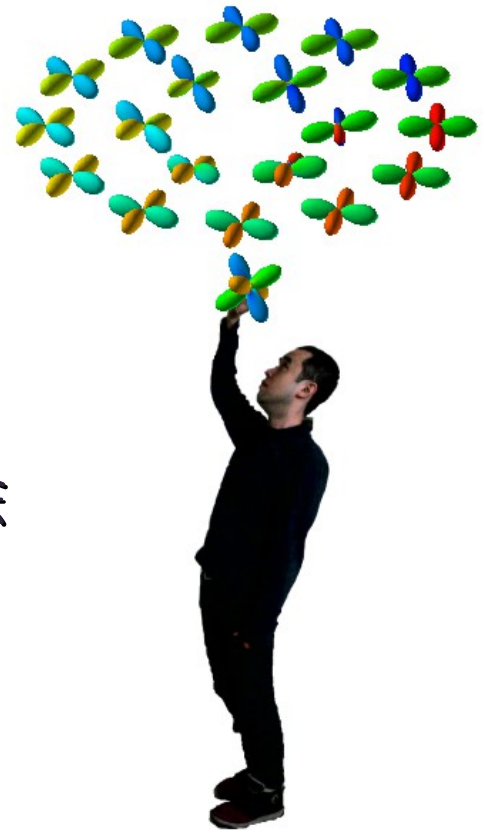


# スピン2・スピノール・ボース凝縮体におけるVortex Tiling

東大総合文化・東大理

小林未知数 川口由紀 上田正仁

2010年3月20日 日本物理学会第65回年次大会



# 量子渦における渦芯の状態

スカラー-BEC (or  $^4\text{He}$ )

密度の穴

Spin-1 BEC

基底状態：

Ferromagnetic & Polar

• Ferromagnetic 相の渦：  
polar コア

• Polar 相の渦 phase：  
Ferromagnetic コア

Spin-2 BEC

基底状態：

Ferromagnetic, Uniaxial nematic,  
Biaxial nematic, Cyclic

Vortex tilingとは？

1. どの状態が渦芯に入るか？
2. 渦芯の状態はスピン空間のどの向きにはめ込まれるか？
3. 渦の内外で状態が異なる離散対称性を持つとき何が起こるか？

# スピノールBECの平均場理論

## 平均場ハミルトニアン

$$H = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m=-2}^2 |\nabla \Psi_m|^2 + \frac{c_0}{2} n_{\text{tot}}^2 + \frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$

### 結合定数

$$c_0 = \frac{4g_2 + 3g_4}{7}$$

$$c_1 = \frac{g_4 - g_2}{7}$$

$$c_2 = \frac{7g_0 - 10g_2 + 3g_4}{35}$$

### 密度

$$n_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \sum_m \Psi_m^*(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x})$$

### スピン密度

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{m,m'} \Psi_m^*(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{F}}_{mm'}(\mathbf{x}) \Psi_{m'}(\mathbf{x})$$

### シングレットペア振幅

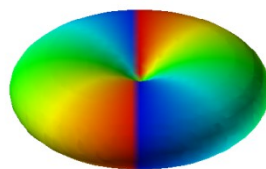
$$A_{20}(\mathbf{x}) = \sum_m (-1)^m \Psi_m(\mathbf{x}) \Psi_{-m}(\mathbf{x})$$

