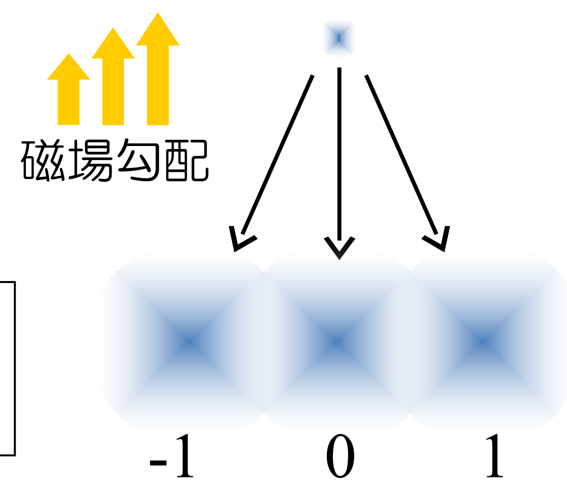
原子のスピン自由度が生きているようなBECを考える

^{87}Rb $(I = 3/2)$

$$F = 2 \begin{cases} m_F = 2 \\ m_F = 1 \\ m_F = 0 \\ m_F = -1 \\ m_F = -2 \end{cases} \qquad F = 1 \begin{cases} m_F = 1 \\ m_F = 0 \\ m_F = -1 \end{cases}$$

m_Fで特徴づけられる多成分のBECが実現する

スピン1：3成分の非対角長距離秩序 $\Psi = (\psi_1, \psi_0, \psi_{-1})$

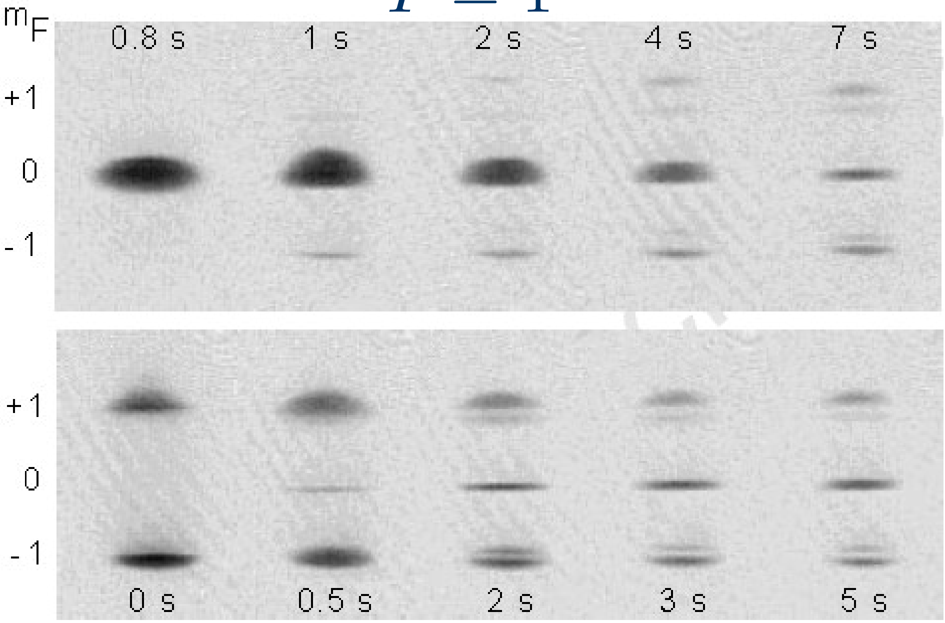


Stern-Gerlach実験により成分ごとに観測できる

BECのスピンダイナミクス

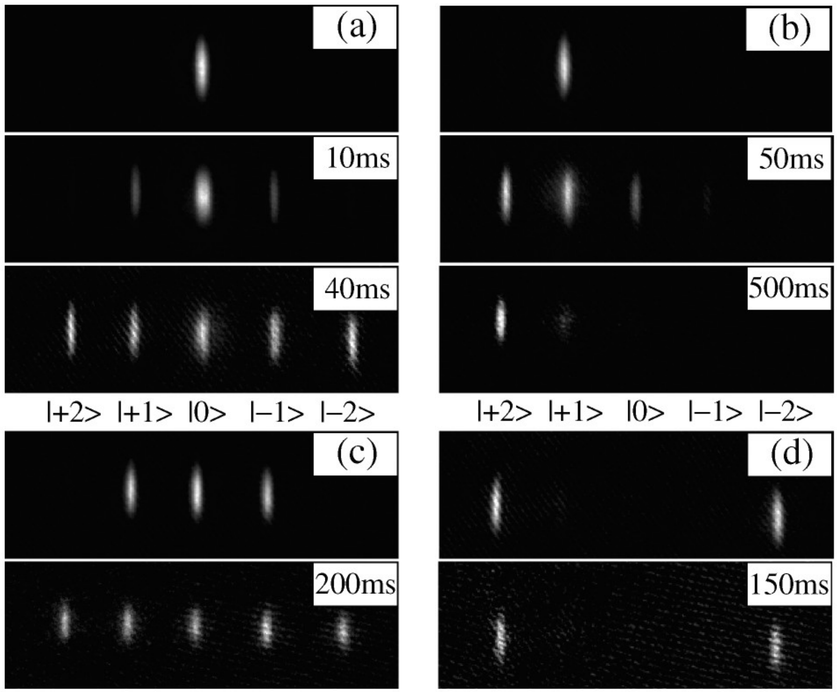
Stern-Gerlach実験

$F = 1$



J. Stenger et al. Nature **396**, 345 (1998)

$F = 2$



H. Schmaljohann et al. PRL **92**, 040402 (2004)

異なるm_Fの凝縮体は入れ替わることができる（スピンの回転演算に対応）

絶対零度における平均場ハミルトニアン(spin-1)

$$H = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m=-1}^{1} \nabla \Psi_m^* \nabla \Psi_m + \frac{c_0}{2}\rho^2 + \frac{c_1}{2}\boldsymbol{F}^2 \right]$$

密度　スピノール

$$c_0 = \frac{g_0 + 2g_2}{3}, \quad c_1 = \frac{g_2 - g_0}{3}$$

$$F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_- = F_+^T, \quad F_x = \frac{F_+ + F_-}{2}, \quad F_y = \frac{F_+ - F_-}{2i}$$

$$\rho = \sum_{m=-1}^{1} |\Psi_m^*|^2$$ ：粒子数密度

$$\boldsymbol{F} = \sum_{m,m'=-1}^{1} \Psi_m^* \hat{\boldsymbol{F}}_{mm'} \Psi_{m'}$$ ：スピン密度

波動関数全体の位相($U(1)_{\mathrm{G}}$)とスピン回転($SO(3)_{\mathrm{S}}$)の対称性：$U(1)_{\mathrm{G}} \times SO(3)_{\mathrm{S}}$の自由度が存在する。

$U(1)\times SO(3)$の破れと相図

$$H=\int d\boldsymbol{x}\left[\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{m=-1}^{1}\nabla\Psi_m^*\nabla\Psi_m+\frac{c_0}{2}\rho^2+\frac{c_1}{2}\boldsymbol{F}^2\right]$$

$c_1>0$：polar相（^{23}Na BEC）

$$e^{i\varphi}e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{F}}\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=0$$

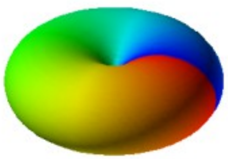
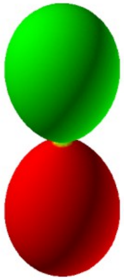
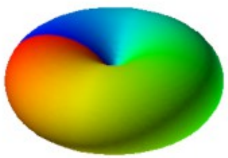
$c_1<0$：Ferromagnetic相（^{87}Rb BEC）

$$e^{i\varphi}e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{F}}\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\neq 0$$

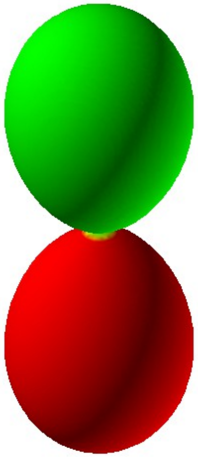
球面調和関数を用いたスピン状態の表示

$$\sum_{m=-1}^{1} \Psi_m Y_{2,m}$$

$Y_{1,1}$  + $Y_{1,0}$  + $Y_{1,\text{-}1}$ 

$\cos\theta$

Polar相

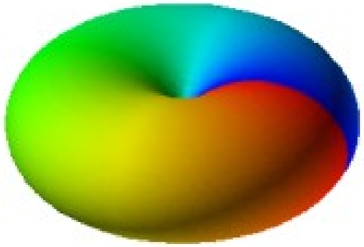


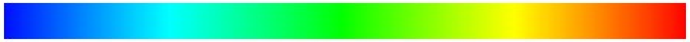
0

π

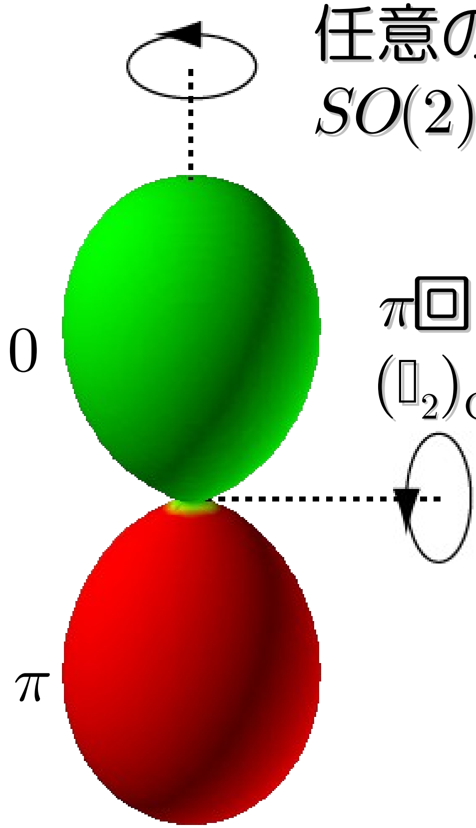
$-e^{i\phi}\sin\theta$

Ferromagnetic相



$-\pi$  π

Polar相の対称性



任意の回転
$SO(2)_{\mathrm{S}}$

π回転とπゲージ変換
$(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}$

Polar相は$SO(2)_{\mathrm{S}}$と$(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}$ $\rightarrow (D_\infty)_{\mathrm{G+S}}$の変換に対して不変である（円柱回転対称性）

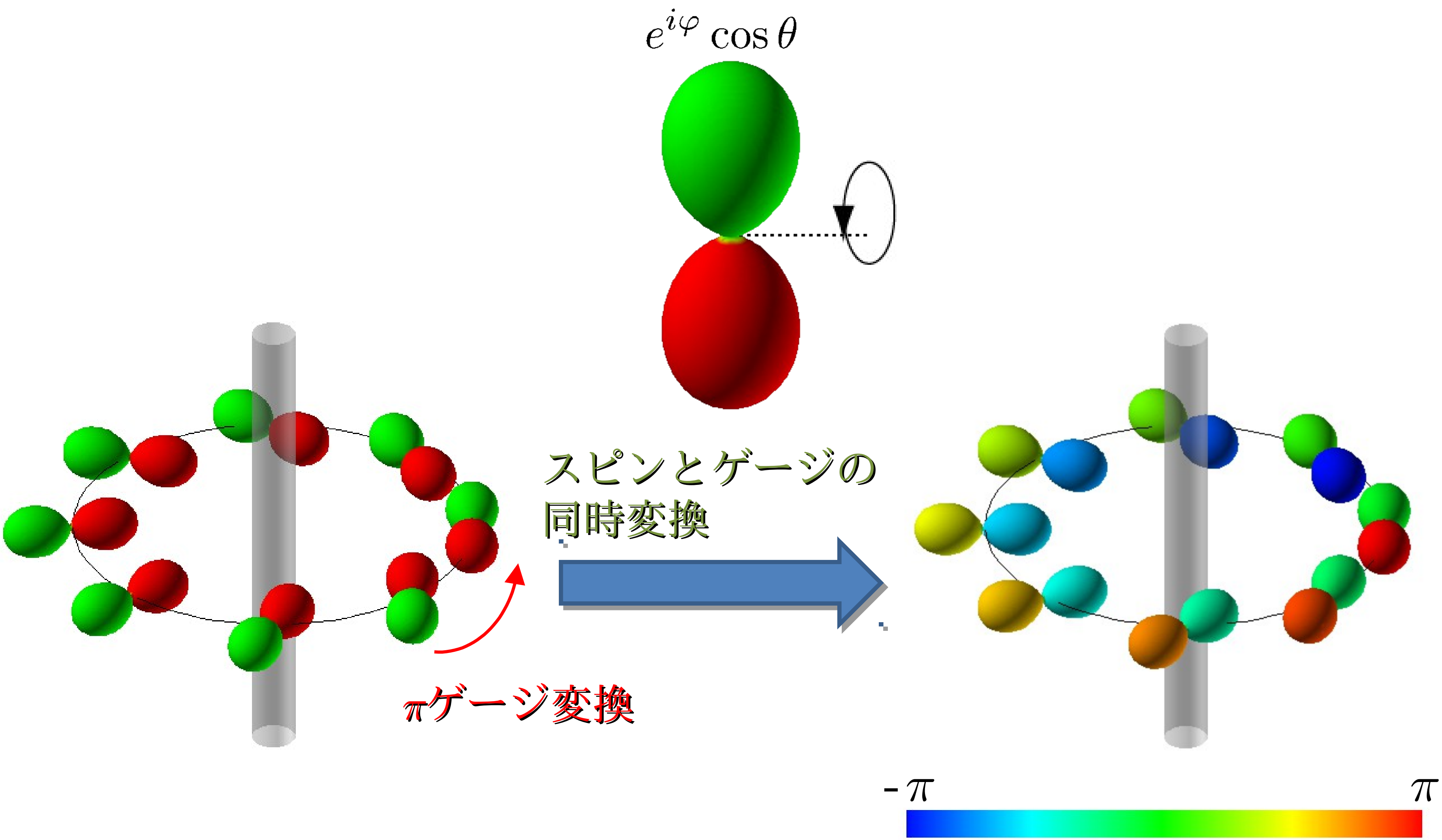
Polar相の空間

$$\frac{U(1)_{\mathrm{G}} \times SO(3)_{\mathrm{S}}}{(D_\infty)_{\mathrm{G+S}}} \simeq \frac{U(1)_{\mathrm{G}} \times (S^2)_{\mathrm{S}}}{(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}}$$

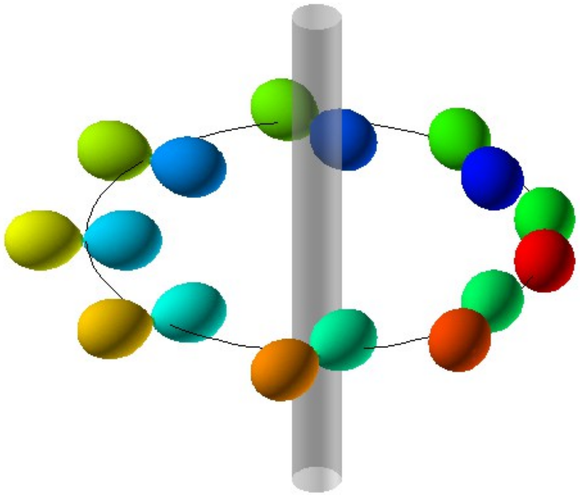
実射影平面
RP^2 (半球面)