# スピン空間における異方性

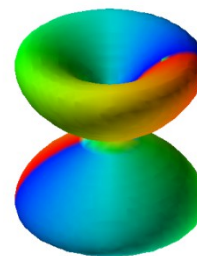
スピン空間における異方性は球面調和関数を用いて表現できる

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=-2}^2 \Psi_m Y_{2,m}$$

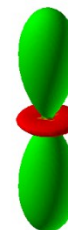
$Y_{2,2}$



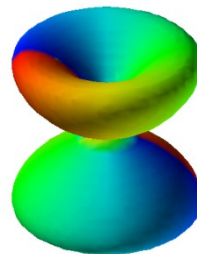
$Y_{2,1}$



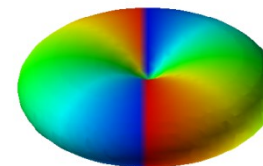
$Y_{2,0}$



$Y_{2,-1}$



$Y_{2,-2}$

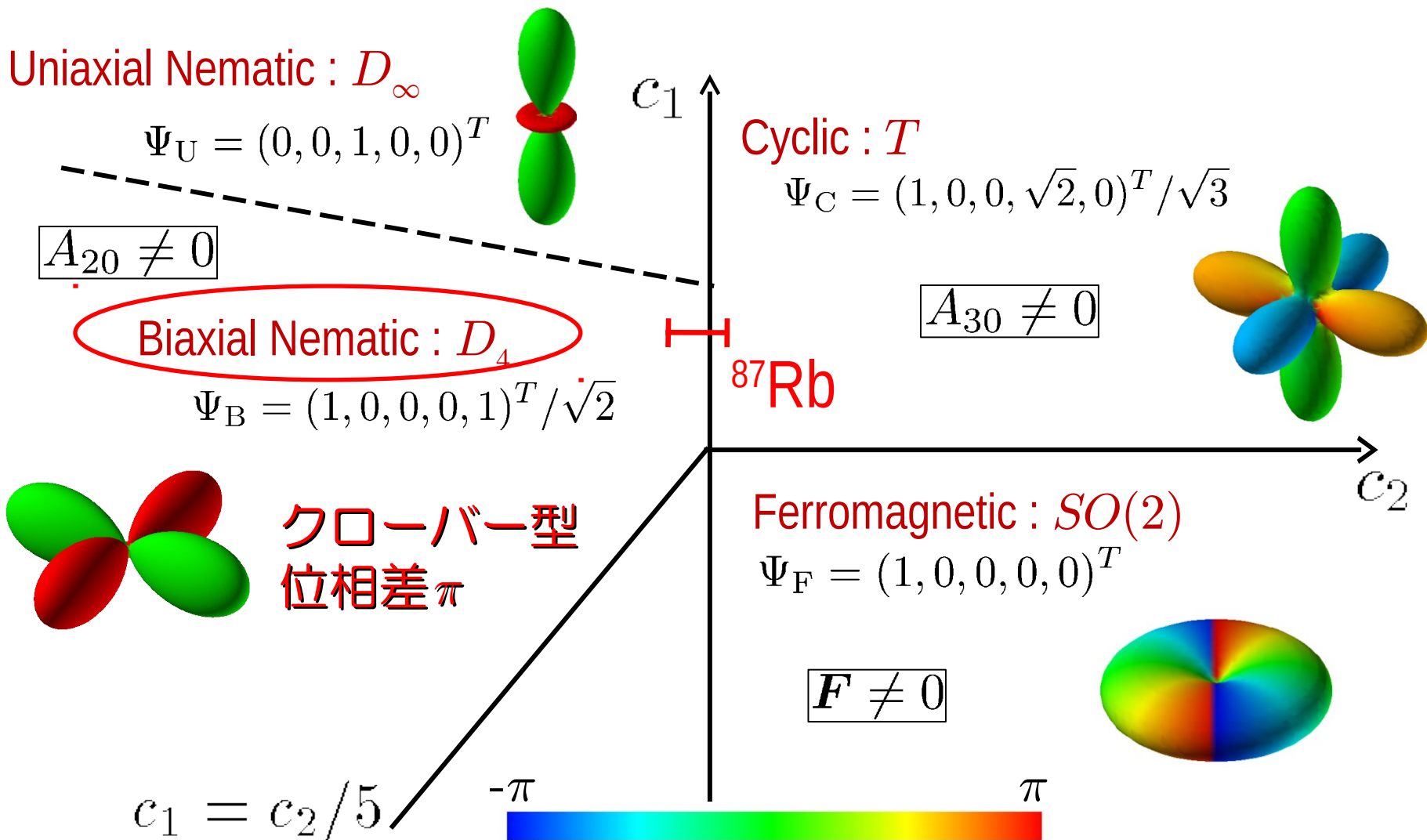


$-\pi$

$\pi$

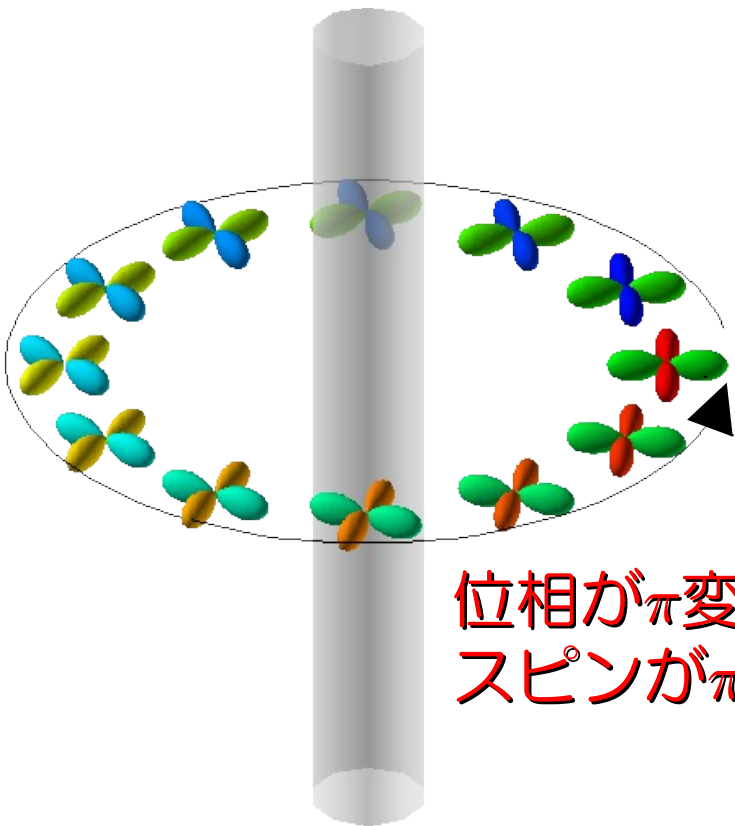


# 基底状態の相図とスピン空間での異方性



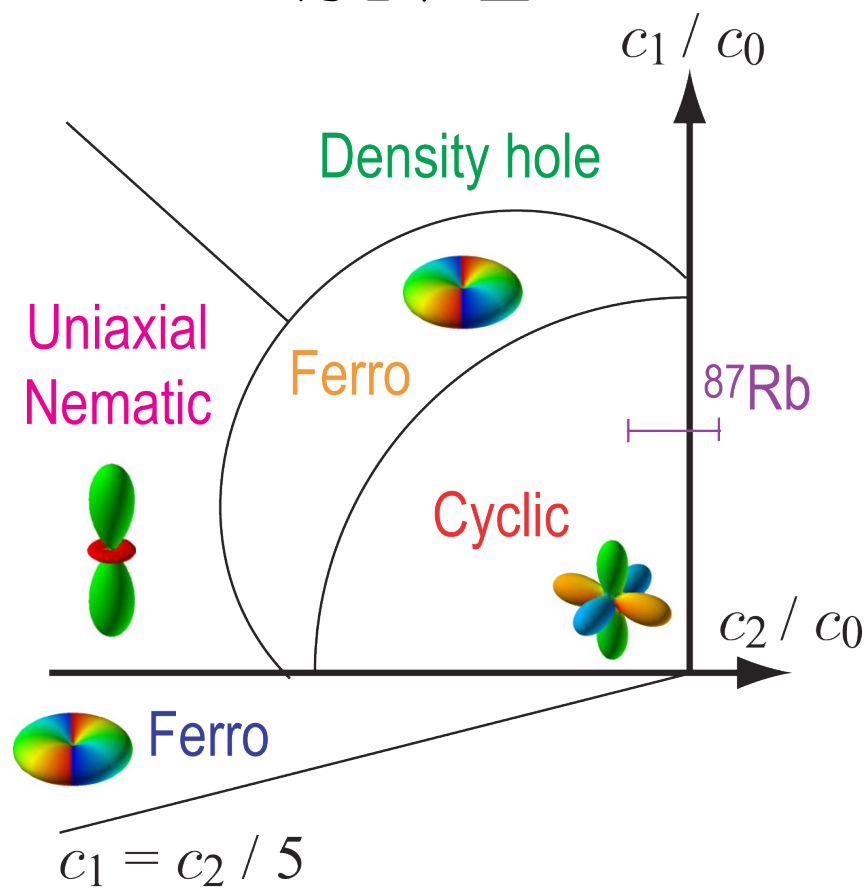
# Biaxial nematic相における1/2-1/4量子渦とvortex tiling

1/2-1/4量子渦



位相が $\pi$ 変化  
スピンの $\pi/2$ 回転

変分計算による1/2-1/4量子渦の渦芯相図



$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow \infty, \varphi, z) = (1, 0, 0, 0, e^{i\varphi})^T / \sqrt{2}$$