Polar相はNematic液晶とほぼ同様の対称性を持っている

Polar相の量子渦

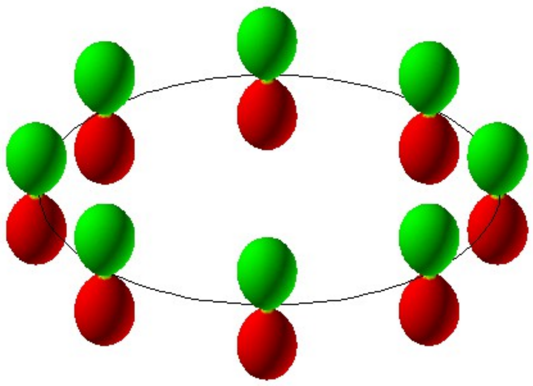


Polar相の量子渦



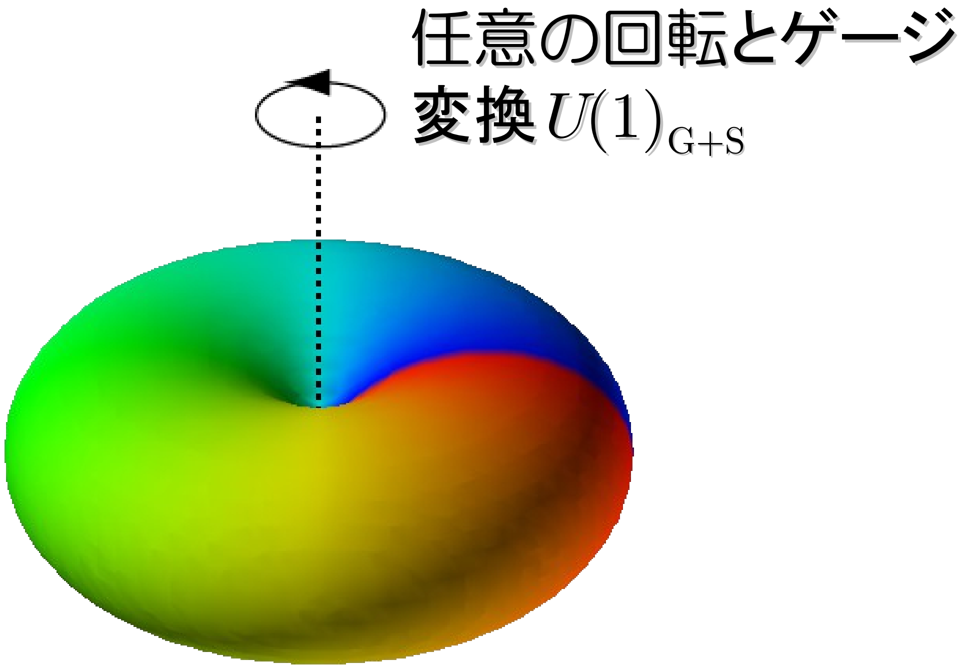
ほどけない(量子渦になる)

$$\pi_1\left[\frac{U(1)_{\mathrm{G}}\times(S^2)_{\mathrm{S}}}{(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}}\right]\cong(\mathbb{Z})_{\mathrm{G}}\times(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}$$



ほどける(量子渦にならない)

Ferromagnetic相の対称性

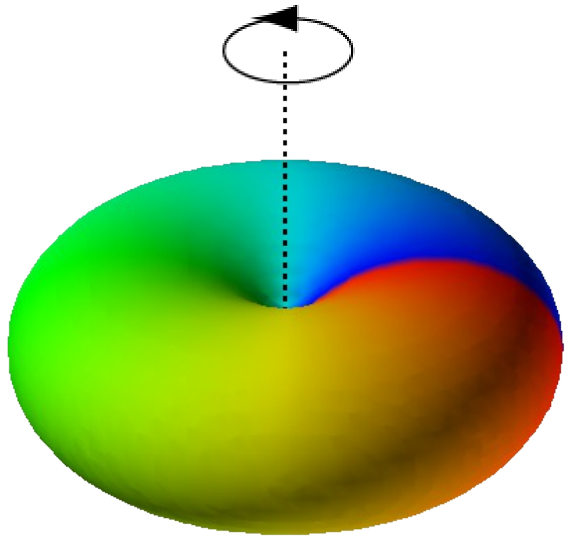


Ferromagnetic相は$U(1)_{\mathrm{G+S}}$の変換に対して不変である。（スピン・ゲージ回転対称性）

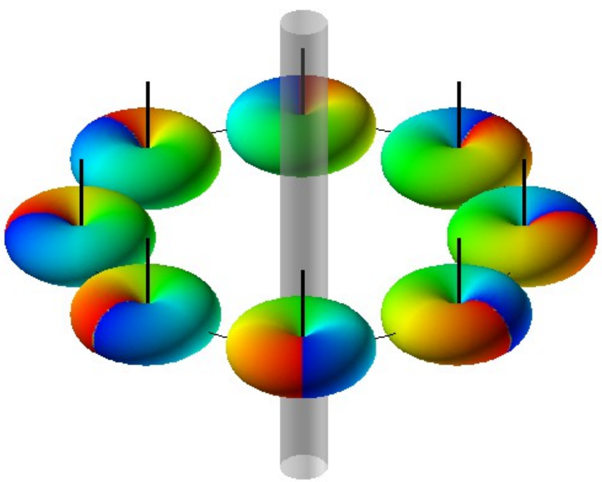
Ferromagnetic相の空間

$$\frac{U(1)_{\mathrm{G}} \times SO(3)_{\mathrm{S}}}{(U(1))_{\mathrm{G+S}}} \cong (SO(3))_{\mathrm{G+S}}$$

Ferromagnetic相の渦

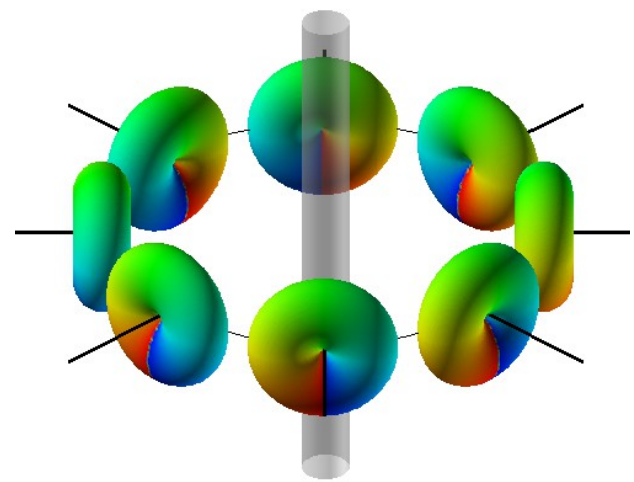


ゲージ渦

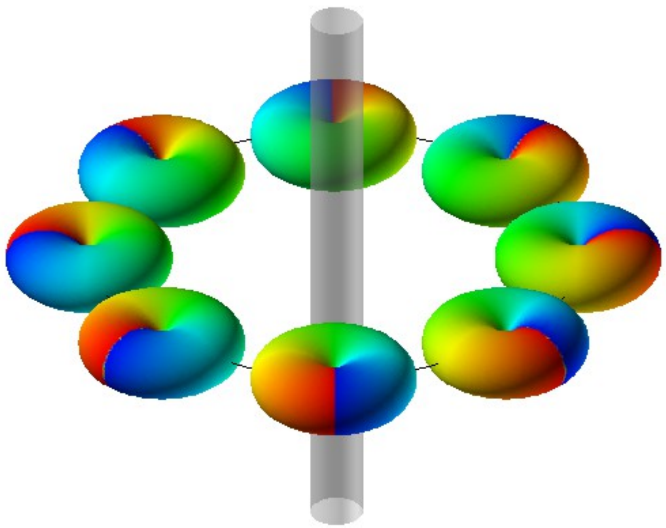


連続変形によって
移り変わる

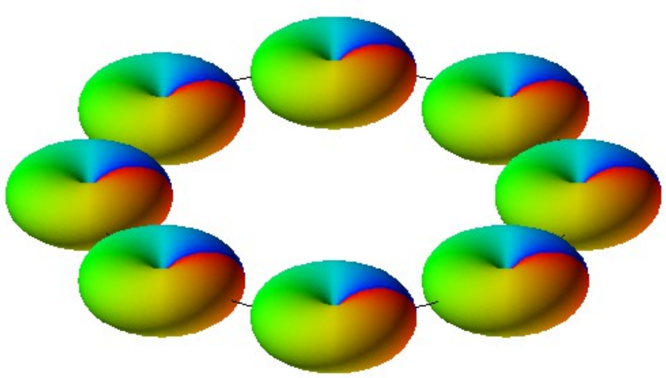
スピン渦



Ferromagnetic相の量子渦



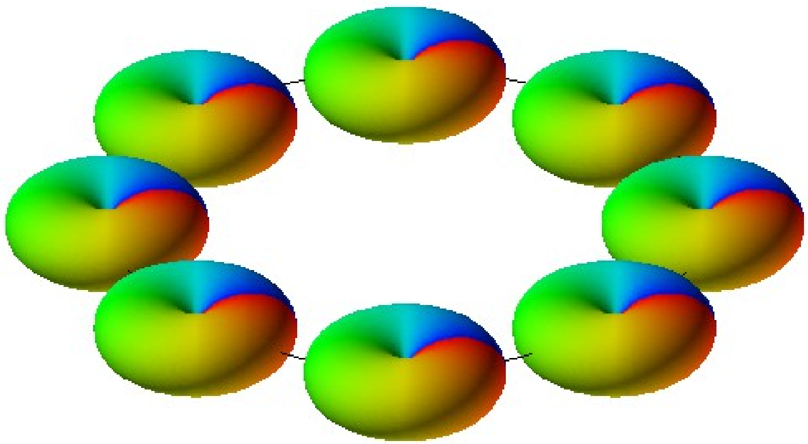
ほどけない（量子渦になる）



ほどける（量子渦にならない）

Ferromagnetic相の量子渦

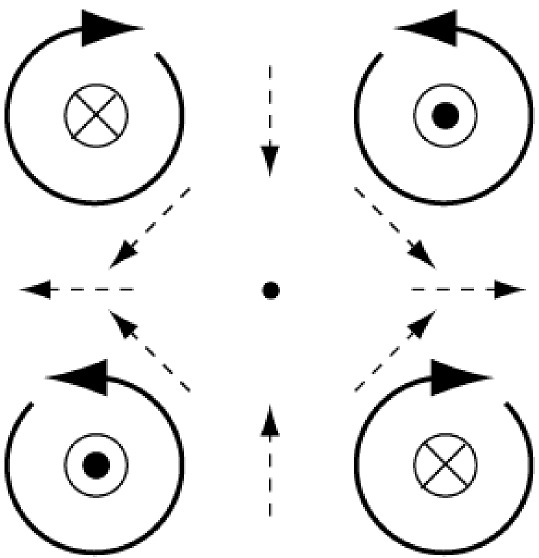
巻き数2の量子渦はほどける

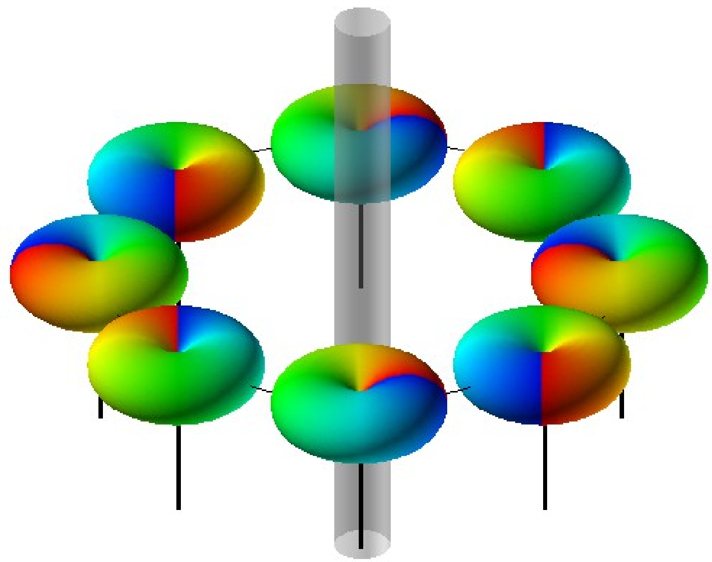


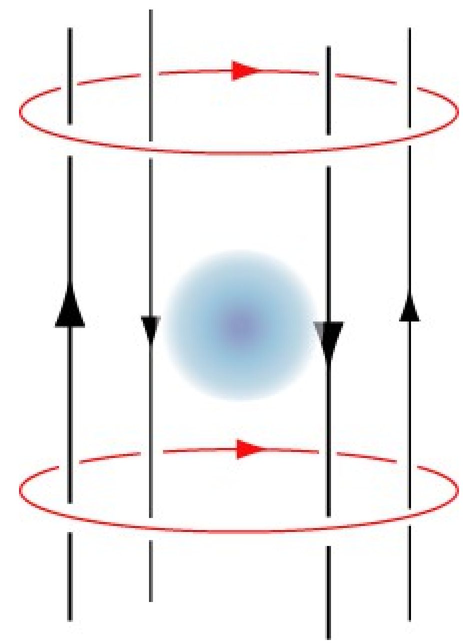
$$\pi_1\left[(SO(3))_{\mathrm{G+S}}\right] \cong (\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}$$

Ferromagnetic相の量子渦

4重極磁場を用いて巻き数2の渦を作る



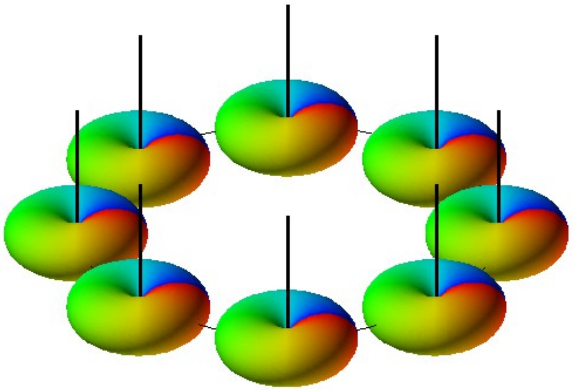




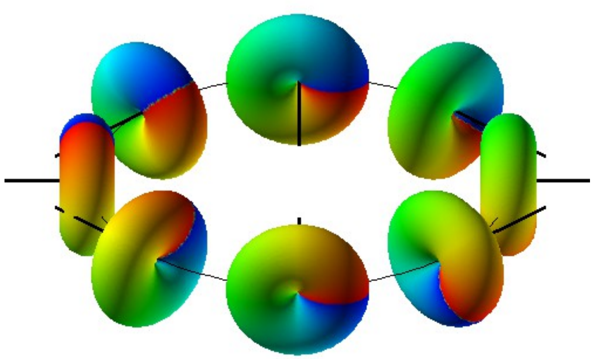
磁場を加えておけば渦がほどけない

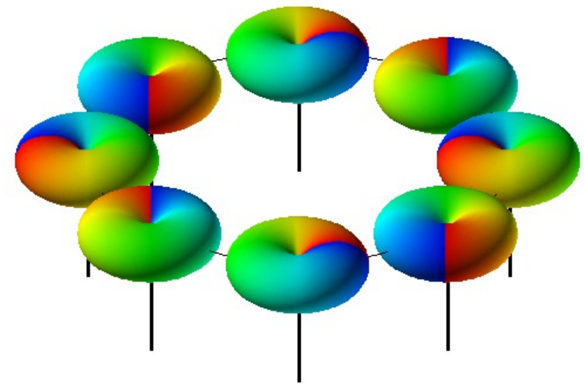
Ferromagnetic相の量子渦

4重極磁場を用いて巻き数2の渦を作る

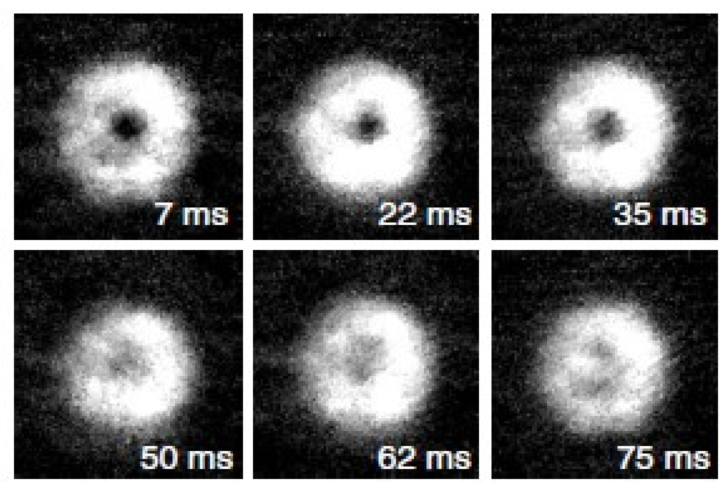


$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





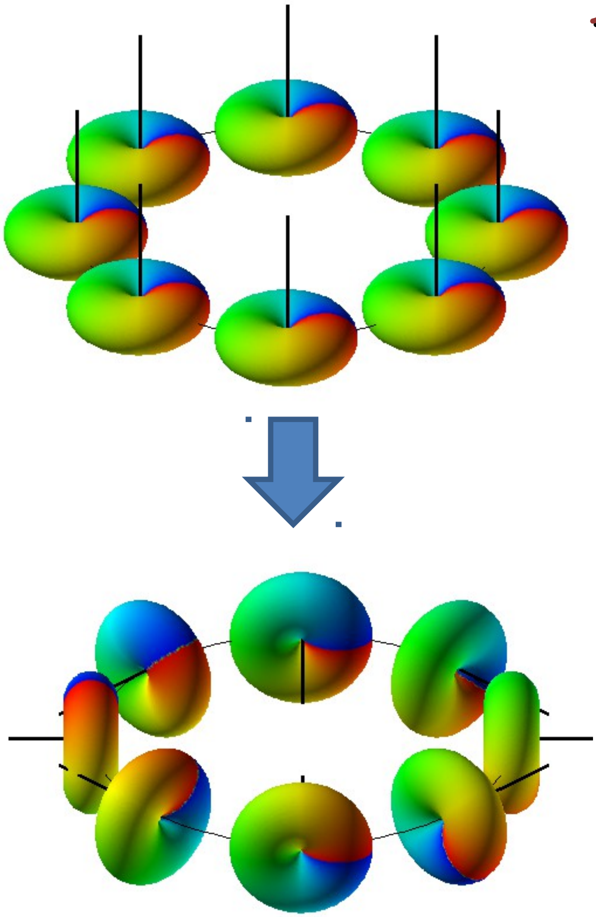
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2i\theta} \end{pmatrix}$$



Y. Shin, et al. PRL **93**, 160406 (2004)

Ferromagnetic相の量子渦

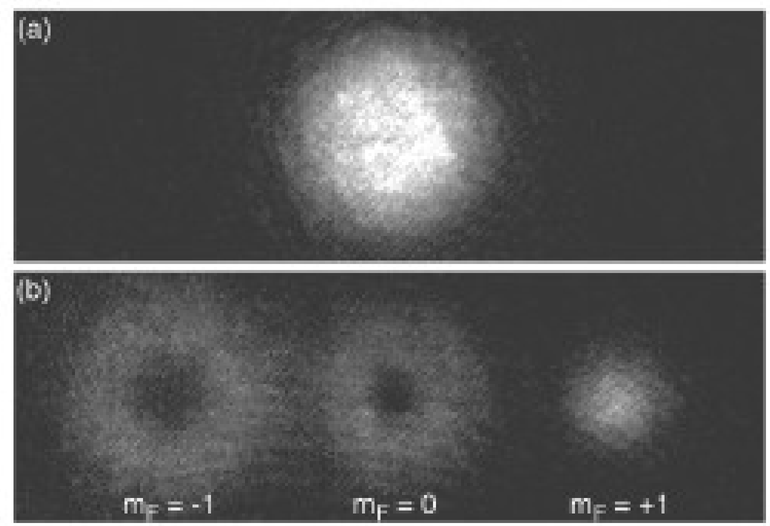
テクスチャの形成



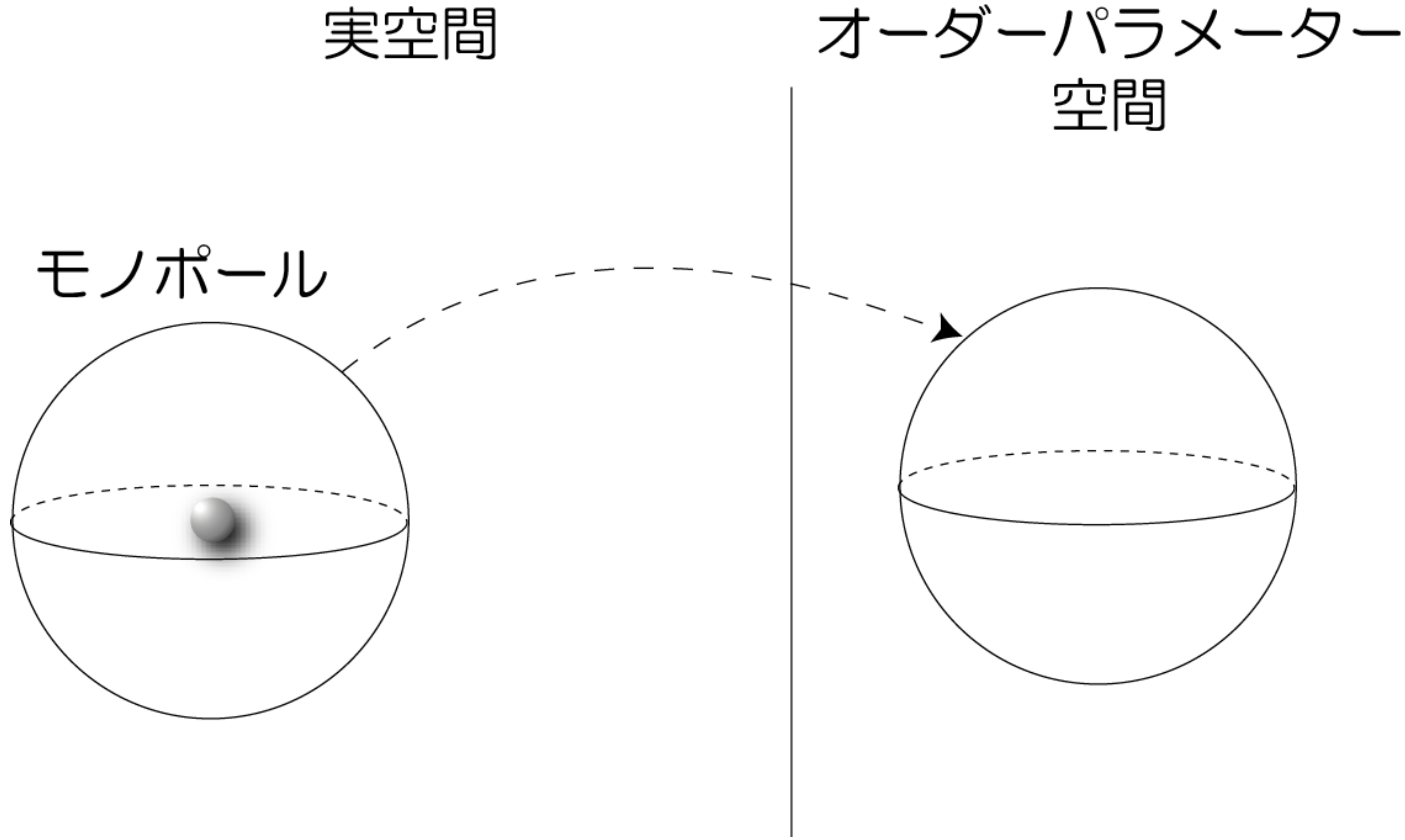
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{-i\theta} \\ e^{-2i\theta} \end{pmatrix}$$

A. E. Leanhardt, et al. PRL **90**, 140403 (2003)



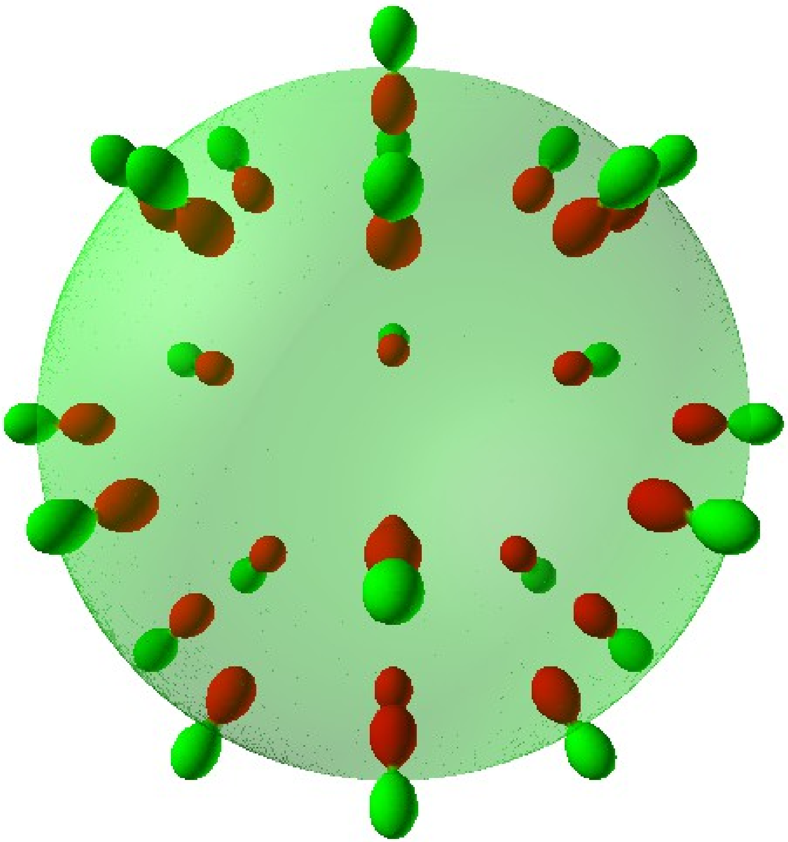
モノポールと2次元スカーミオン



量子渦のときに用いたループの代わりに、閉じた球面から球面への写像を考える: π_2

モノポールと2次元スカーミオン

Polar相におけるモノポール

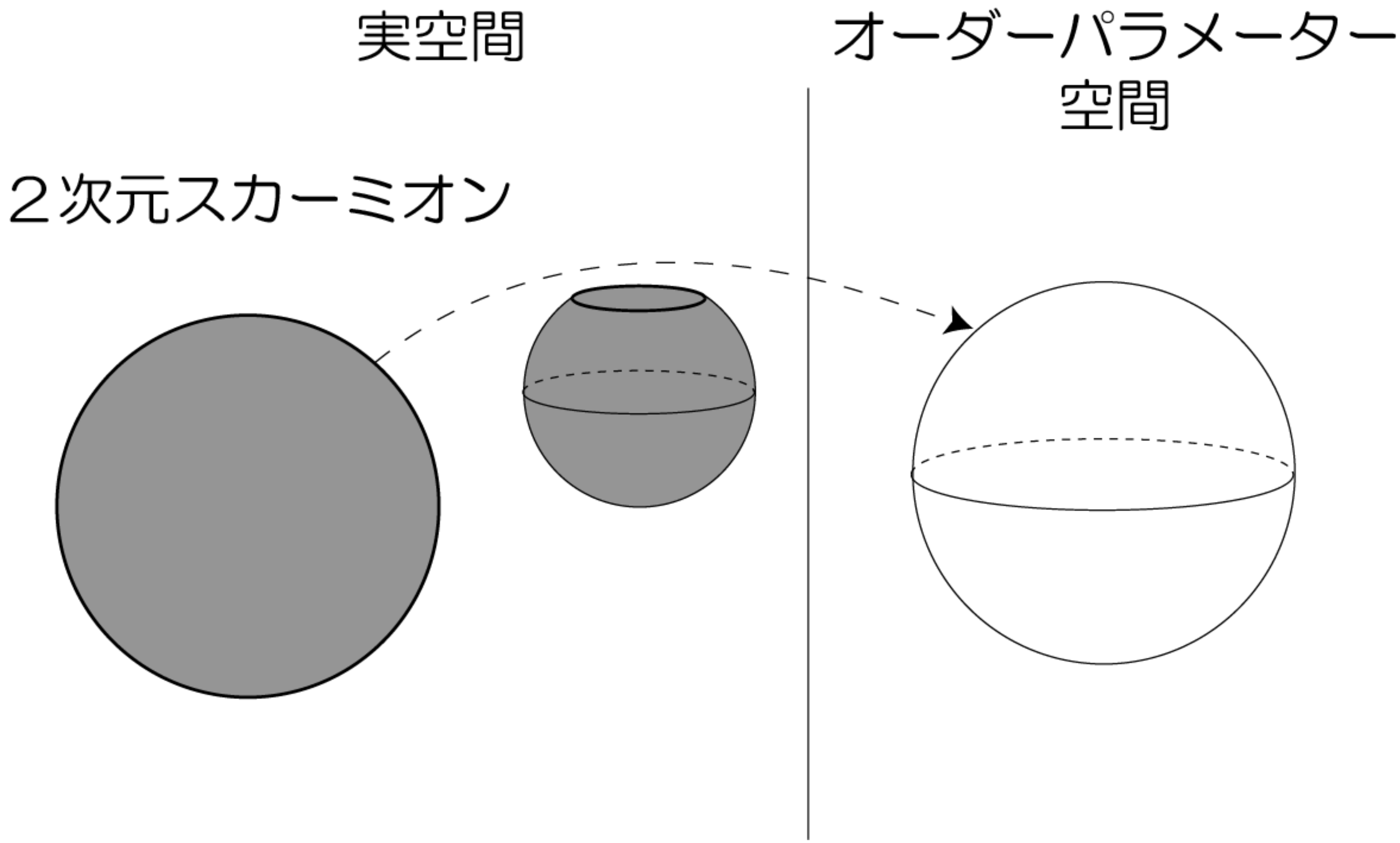


$$\pi_2\left[\frac{U(1)_{\mathrm{G}}\times(S^2)_{\mathrm{S}}}{(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}}\right]\cong(\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$$

Ferromagnetic相にモノポールは存在しない

$$\pi_1\left[(SO(3))_{\mathrm{G+S}}\right]\cong 1$$

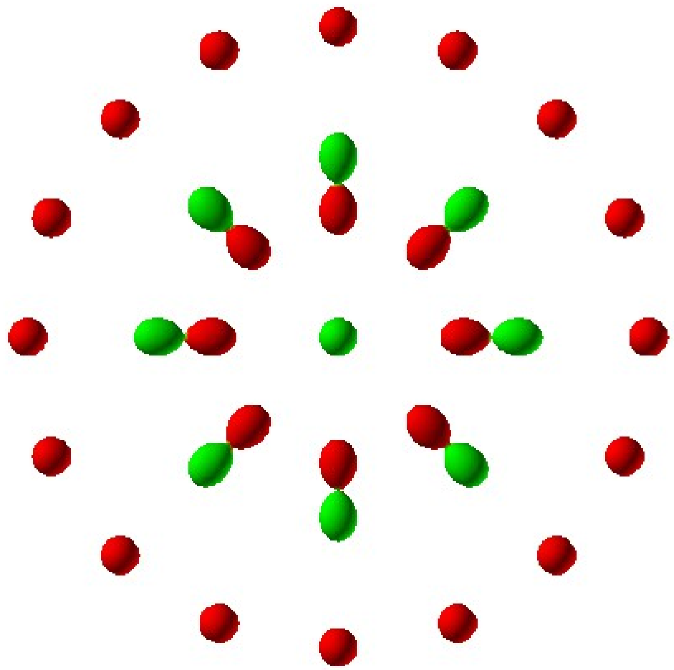
モノポールと2次元スカーミオン

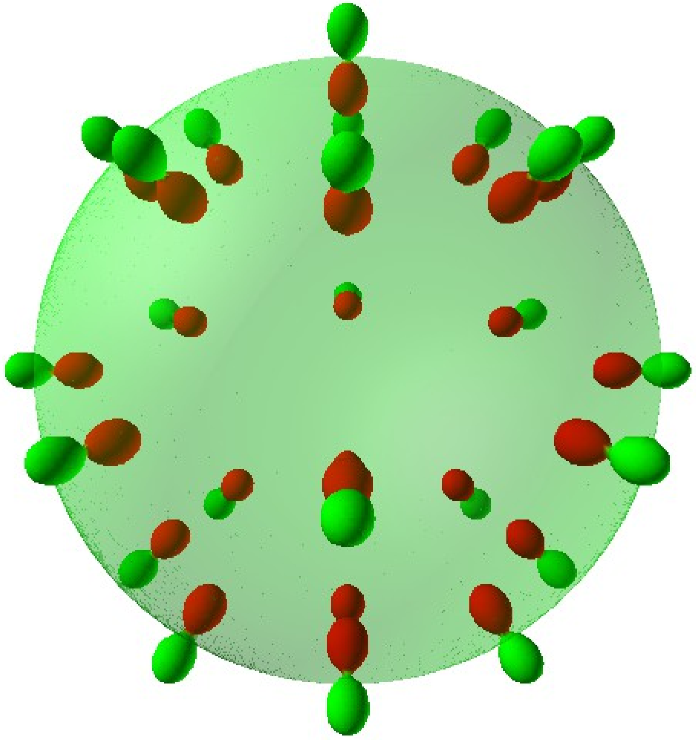


実空間で球面の代わりに境界を同一視した円盤から球面への写像を考えることもできる: π_2

モノポールと2次元スカーミオン

Polar相におけるスカーミオンとモノポール

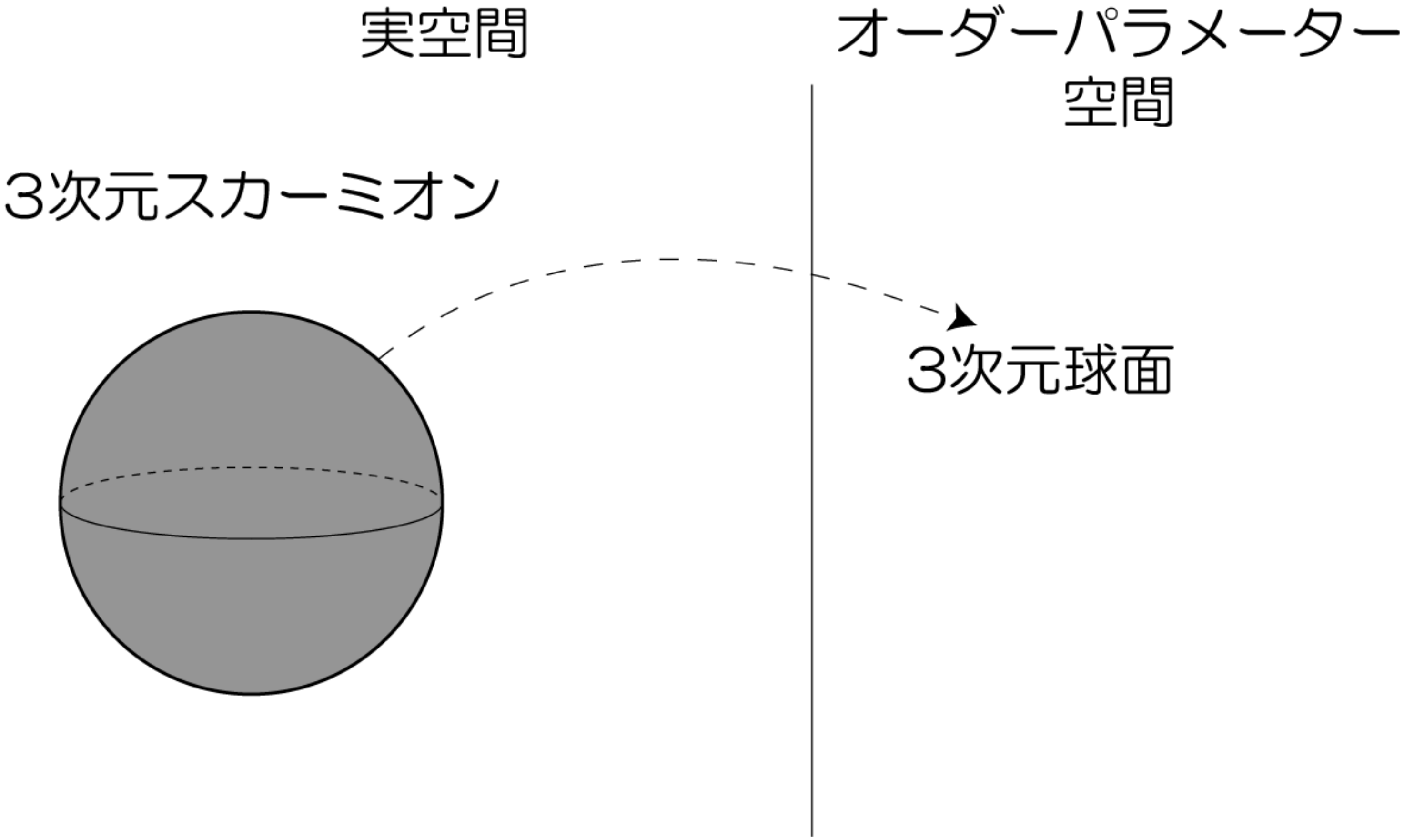




L. S. Leslie, et al. arXiv:0910.4918

$$\pi_2\left[\frac{U(1)_{\mathrm{G}}\times(S^2)_{\mathrm{S}}}{(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}}\right]\cong(\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$$