$$c_1 = c_2 / 5$$

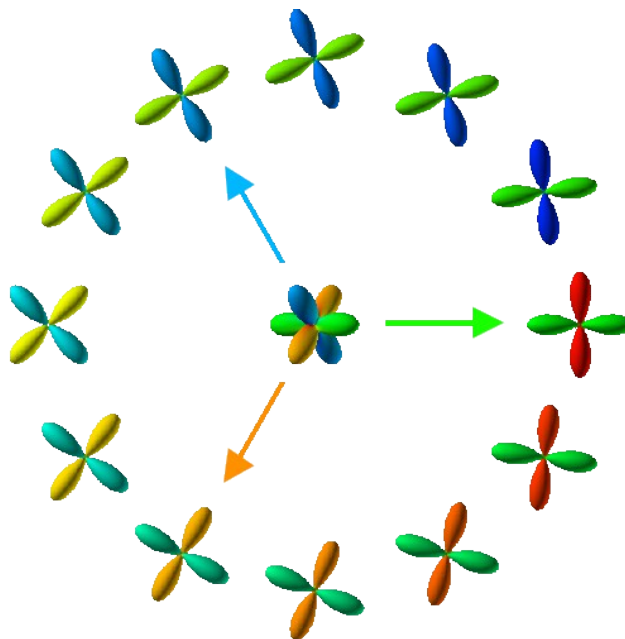
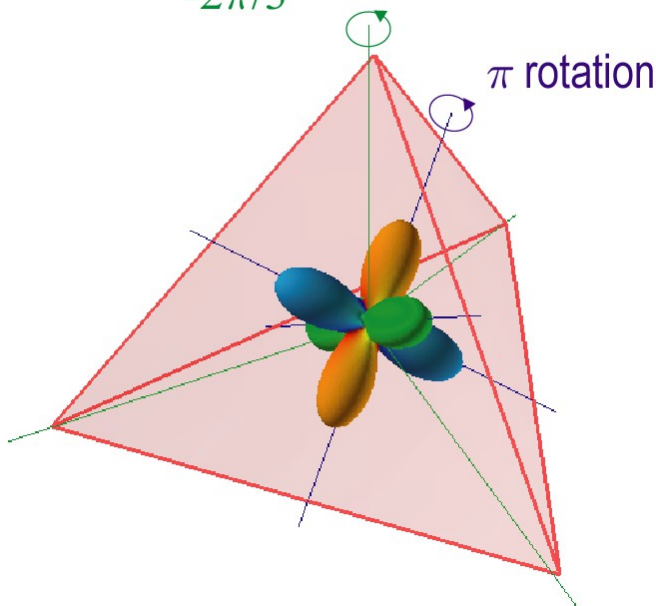
# Biaxial nematic相における1/2-1/4量子渦とvortex tiling

## 渦芯がCyclicの状況を考える

Cyclicオーダーパラメーター：正四面体  
回転対称性

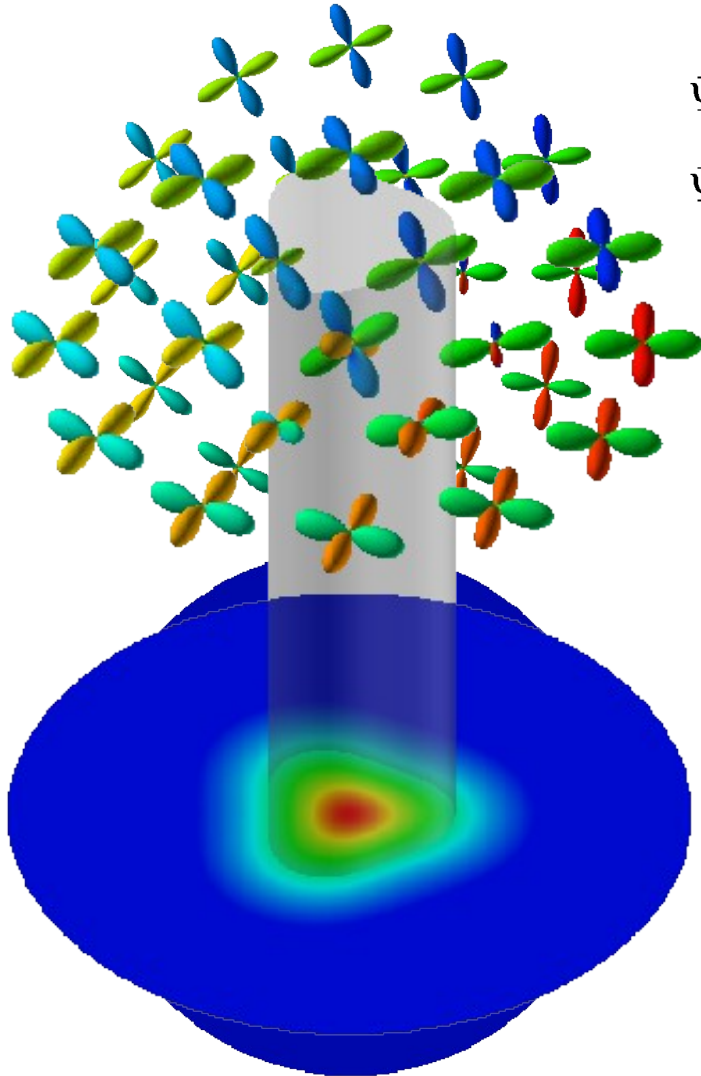
→  $2\pi/3$ の回転軸が渦芯と平行になる  
ように「はめ込まれる」

$2\pi/3$  rotation + gauge  
 $-2\pi/3$



3回対称性が  
自発的に破れる

# 3回対称性の破れ



$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow \infty, \varphi, z), = (1, 0, 0, 0, e^{i\varphi})^T / \sqrt{2}$$

$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow 0, \varphi, z), = (1, 0, 0, \sqrt{2}, 0)^T / \sqrt{3}$$

スピン-軌道相互作用なし  
にスピン空間の対称性が実  
空間に現れる

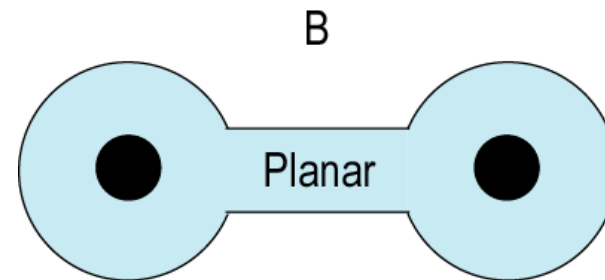
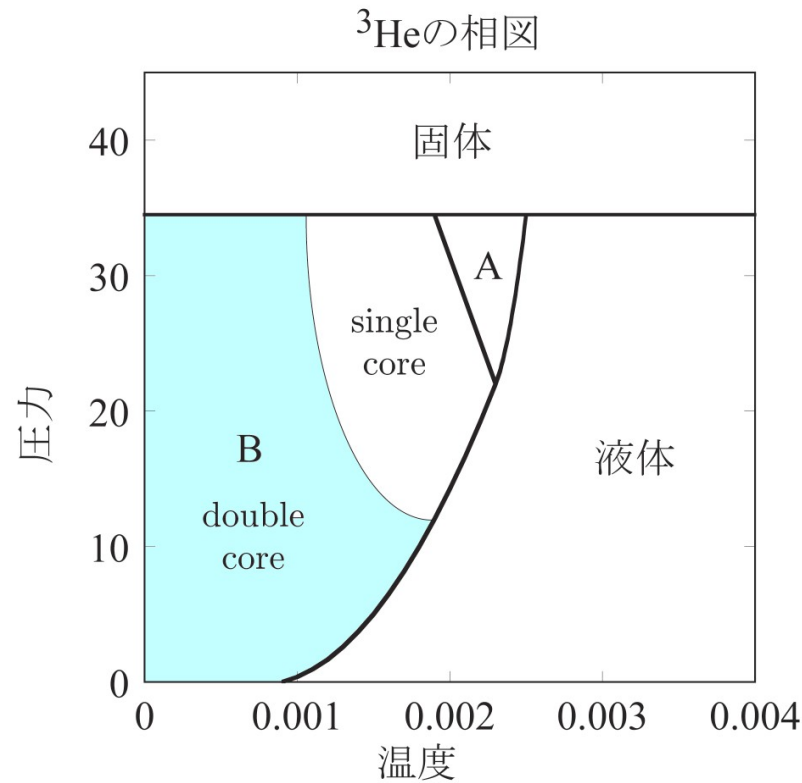
シングレットトリオ振幅

$$A_{30} = \frac{3\sqrt{6}}{2} (\Psi_1^2 \Psi_{-2} + \Psi_{-1}^2 \Psi_2) \\ + \Psi_0 (\Psi_0^2 - 3\Psi_1 \Psi_{-1} + 6\Psi_2 \Psi_{-2})$$