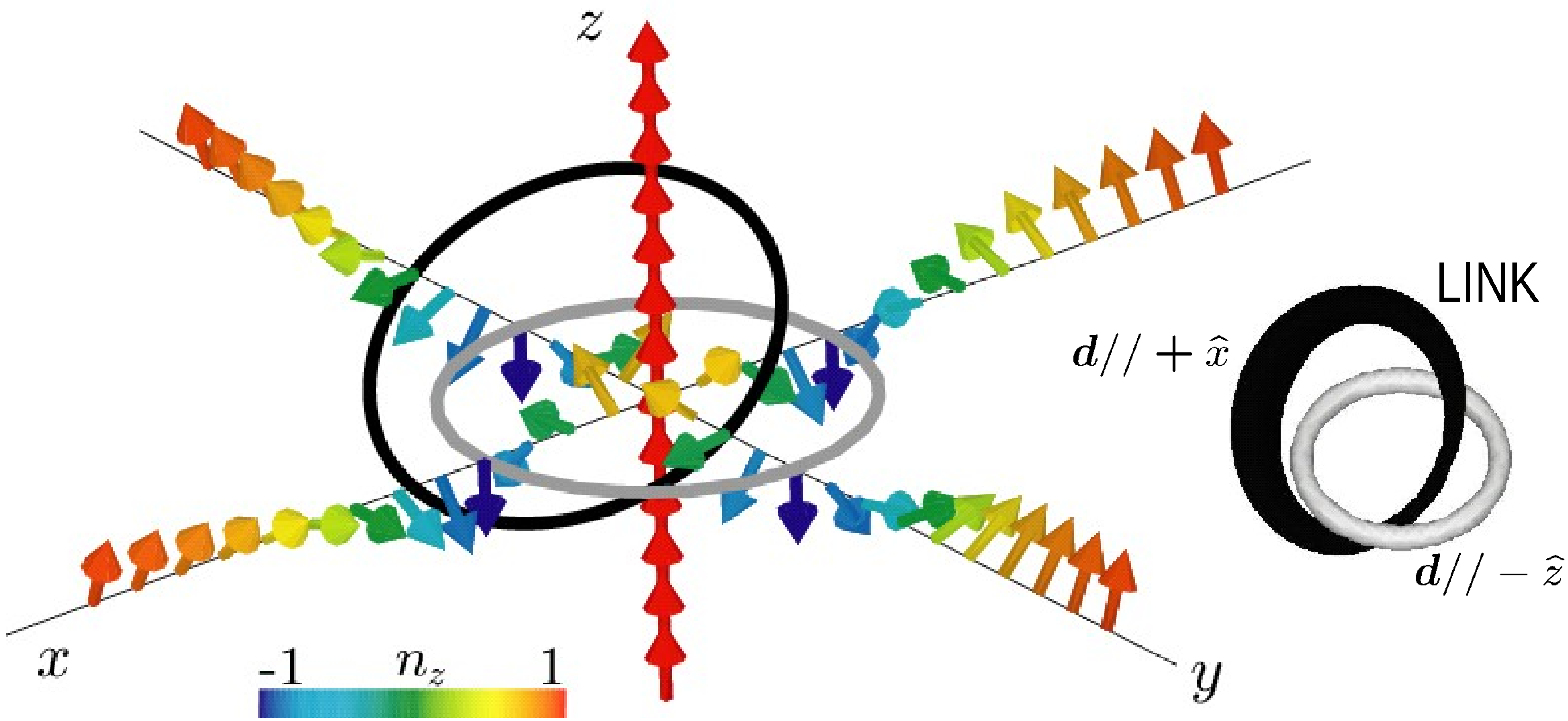
3次元スカーミオン



2次元スカーミオンと同様に境界を同一視した3次元球から3次元球面への写像を考えることもできる: π_3

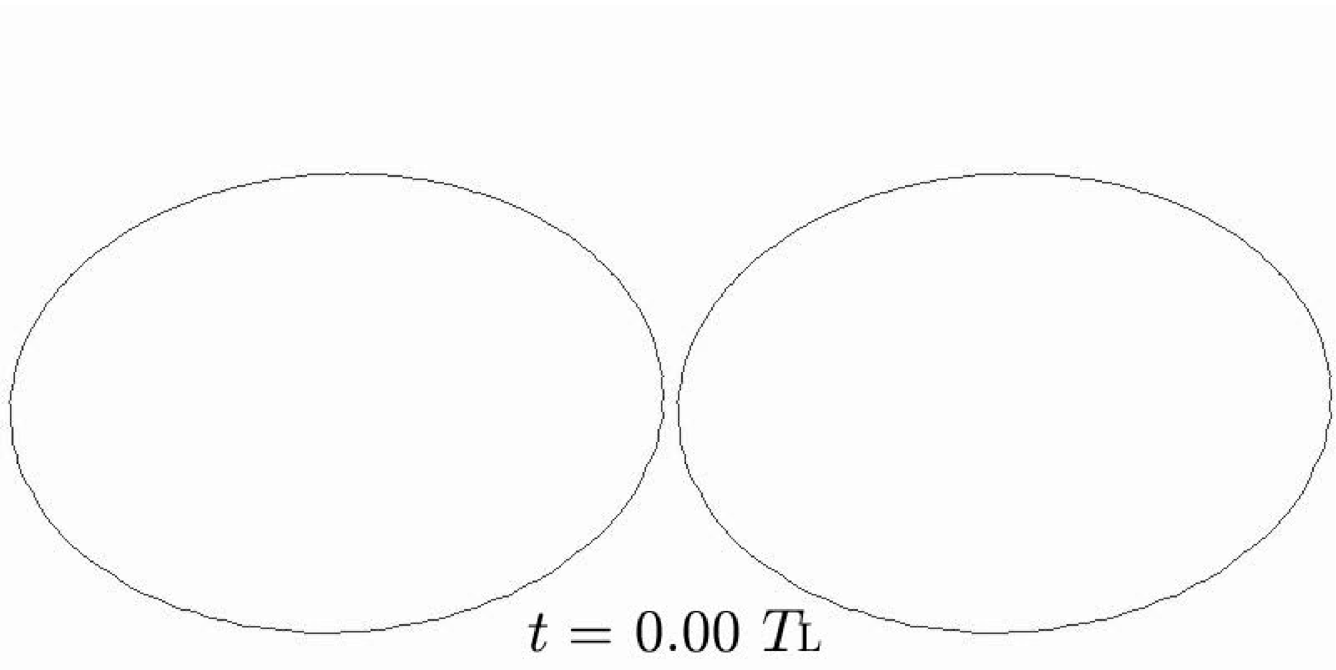
3次元スカーミオン

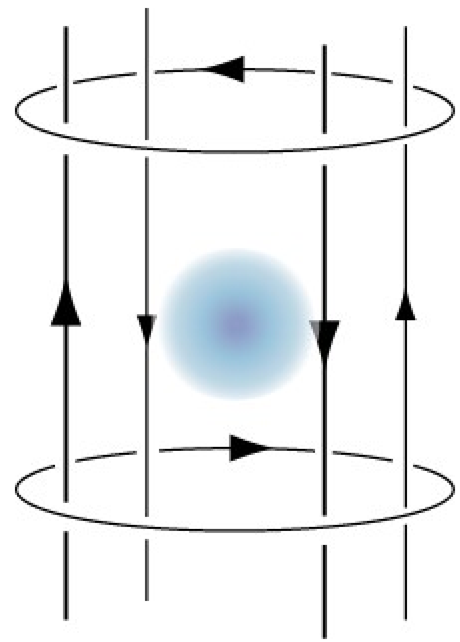
Y. Kawaguchi, et al., PRL **100**, 180403 (2008)

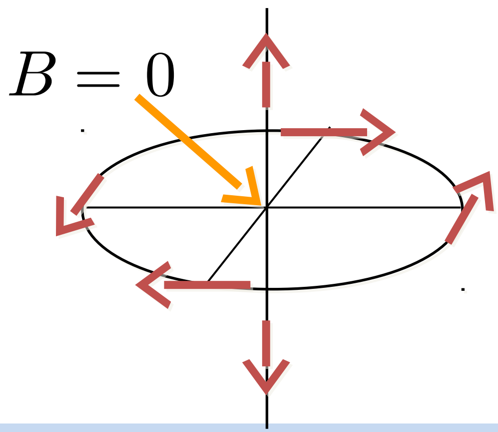


$$\pi_3\left[\frac{U(1)_{\mathrm{G}}\times(S^2)_{\mathrm{S}}}{(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{G+S}}}\right]\cong(\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$$