# $^3\text{He-B}$ との違い

Double core vortex :  $^3\text{He-B}$ 相の渦は整数量子渦だが、渦芯に $^3\text{He-planar}$ 相のオーダーが形成され、そこで2つの半整数量子渦へと分裂することで渦芯の回転対称性が破れる

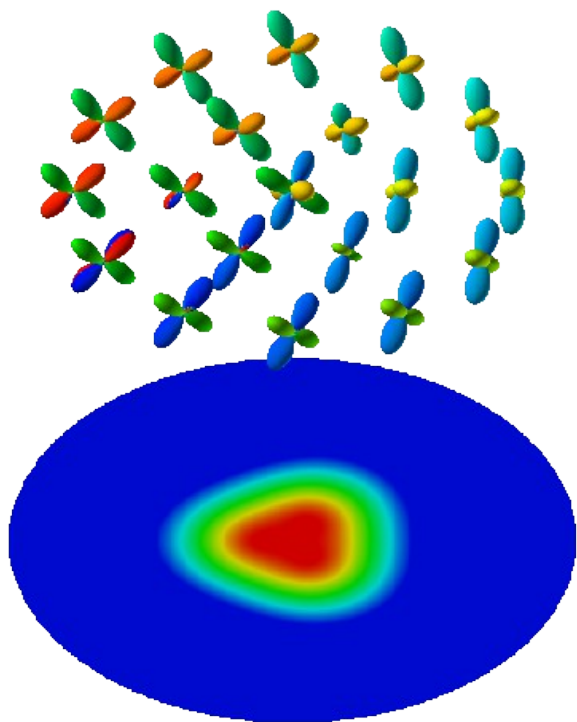


回転対称性の破れは渦の分裂によるもので、スピンは関係ない

# 様々なVortex Tiling

Biaxial nematic phase

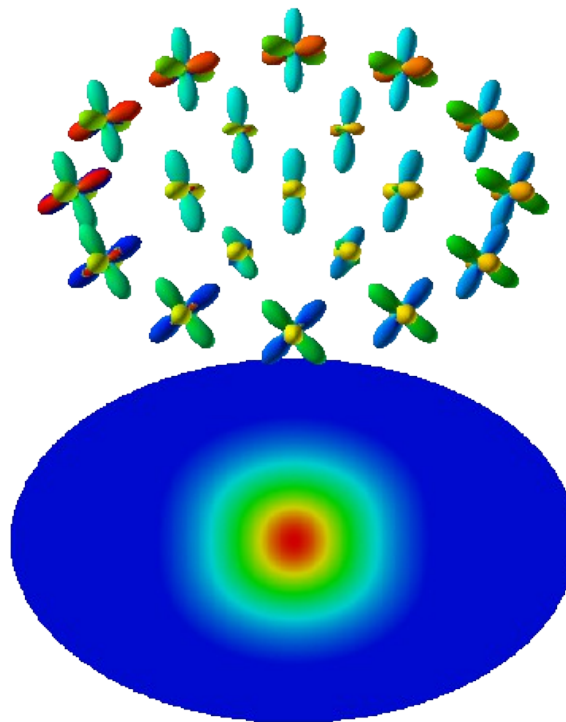
1/2-1/2量子渦



$$|A_{30}|^2$$

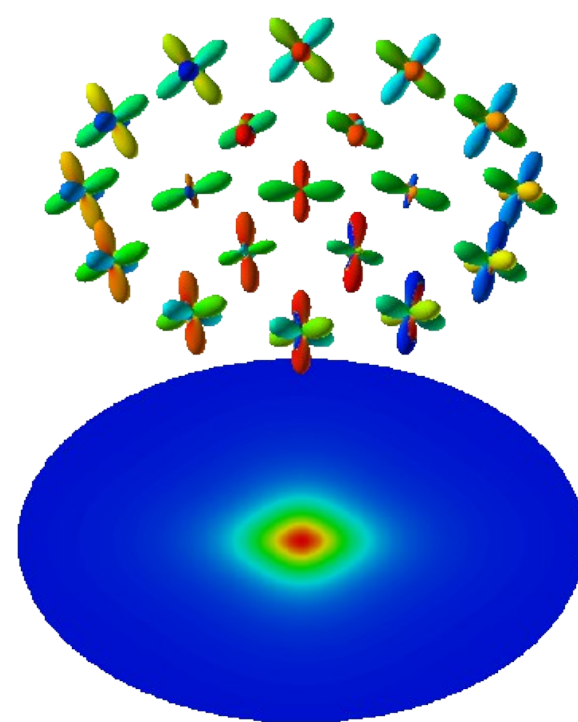
Cyclic phase

1/3-1/3量子渦



$$|A_{20}|^2$$

2/3-(-1/3)量子渦



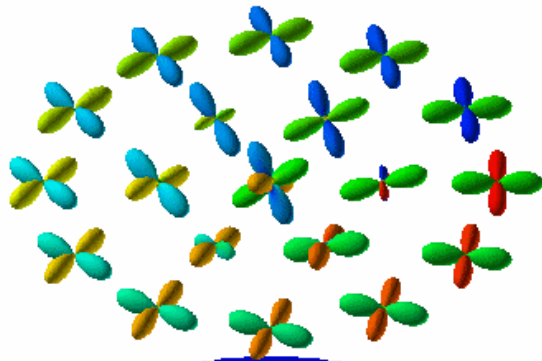
# 局在Goldstoneモード

$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow \infty, \varphi, z), = (1, 0, 0, 0, e^{i\varphi})^T / \sqrt{2}$$