3次元スカーミオン

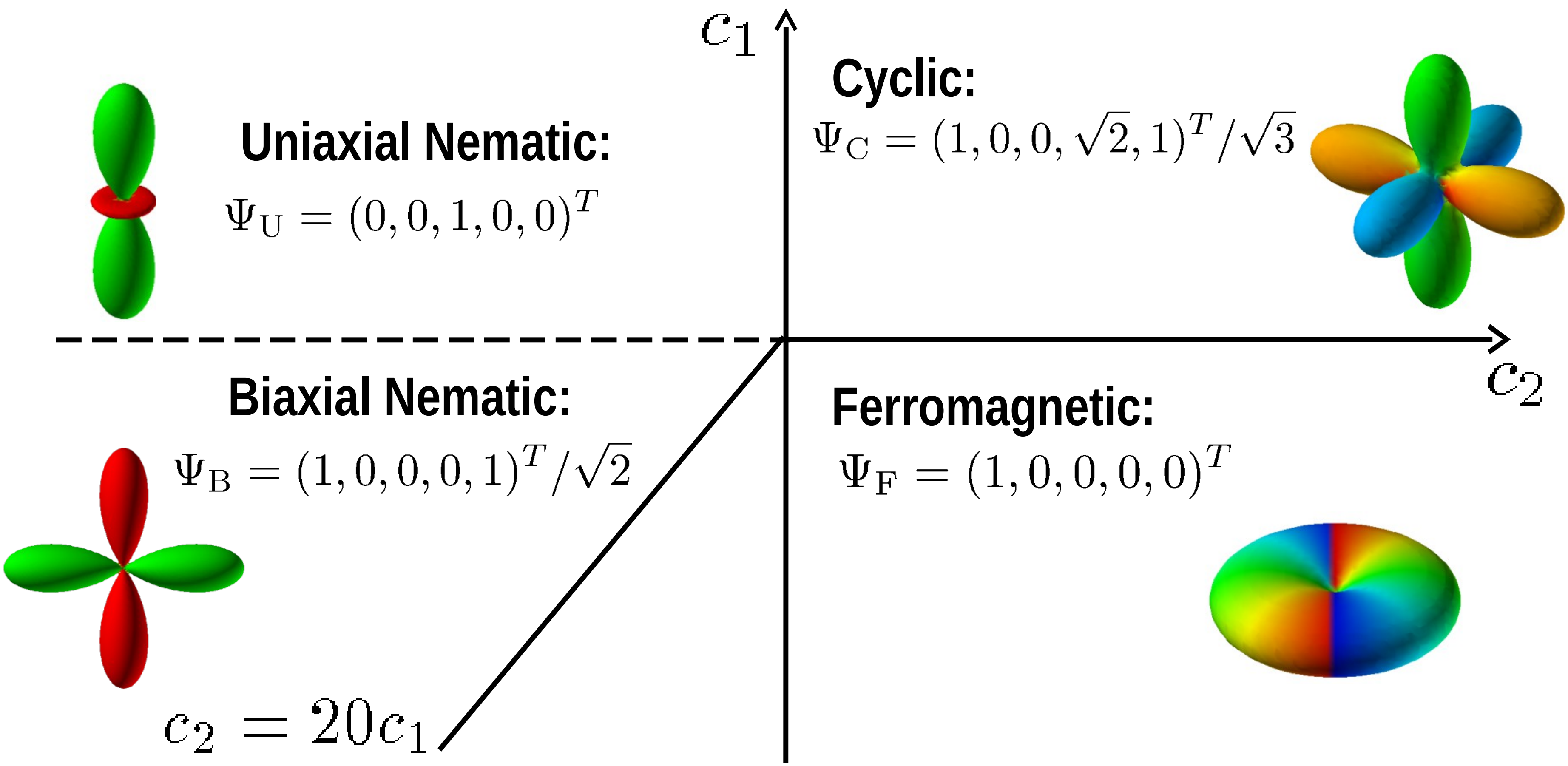




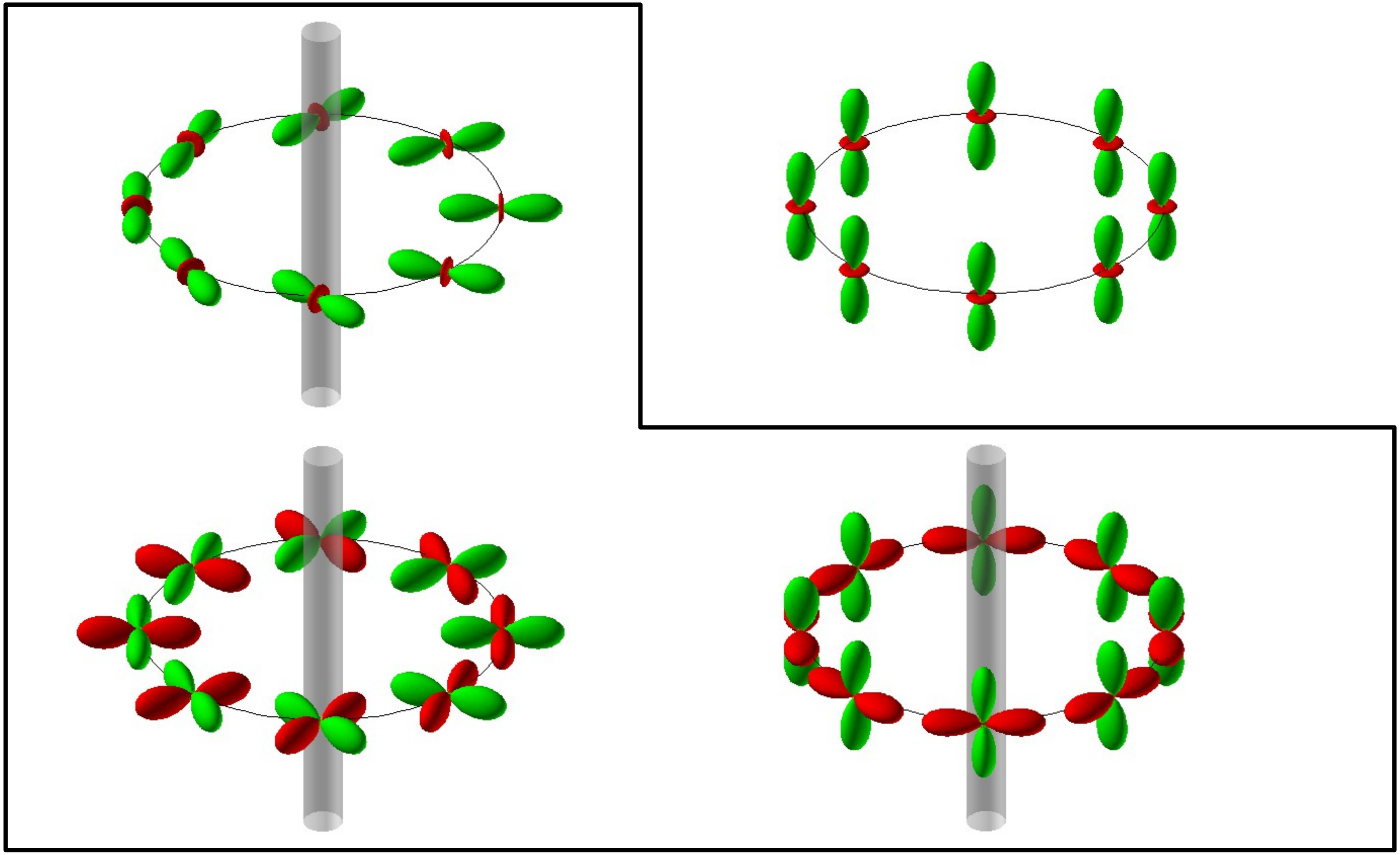


Spin-2の場合

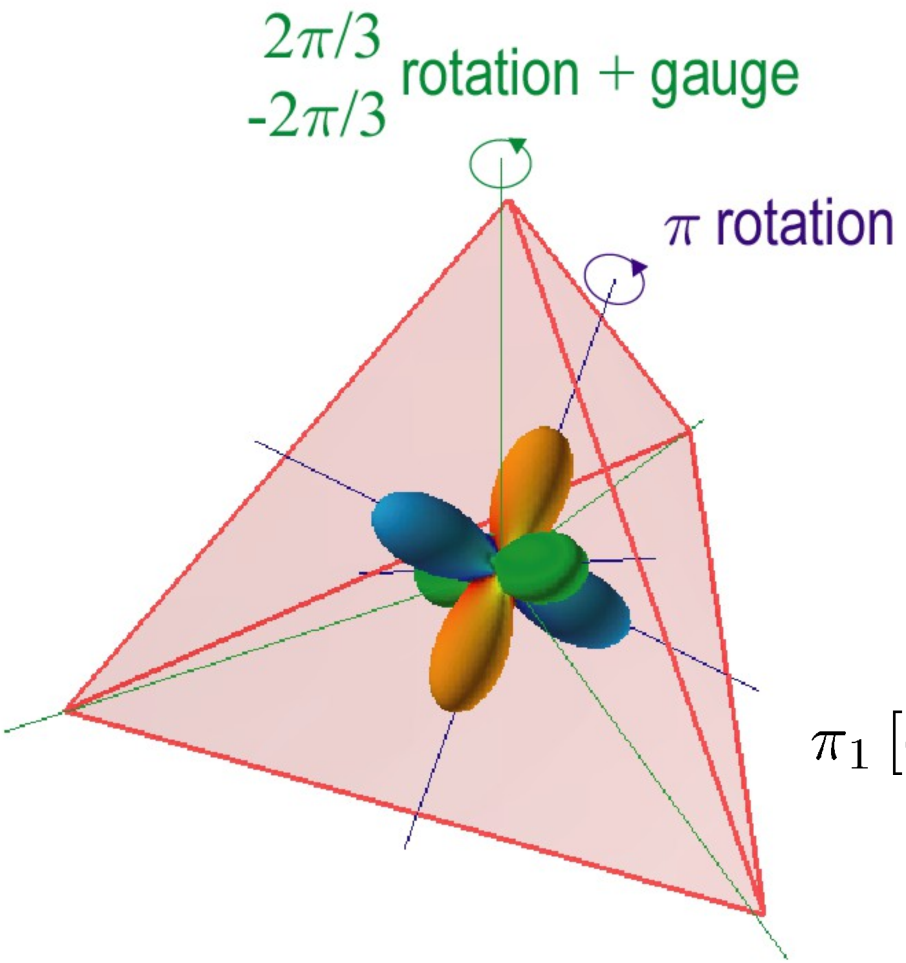
$$H=\int d\boldsymbol{x}\left[-\Psi_m^*\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_m+\frac{c_0}{2}n_{\mathrm{tot}}^2+\frac{c_1}{2}\boldsymbol{F}^2+\frac{c_2}{2}|A_{20}|^2\right]$$



Spin-2の量子渦(Nematic相)



Spin-2の量子渦(Cyclic相)



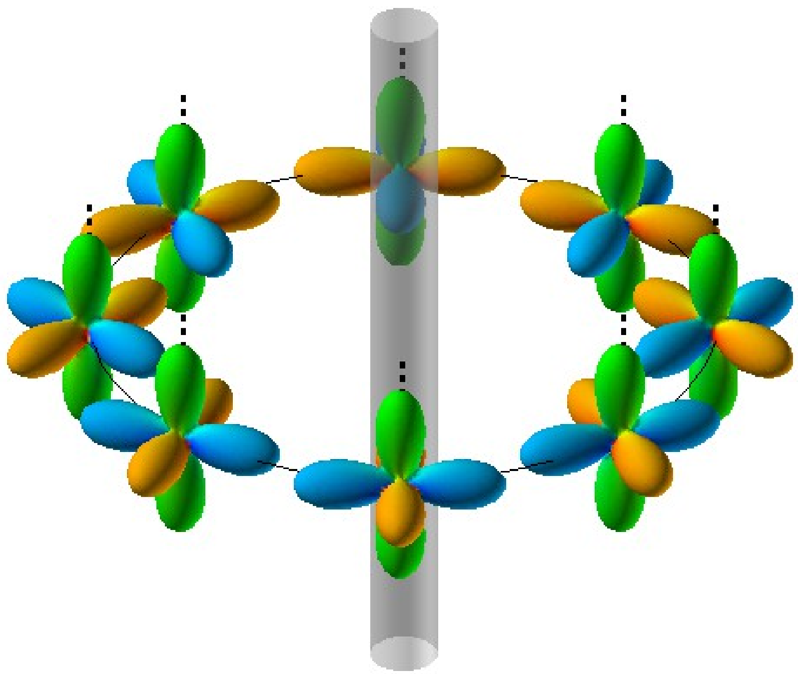
12種類の回転と正四面体を不変に保つ回転とが1対1に対応する

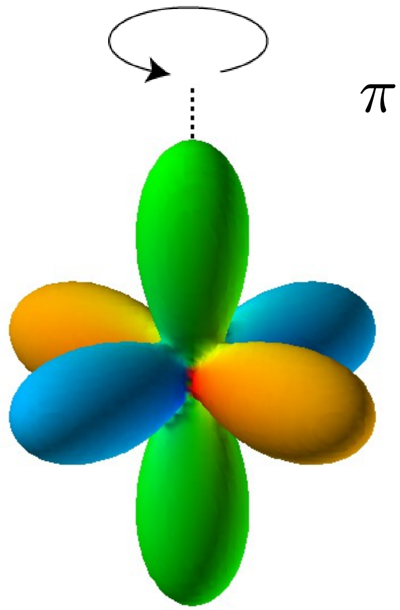
π_1 [cyclic] $\cong$ [T を部分群として持つ群]

非可換量子渦

Spin-2の量子渦(Cyclic相)

1/2-spin vortex

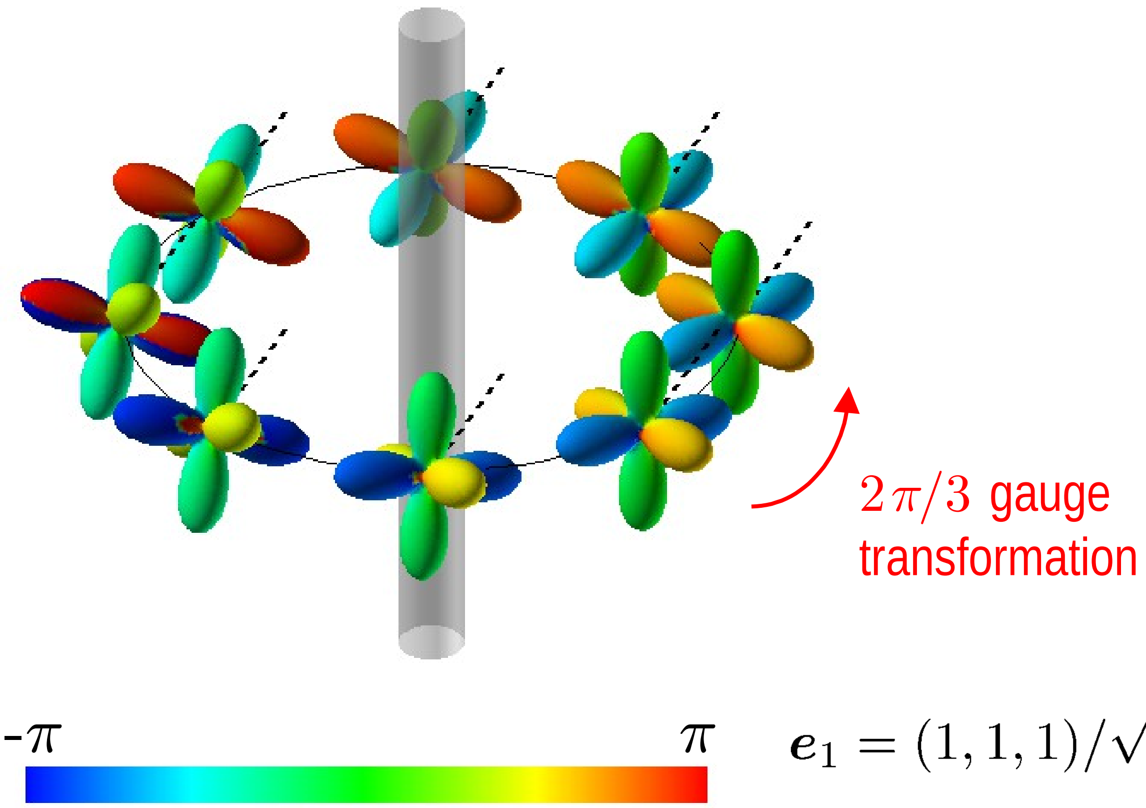


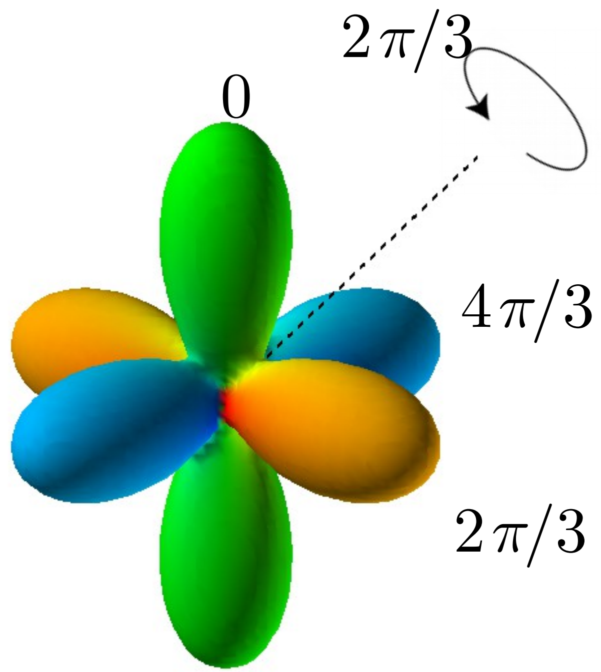


$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$$

Spin-2の量子渦(Cyclic相)

1/3 vortex





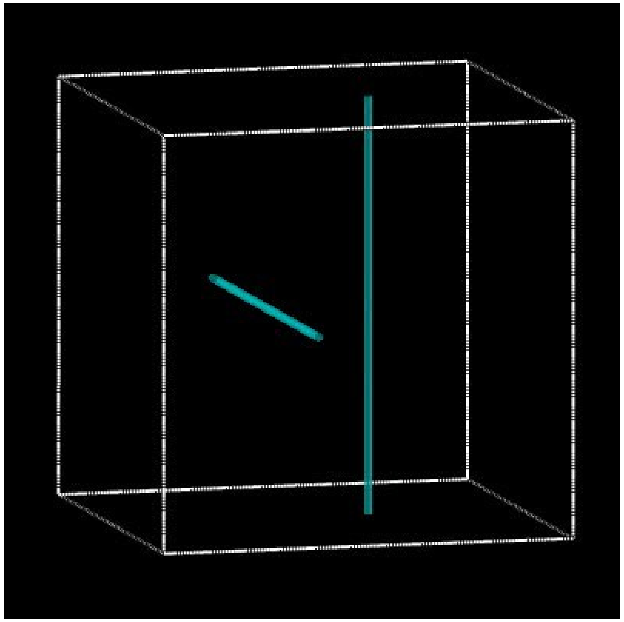
$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad \boldsymbol{e}_2 = (1,-1,-1)/\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = (-1,1,-1)/\sqrt{3}, \quad \boldsymbol{e}_4 = (-1,-1,1)/\sqrt{3}$$

位相欠陥のダイナミクス

量子渦の衝突
2次元スカーミオンと量子渦の相互作用
量子乱流

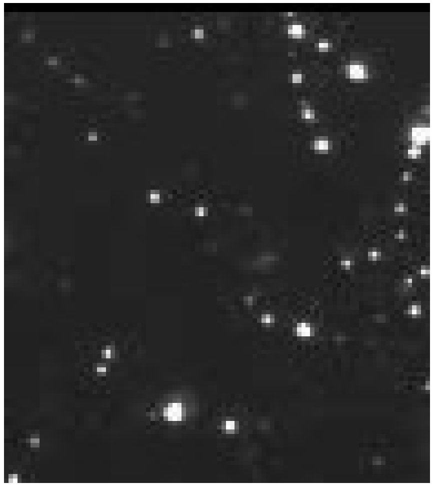
量子渦の衝突ダイナミクス



非線型Schrödinger方程式のシミュレーション

MK et al., PRL **103**, 115301 (2009)

1成分BECその他、可換な量子渦が衝突すると再結合を起こすことがよく知られている



超流動^{4}He中での再結合

スピン2のBECに対する非線型Schrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_m}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi_m^*}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_2 + c_0 n_{\text{tot}}\Psi_2 + c_1(F_-\Psi_1 + 2F_z\Psi_2) + \frac{c_2}{\sqrt{5}}A_{00}\Psi^*_{-2}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_1 + c_0 n_{\text{tot}}\Psi_1 + c_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}F_-\Psi_0 + F_+\Psi_2 + F_z\Psi_1\right) - \frac{c_2}{\sqrt{5}}A_{00}\Psi^*_{-1}$$