渦の中で $U(1)$ の自由度が  
生き残っている

$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow 0, \varphi, z), = (1, 0, 0, \sqrt{2}e^{i\eta}, 0)^T / \sqrt{3}$$

$$\eta = 0.0 \pi$$



$\eta$ が変化すると、対称性の破れる方向  
が変化する（エネルギーは縮退）  
→渦に局在したGoldstoneモード

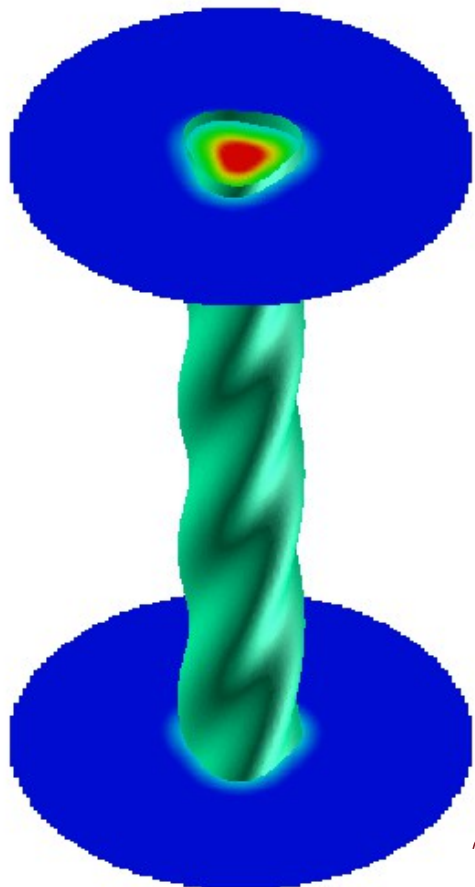
$\eta : 0 \rightarrow 2\pi$ の変化に対して

- 三角形が  $8\pi/3$  回転
- スピンが  $2\pi/3$  回転
- ゲージが  $-4\pi/3$  変化



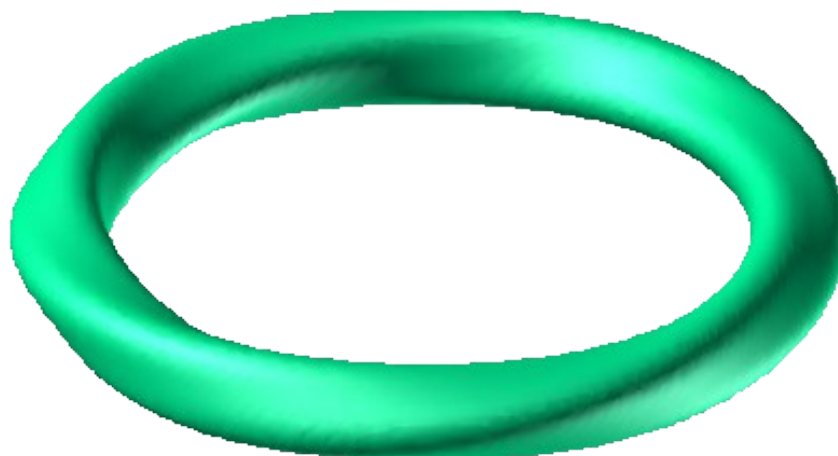
# Twisting WaveとVorton

$$\Psi_{1/2-1/4}(r \rightarrow 0, \varphi, z), = (1, 0, 0, \sqrt{2}e^{i\eta}, 0)^T / \sqrt{3}$$