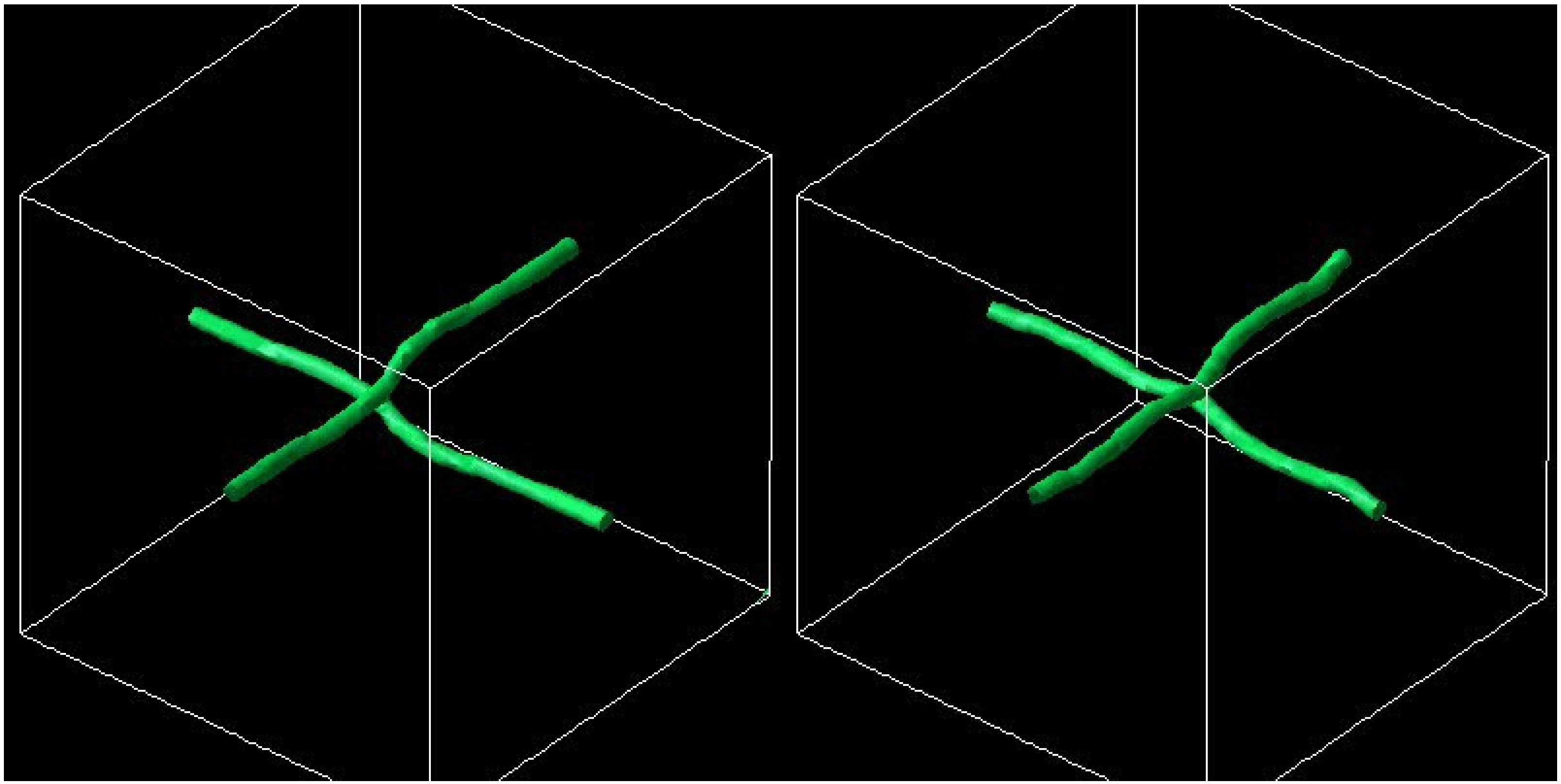
$$i\hbar\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_0 + c_0 n_{\text{tot}}\Psi_0 + \frac{\sqrt{6}}{2}c_1(F_-\Psi_{-1} + F_+\Psi_1) + \frac{c_2}{\sqrt{5}}A_{00}\Psi^*_0$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{-1}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_{-1} + c_0 n_{\text{tot}}\Psi_{-1} + c_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}F_+\Psi_0 + F_-\Psi_{-2} - F_z\Psi_{-1}\right) - \frac{c_2}{\sqrt{5}}A_{00}\Psi^*_1$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{-2}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_{-2} + c_0 n_{\text{tot}}\Psi_{-2} + c_1(F_+\Psi_{-1} - 2F_z\Psi_{-2}) + \frac{c_2}{\sqrt{5}}A_{00}\Psi^*_2$$