↑  
 $\eta$  の変化

$\eta = 0$  と  $\eta = 2\pi$  をつなぐと、新しいトポロジカル励起のvortonができる。

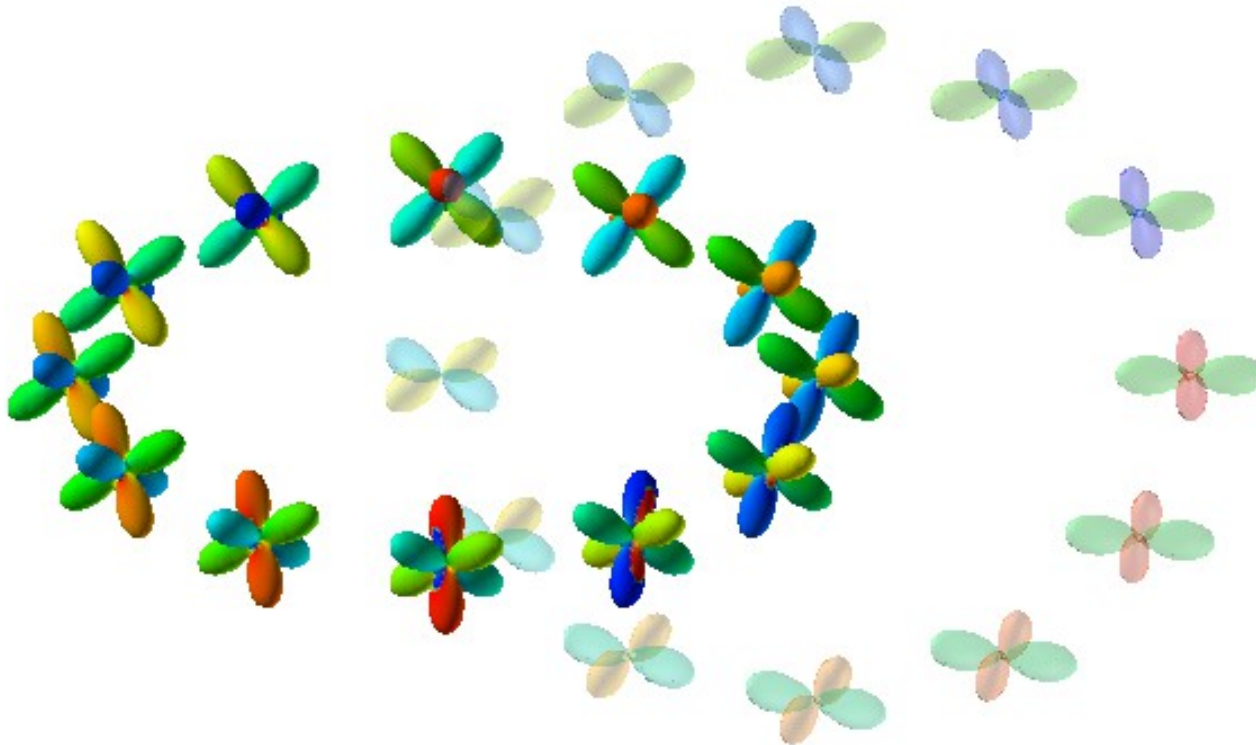


**Twisting wave**

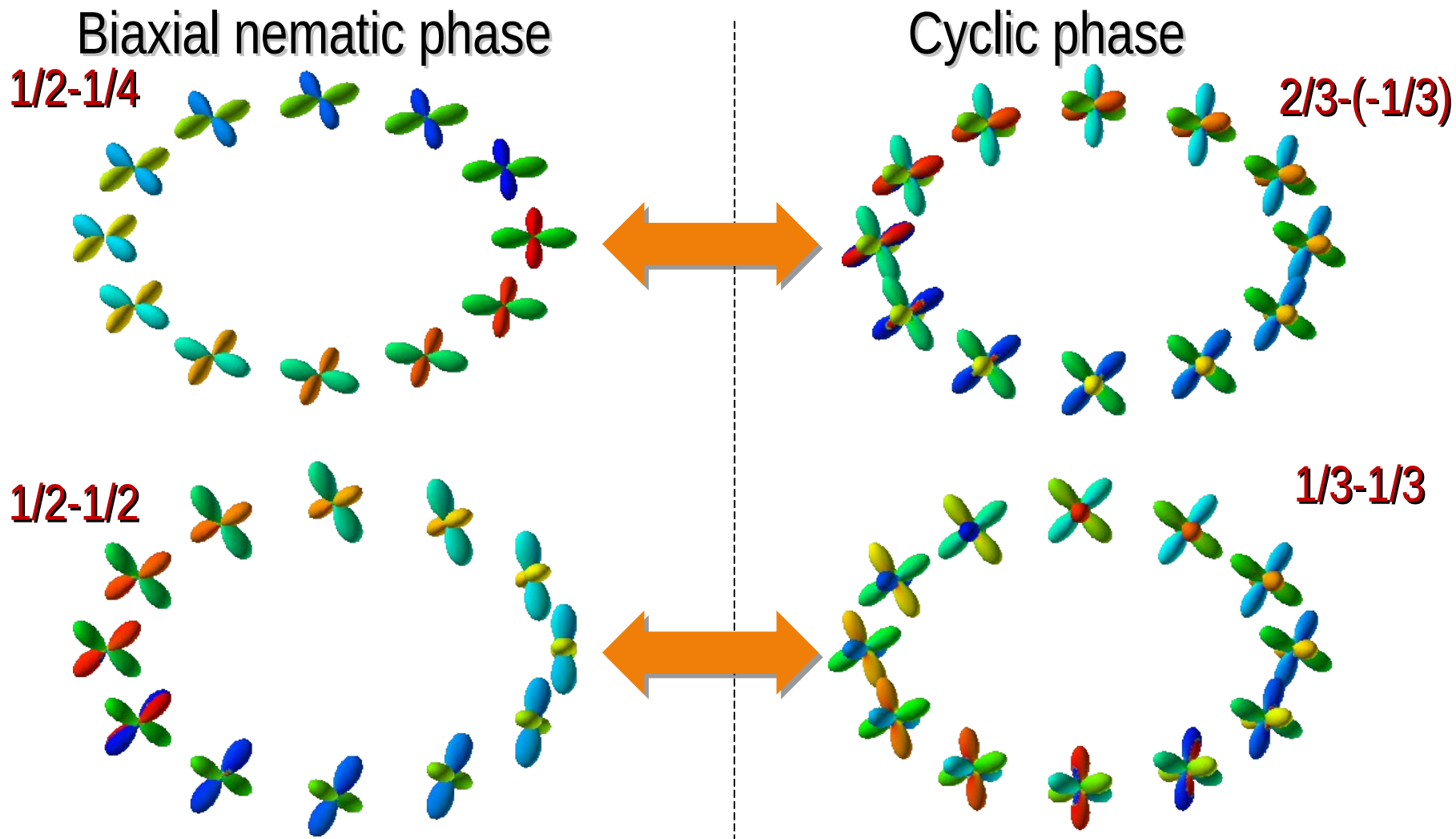
# Vortonの循環

Vortonは2つの循環を持つ

2/3-(-1/3)量子渦1/2-1/2量子渦

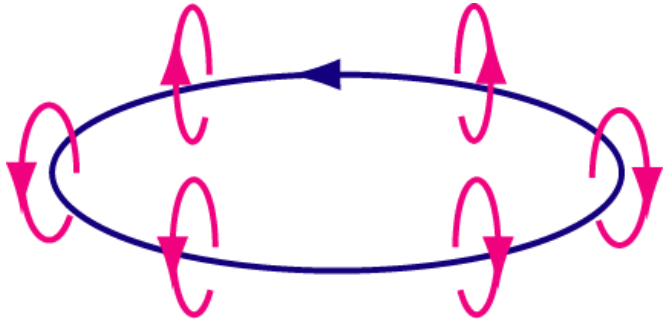


# Vortonになれる渦のペア



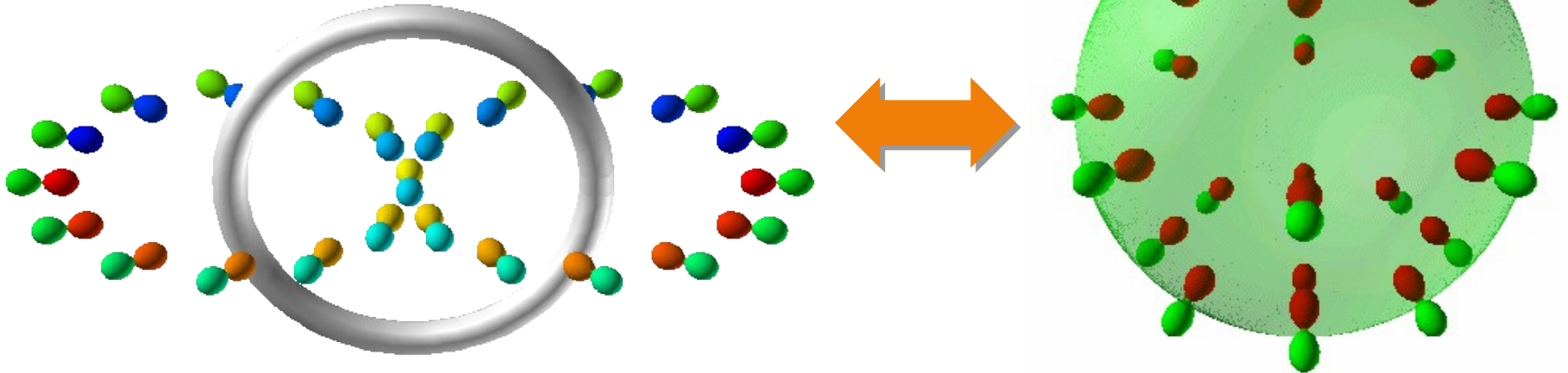


# Vortonのトポロジー



Vortonは渦輪方向にも循環量子を持つため、普通の渦輪と異なり、収縮して消えることができない。

spin-1 spinor BEC polar相の半整数量子渦の渦輪も収縮して消えることができない



しかし、VortonはAlice ringとはトポロジーが異なる。

# Vortonのトポロジー

Biaxial nematicとCyclicの両方を統一的に記述する  
オーダーパラメーター $\Psi_{B-C}$ を考える ( $B \neq 0$ )

$$\Psi_{B-C} = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2 + \cos^2(\zeta)} \\ 0 \\ 0 \\ 2e^{i\eta} \sin \zeta \\ \sqrt{3} \cos \zeta e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

3つの角度

$\zeta$  : Biaxial nematicとCyclicをつなぐ自由度  
 $\eta$  : Cyclicのスピン・ゲージ自由度  
 $\varphi$  : Biaxial nematicのスピン・ゲージ自由度

$\zeta, \eta, \varphi$ はオイラー回転 $\alpha, \beta, \gamma$ と1対1に対応し、 $\Psi_{B-C}$ は $SO(3)$

対称性を持つ

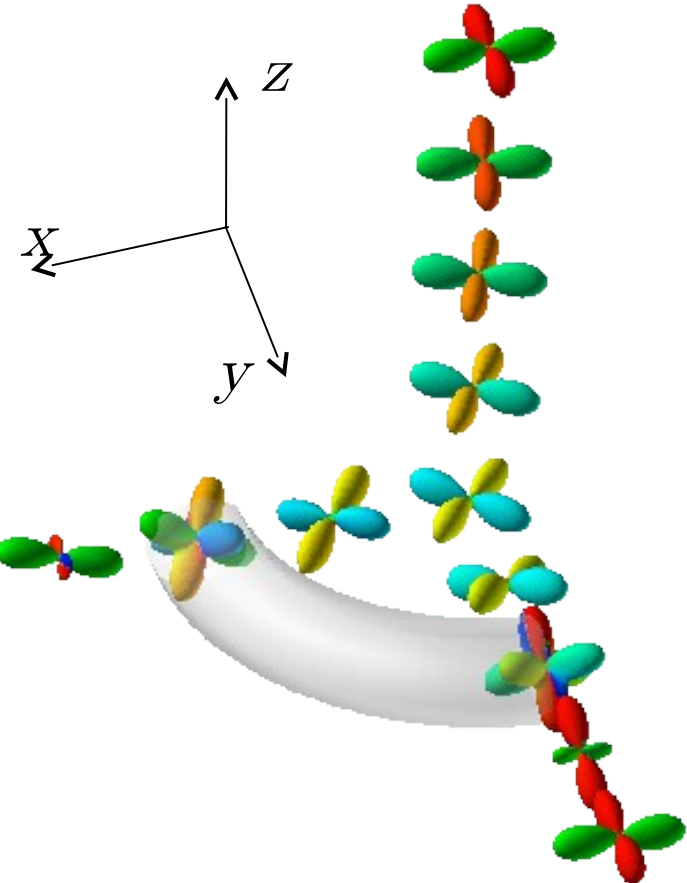
→3次元スカーミオンが存在できる



# 3次元スカーミオン=Vorton

$x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi^2$ におけるスカーミオンの写像がVortonに対応する

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{\pi^4 - \zeta^2 \varphi^2}} \begin{pmatrix} \zeta \cos \eta \sqrt{\pi^2 - \varphi^2} \\ \zeta \sin \eta \sqrt{\pi^2 - \varphi^2} \\ \sqrt{(\pi^2 - \zeta^2) \varphi^2} \end{pmatrix}$$



Biaxial nematicとCyclicが混ざってスカーミオンを形成  
→ Vortonになる (渦輪なので  
シャンカーモノポールと違って  
磁場下で安定に存在する)

# まとめ

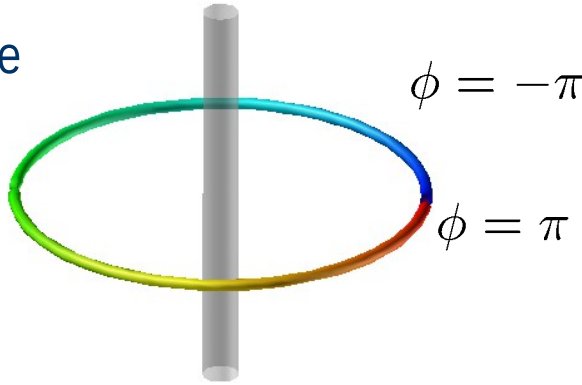
1. スピン2・スピノールBECの量子渦では、渦の外側と内側の異なる離散対称性の非整合性により Vortex tilingが起こる。その結果、渦の回転対称性が自発的に破れる
2. 渦芯の内部に残った自由度により、渦糸に沿った素励起twisting waveと、新たなトポロジカル励起であるvortonが可能になる。vortonは3次元スカーミオンの1種で、第3ホモトピーで分類される。

# 凝縮体中の様々な量子渦

整数量子渦

Scalar BEC or  $^4\text{He}$

$e^{i\phi}$   
位相

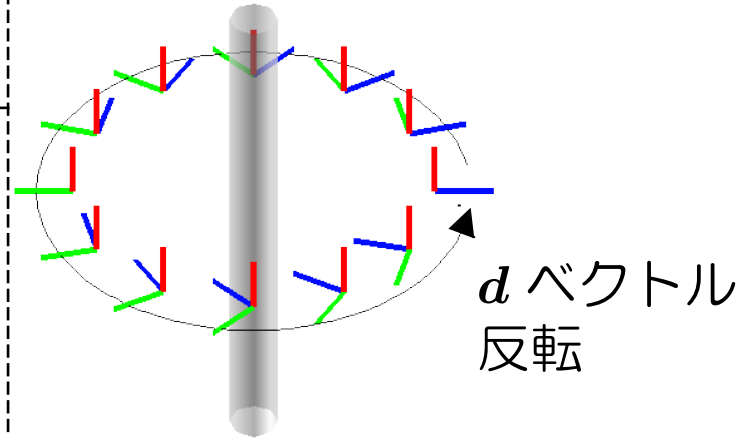
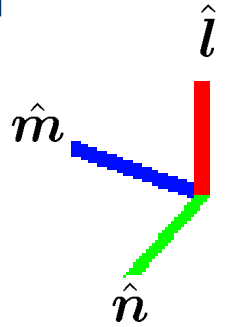


$^3\text{He-A}$  or  $^3\text{He-planar}$

$$\hat{d}(\hat{m} + i\hat{n})_j$$

$d$  ベクトルと triad

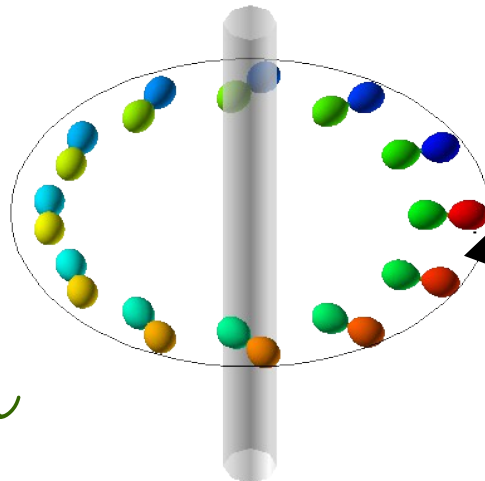
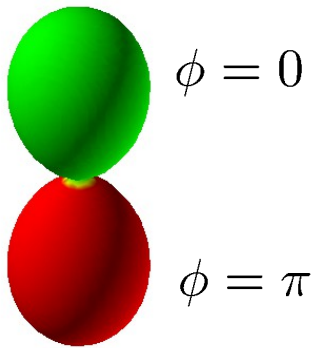
1/2 量子渦