この方程式を用いて非可換量子渦の衝突がどうなるか調べる

量子渦の衝突ダイナミクス

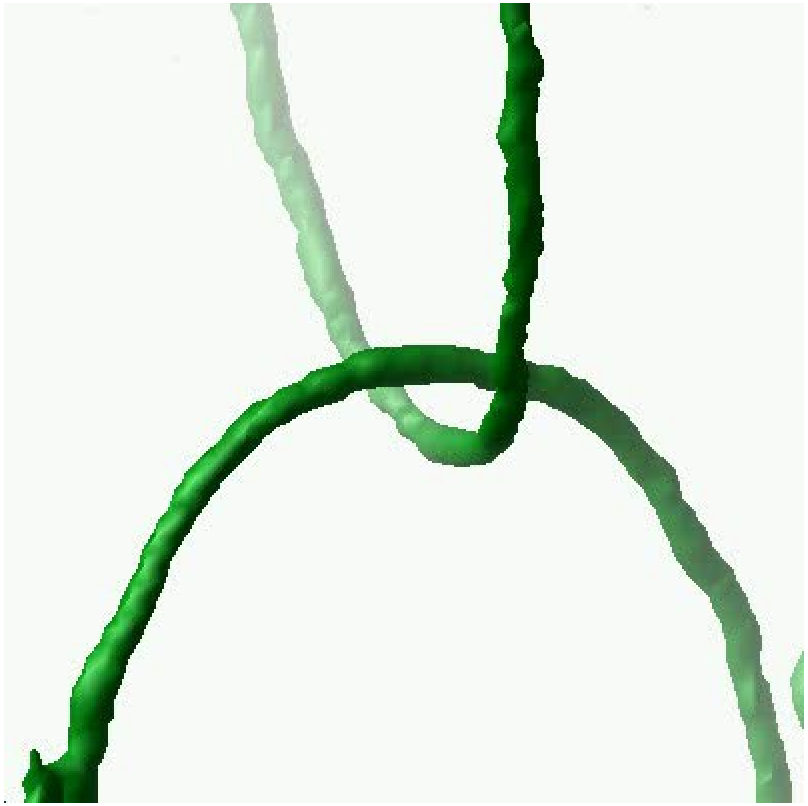


可換　　非可換

再結合　　新しい渦が2本を束縛

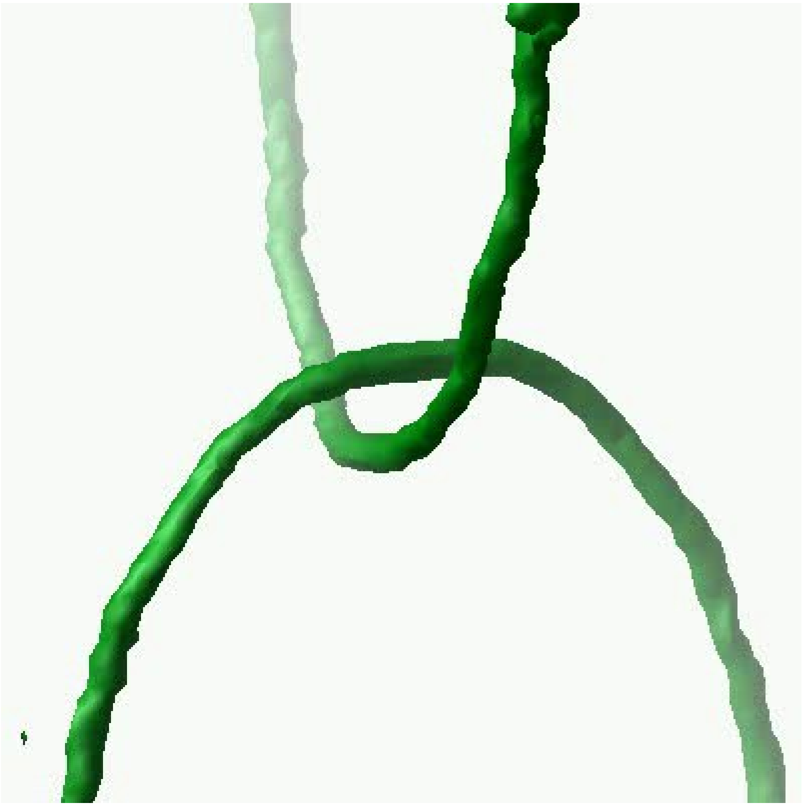
量子渦の衝突ダイナミクス

可換



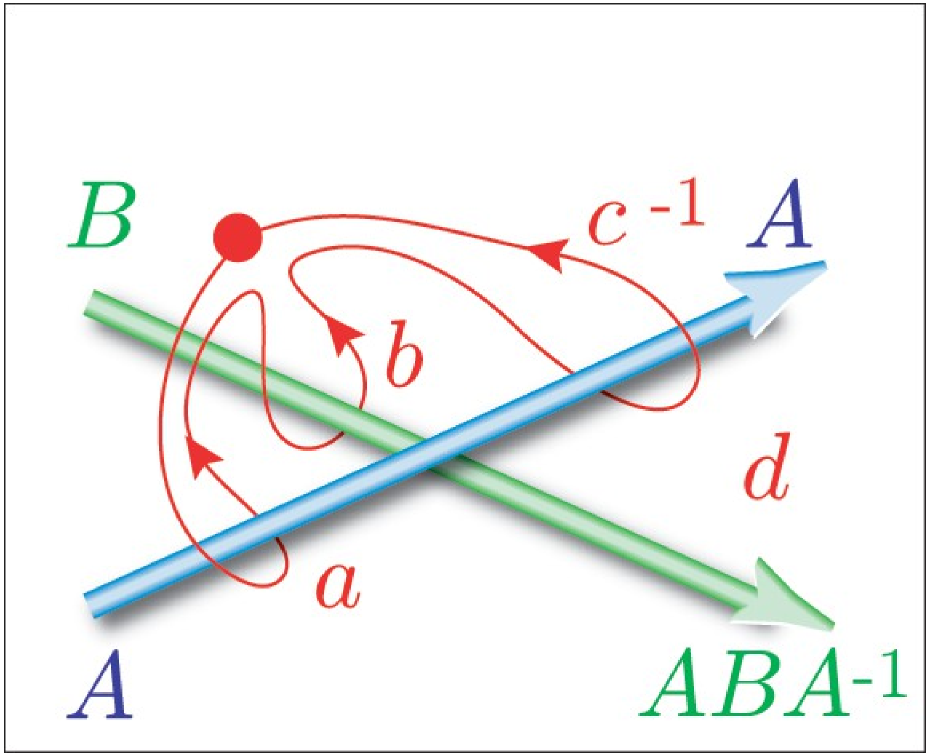
ほどける

非可換



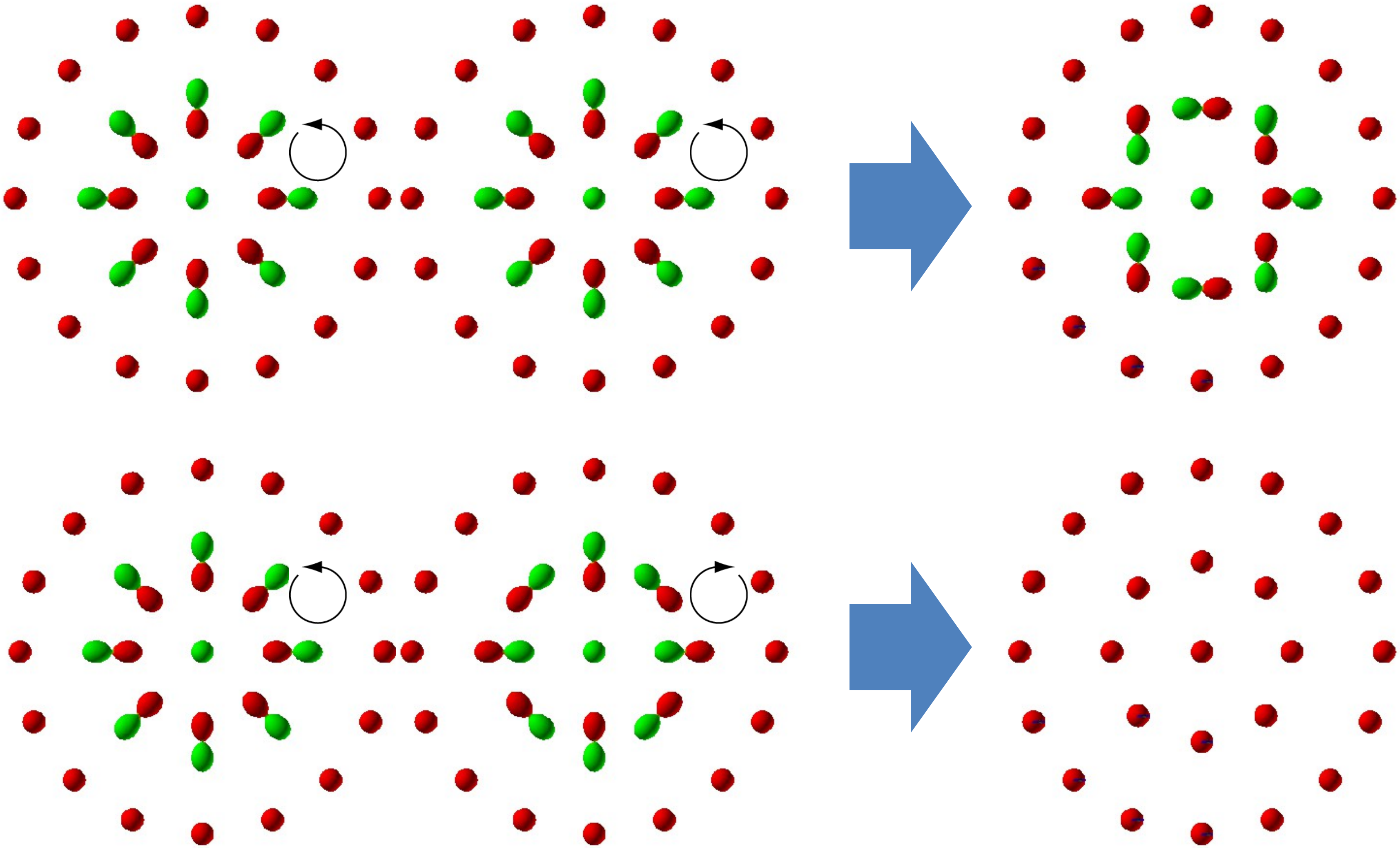
ほどけない

渦の見え方が場所によって異なる

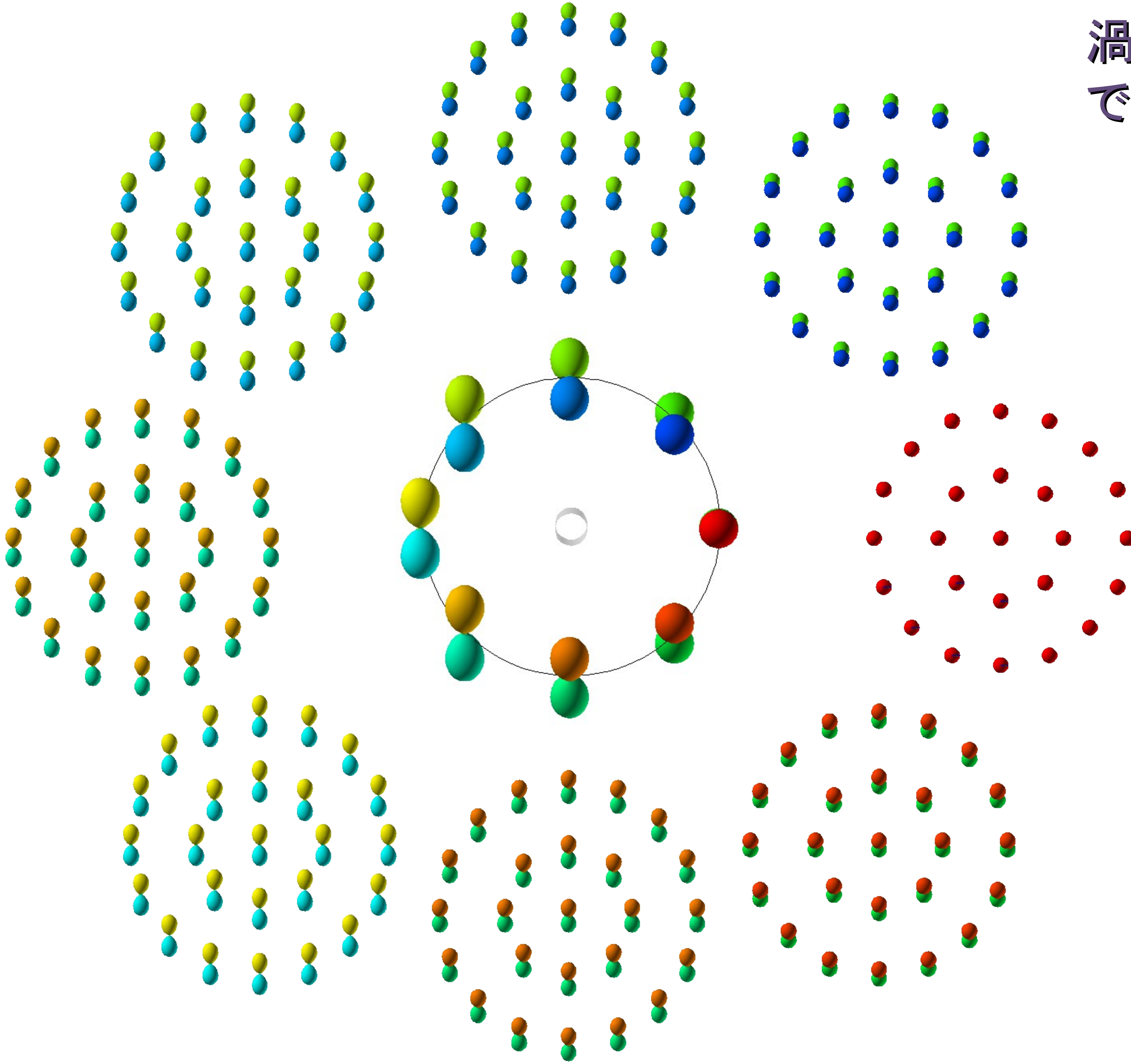


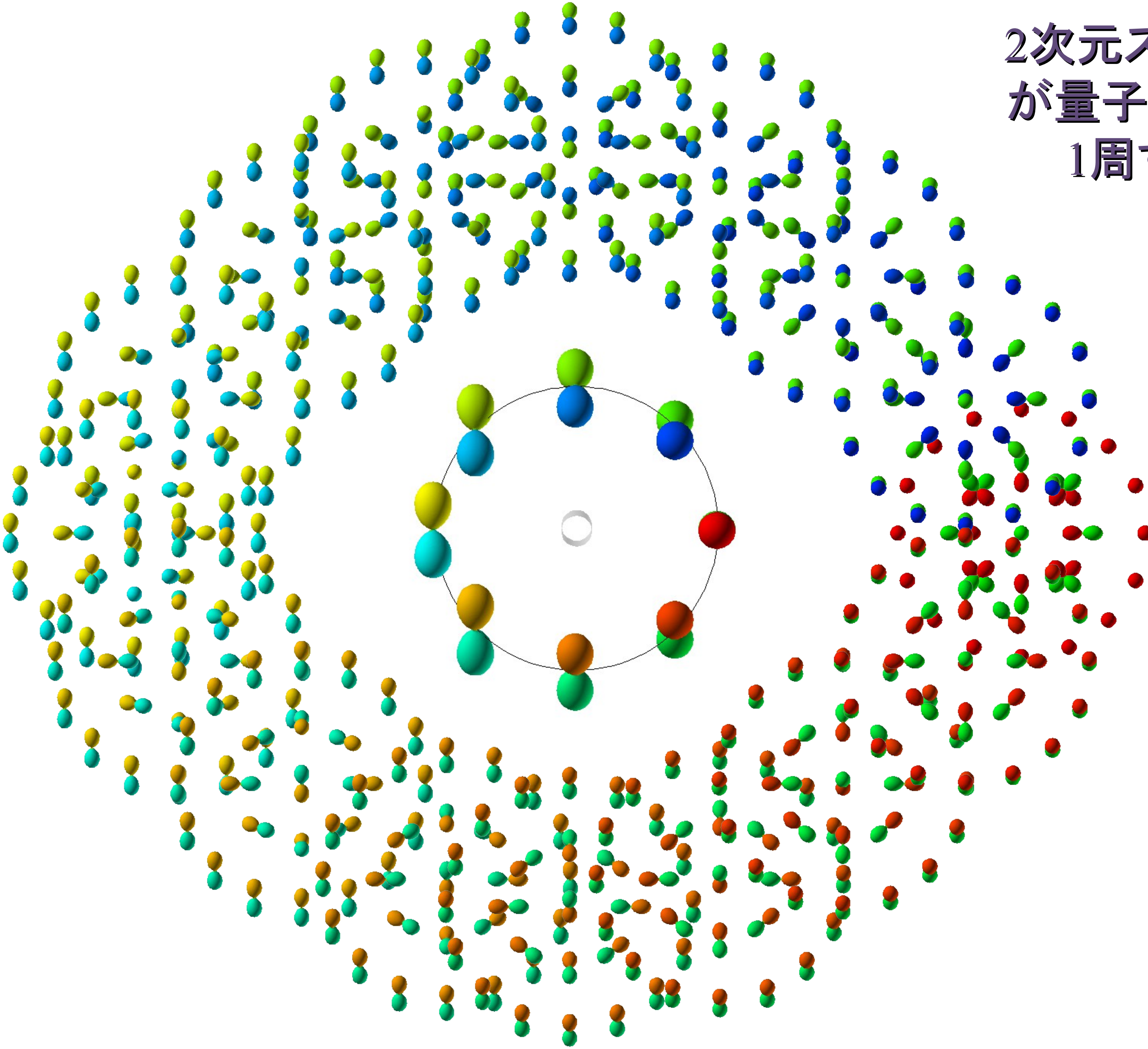
経路dは渦BをABA^{-1}とみなす(共役類)

2つのスカーミオンの合体



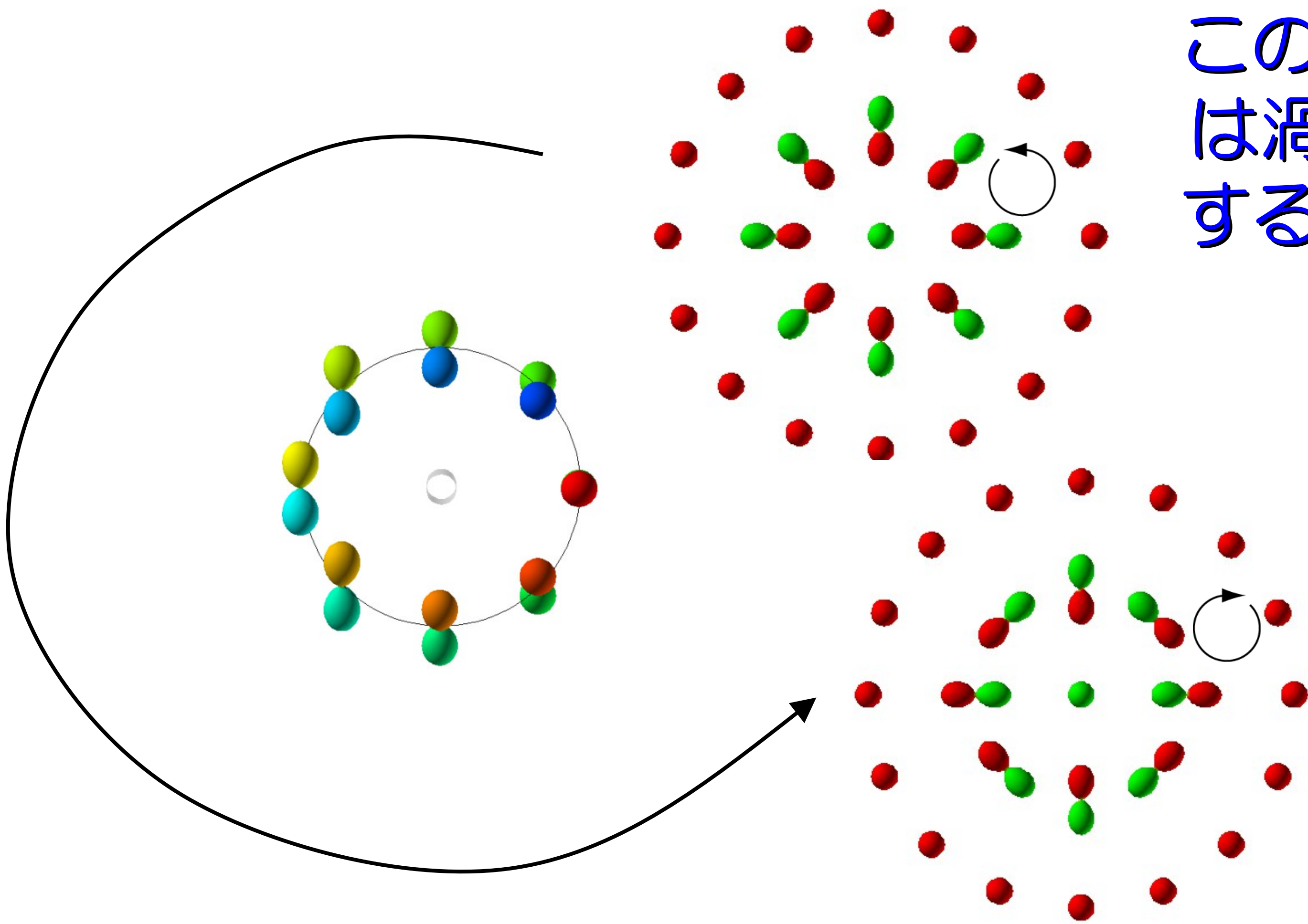
渦から十分遠方で局所的に一様な状況





2次元スカーミオンが量子渦の周りを1周すると？

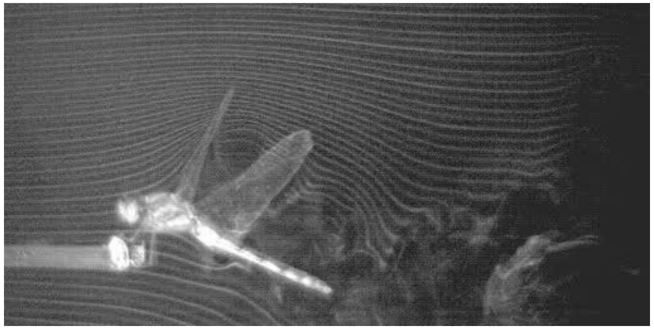
スカーミオンチャージの反転



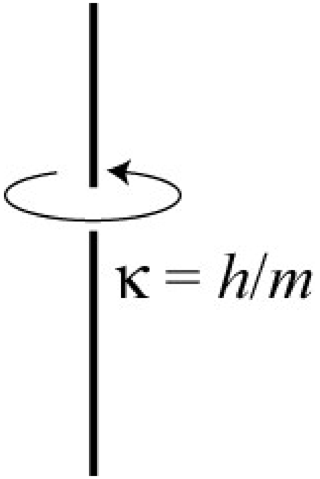
このスカーミオンは渦の周りを1周するだけで符号が反転する

量子乱流

量子流体で乱流を作れば渦と乱流の関係がより分かるのではないか？



粘性流体の渦はよく分からない

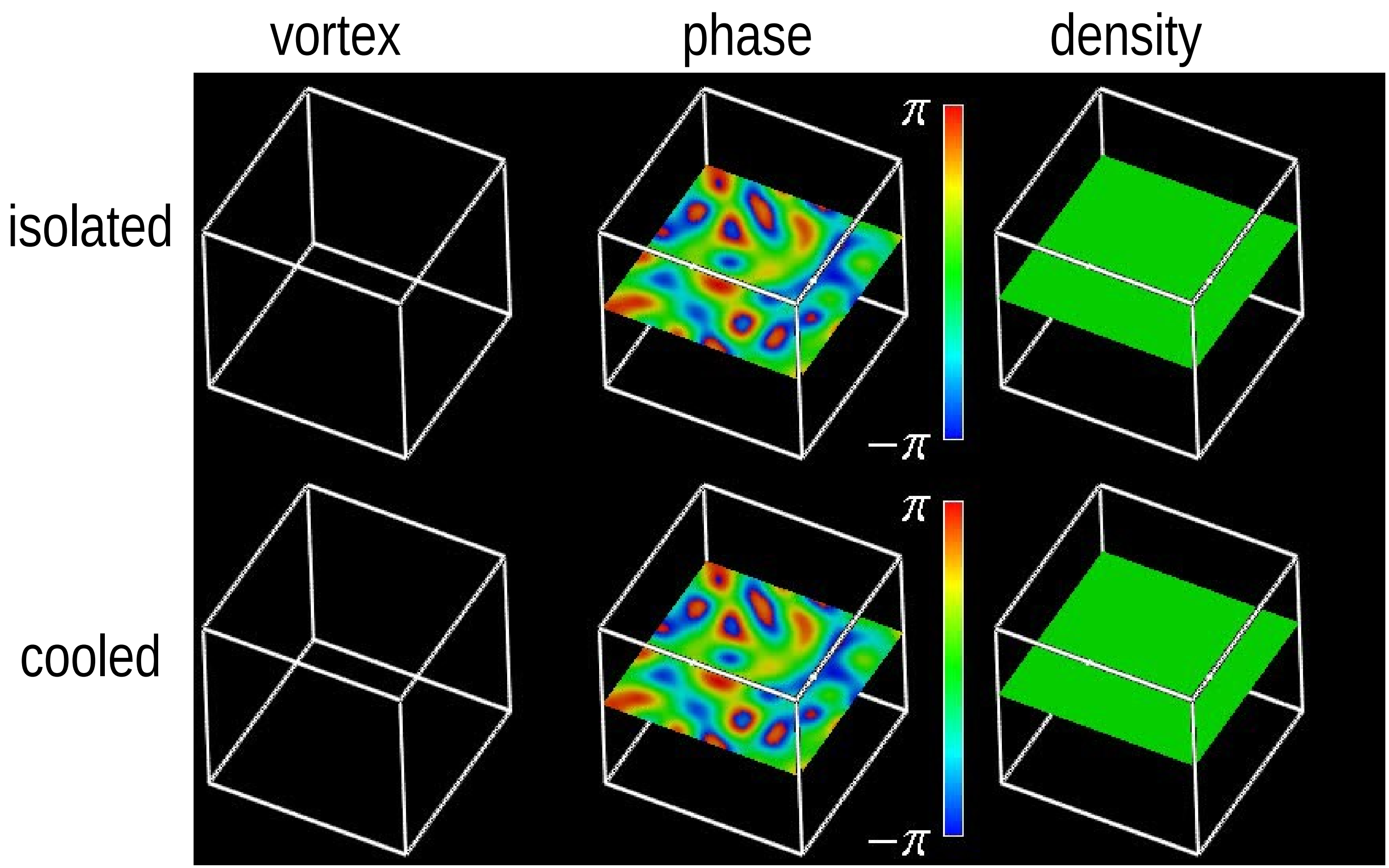


量子流体の渦は位相欠陥である

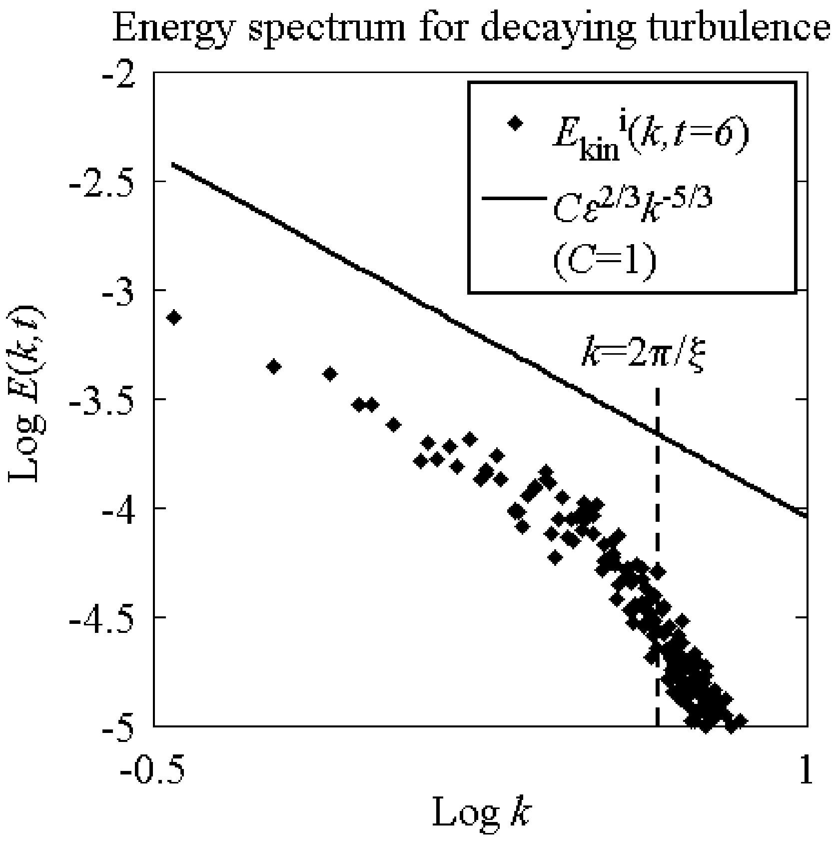
量子乱流

MK et al., PRL **94**, 065302 (2005)

$0 < t < 6$



量子乱流

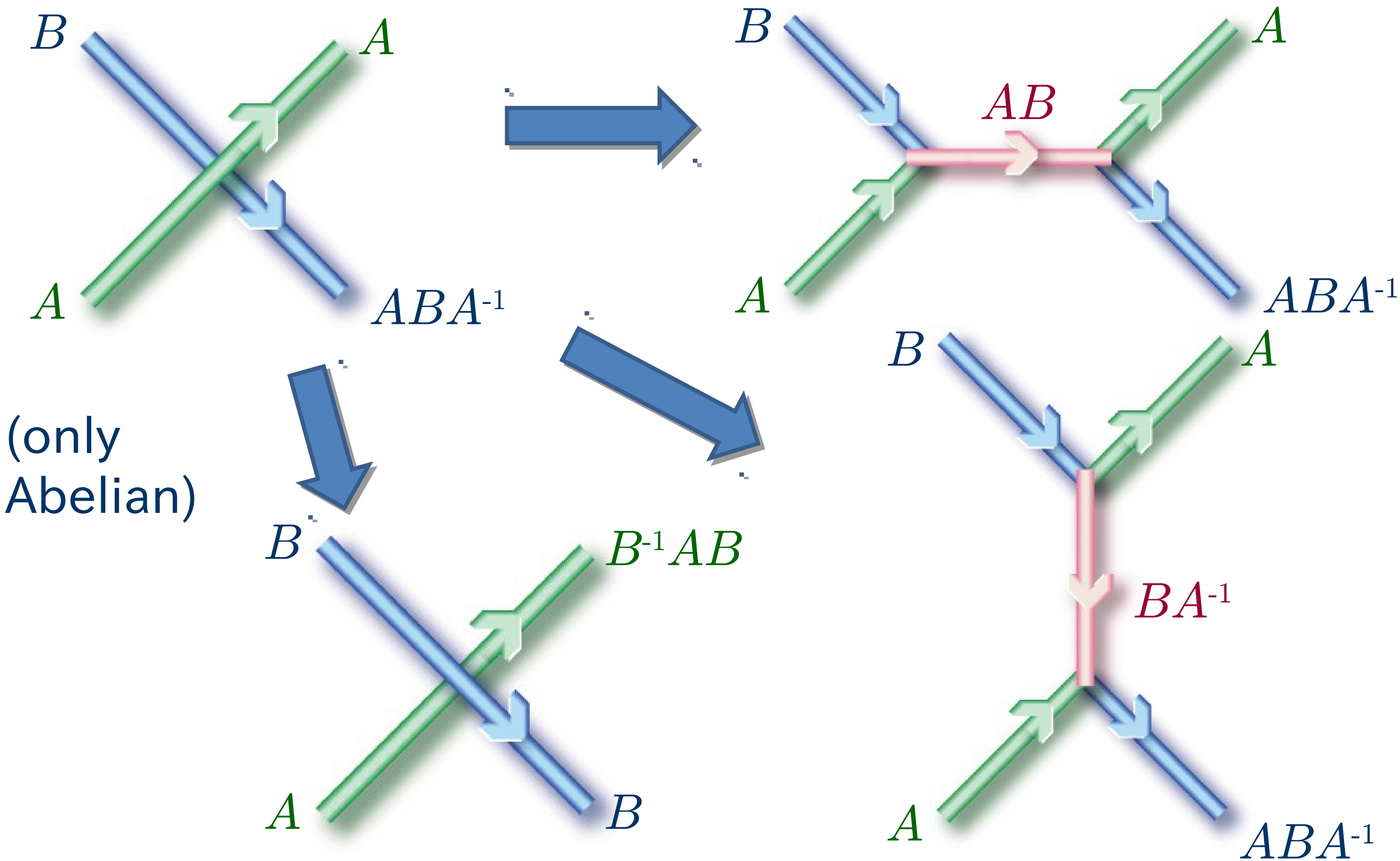


量子乱流で古典乱流と同じ統計則が得られる。

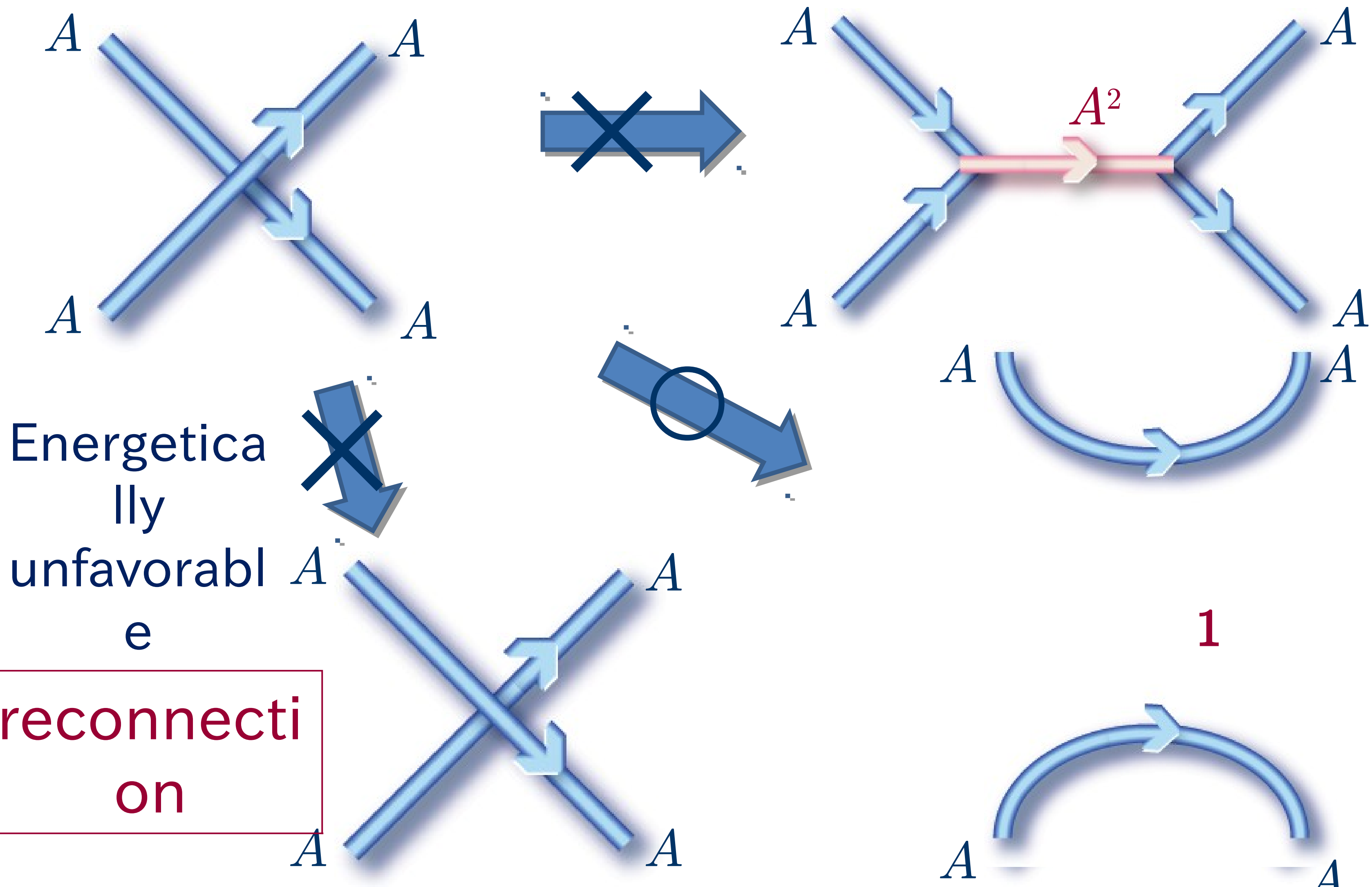
まとめ

•ボース･アインシュタイン凝縮体では様々な位相欠陥が実現され、他分野で議論されているものと類似しているものもあればBEC特有のものもある
•ボース･アインシュタイン凝縮体（特に内部自由度を持っているもの）の位相欠陥はその非自明なダイナミクスを含め、抽象的なトポロジーの世界を具体化する格好の系である

Collision of Vortices

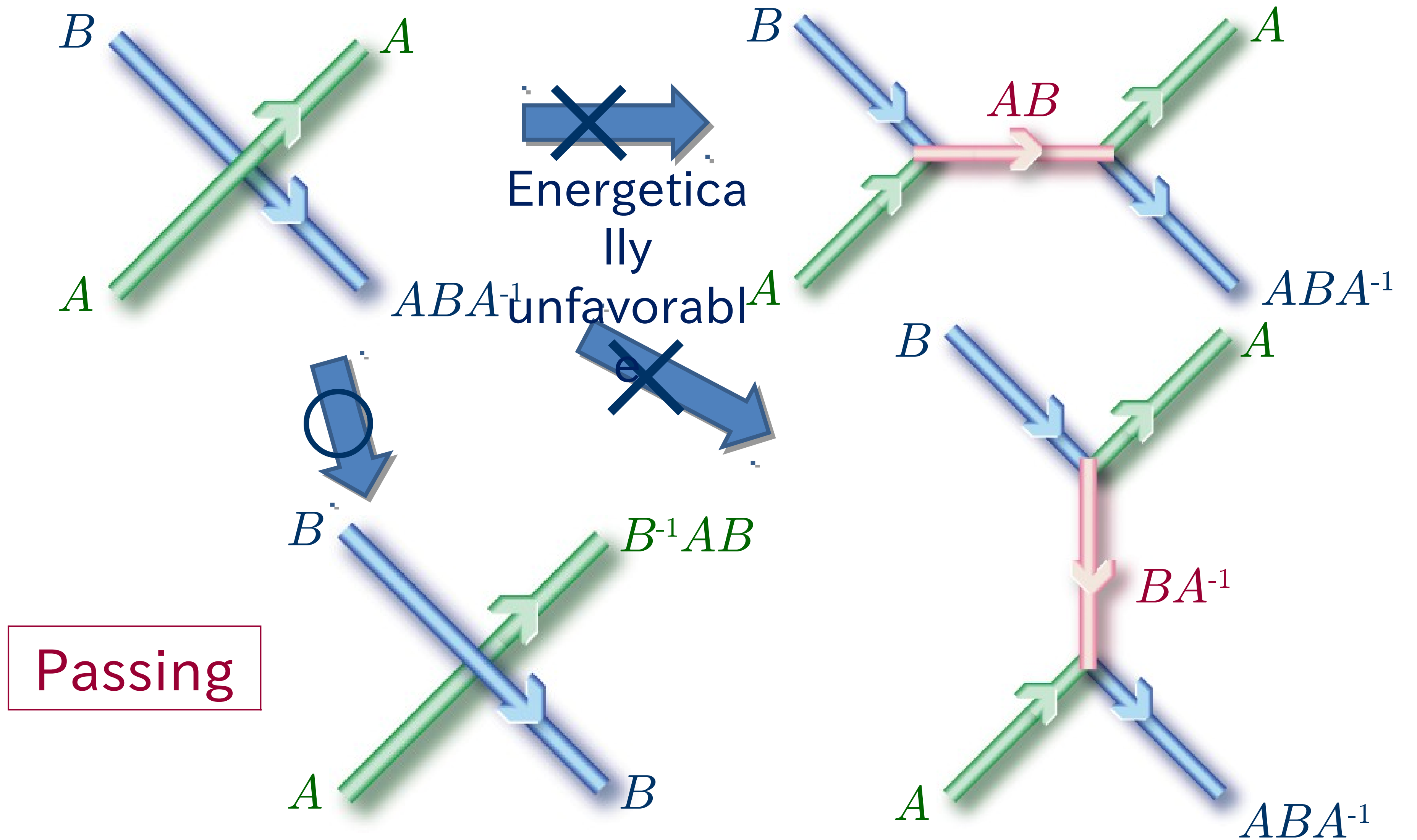


Collision of Same Vortices

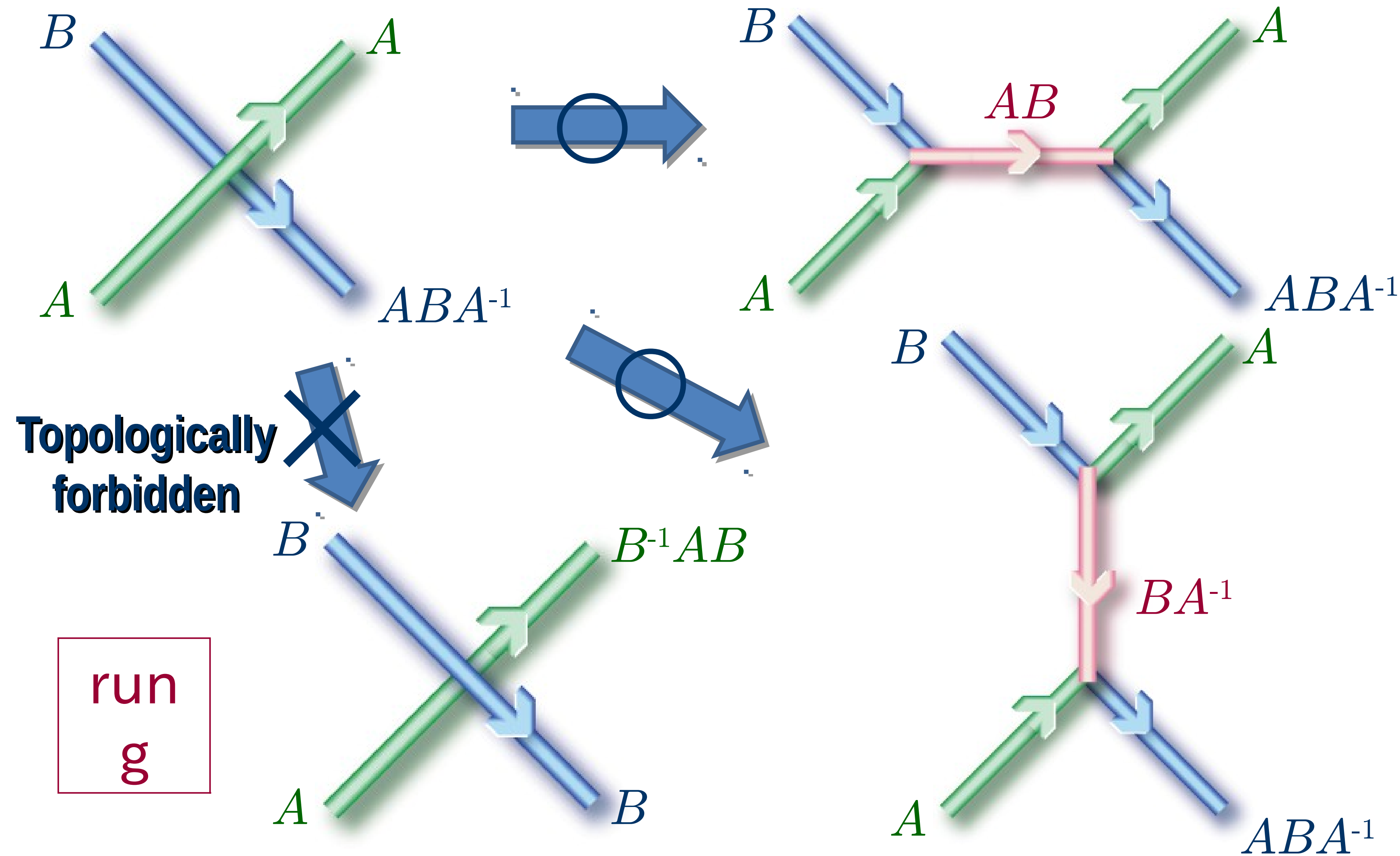


reconnection

Collision of Different Commutative Vortices

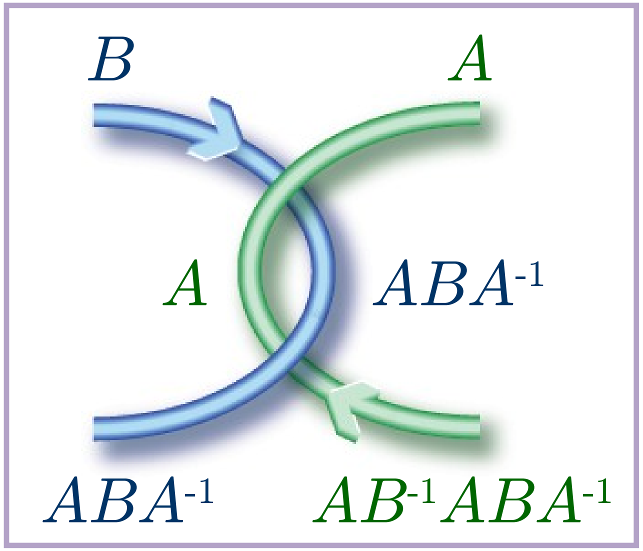


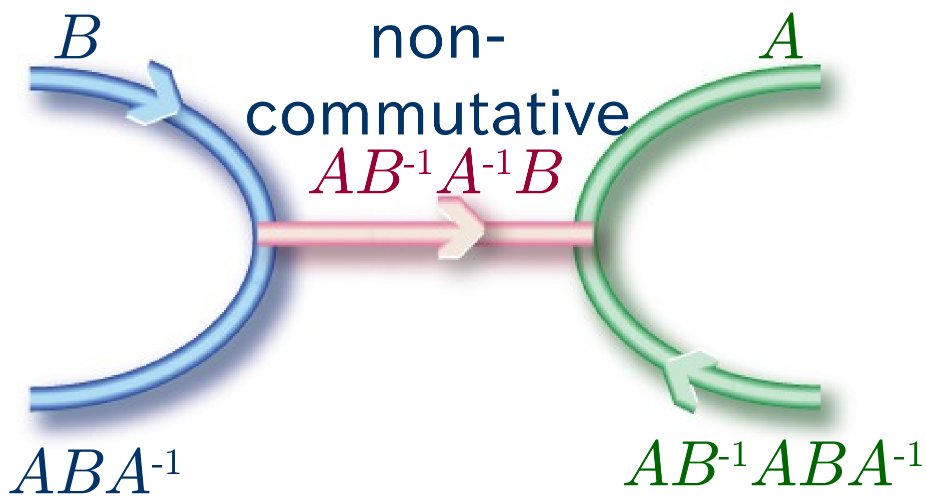
Collision of Different Non-commutative Vortices



run
g

Linked Vortices





Linked vortices cannot untangle