Polar in  $S = 1$  BEC

1/2-1/2 量子渦

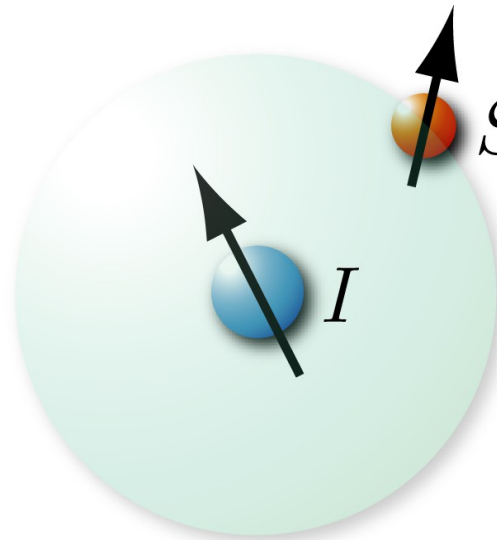
$$e^{i\phi} \cos \theta$$



位相+ベクトル



# スピノールBEC



$$S = 1/2$$

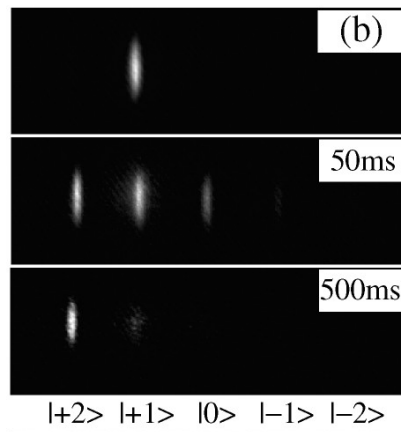
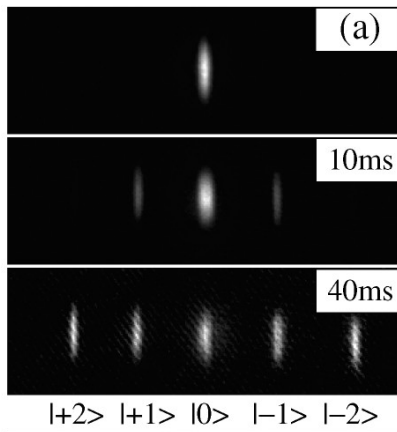
$$F = I + S + L$$

$I$  : nuclear spin

$S$  : electron spin

$L$  : electron orbital

$^{87}\text{Rb}$ , $^{23}\text{Na}$ , $^7\text{Li}$ , $^{41}\text{K}$	$F = 1, 2$
$^{85}\text{Rb}$	$F = 2, 3$
$^{133}\text{Cs}$	$F = 3, 4$
$^{52}\text{Cr}$	$F = 3$



光トラップを用いて、異なる  
スピン状態を閉じこめる

H. Schmaljohann et al. PRL **92**, 040402 (2004)

# 実験での観測可能性

パラメータ (学習院) :  $^{87}\text{Rb}$

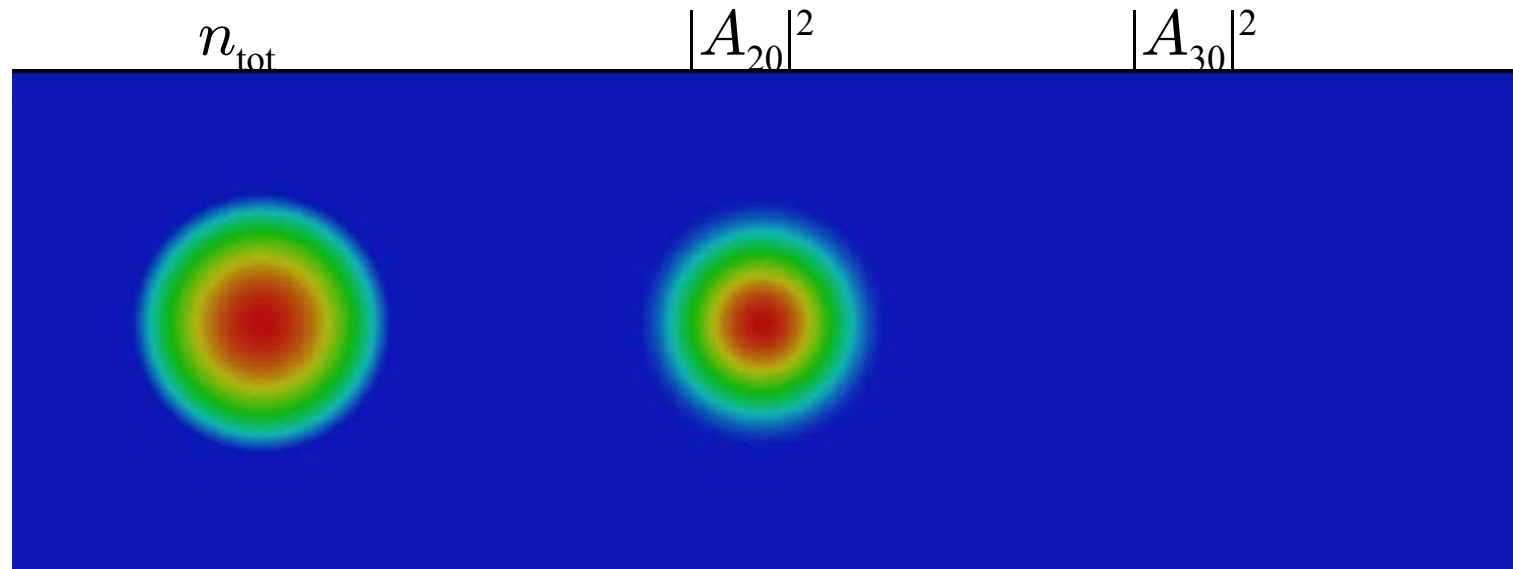
Trap frequency (axial) : 21 Hz

Trap frequency (radial) : 141 Hz

Particle number : 250000

Rotation frequency : 25 Hz

Magnetic field : 50mG



# 実験での観測可能性

パラメータ (学習院) :  $^{87}\text{Rb}$

Trap frequency (axial) : 21 Hz

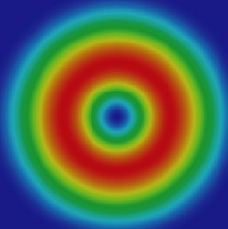
Trap frequency (radial) : 141 Hz

Particle number : 250000

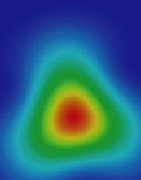
Rotation frequency : 25 Hz

Magnetic field : 50mG

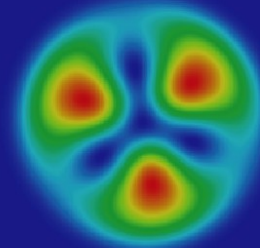
$$|A_{20}|^2$$



$$|A_{30}|^2$$



$$|\Psi_0|^2$$



# Vortonのトポロジー

## Order-parameter manifold

	$B = 0$	$B \neq 0$
Biaxial nematic	$\frac{U(1) \times SO(3)}{D_4}$	$\frac{U(1) \times SO(2)}{\mathbb{Z}_4}$
Cyclic	$\frac{U(1) \times SO(3)}{T}$	$\frac{U(1) \times SO(2)}{\mathbb{Z}_3}$



いずれの場合も

$$\pi_2 \cong e$$

Alice ringは存在しない

$\pi_2 \cong e$ なので渦輪があるときに必ず渦輪の外側を一様になるように連続変形できる  $\rightarrow \pi_3$