Kibble-Zurek機構における臨界緩和と有限サイズ効果

小林未知数（東大総合文化）

Kibble-Zurek機構とは？

低温・秩序相

結晶相・液晶相
2成分分離相
強磁性体
超伝導相
ボース凝縮・超流動相
後期宇宙

相転移点

高温・無秩序相

流体相
2成分混合相
常磁性体
金属相
粘性流体相
初期宇宙

相転移点を超えて（急激に）コントロールパラメーターを変化させたときの系の「秩序化ダイナミクス」を理解することは可能だろうか？

平衡状態を記述するコントロールパラメーター
（温度など）

秩序化ダイナミクスの分類

- 1次相転移・非保存系（流体→結晶相・液晶相など）
- 1次相転移・保存系（2成分混合→分離相のバイノーダル曲線）
  - 初期過程：熱ゆらぎによる核生成
  - 後期過程：核生成によって生じたドメインの合体および（非保存系の場合）ドメイン壁の解消
- スピノーダル分解（2成分混合相→2成分分離相のスピノーダル曲線）
  - 初期過程：パターン形成ダイナミクス
  - 後期過程：パターンの成長
- 2次相転移など臨界点をまたがるもの・非保存系（常磁性→強磁性相、粘性流体→超流動相、金属→超伝導相、1次相転移の臨界点近傍、ある種の非平衡定常系）
- 2次相転移など臨界点をまたがるもの・保存系（2成分混合→分離相の臨界点近傍、量子相転移「熱ゆらぎではなく量子ゆらぎによる相転移」）
  - 初期過程：線型不安定性による指数関数的なオーダーパラメータの成長
  - 後期過程：トポロジカル欠陥の有無および保存系・非保存系によって大きく異なる

臨界点が関与する非保存系（だけ）は統計力学的な理解が可能かもしれない

理解へと導く（かもしれない）2つのカギ

1. スケーリング理論
2. トポロジカル欠陥ダイナミクス

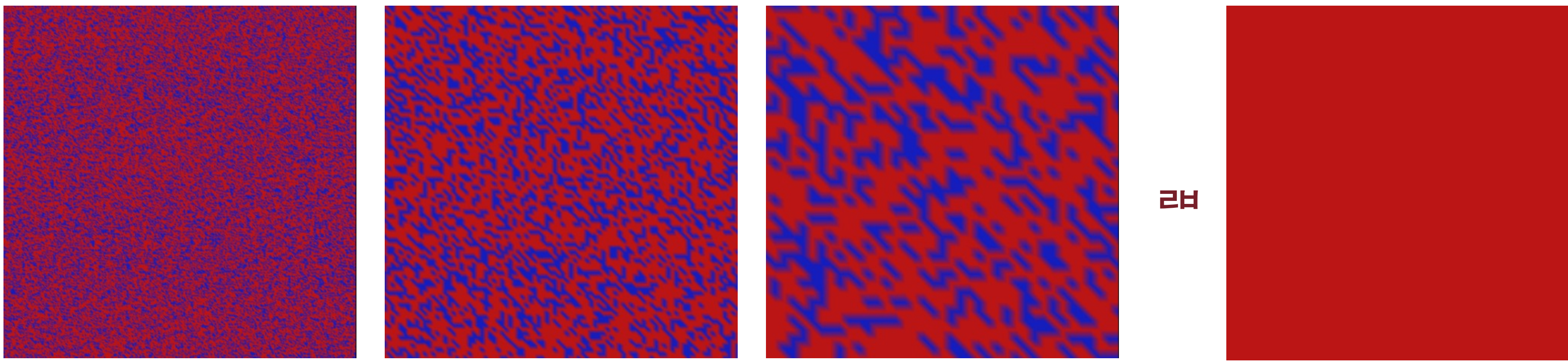
平衡状態に関しても2次相転移の統計力学に関しては（厳密解が分かっている2次元イジング模型を除いたとしても）、スケーリング理論を用いることでかなり分かっている

2次相転移点（臨界点）近傍の物理量のベキ依存性

$$M \propto (T_c - T)^{\beta},\ \chi \propto |T_c - T|^{-\gamma},\ C \propto |T_c - T|^{-\alpha},$$
$$M \propto |H|^{-1/\delta},\ \xi \propto |T_c - T|^{-\nu}$$

スケーリング理論

スケール変換と温度の低下が等価（臨界点上：スケール不変）



臨界指数（$\alpha, \beta, \gamma, \nu$）は系の次元とオーダーパラメータの自由度だけで決まっているように見える（ユニバーサリティ）。

くりこみ群を用いて（多くの場合は近似的に）臨界指数を計算できる。

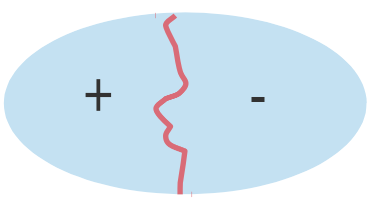
トポロジカル欠陥：連続変形で消すことのできない欠陥（対称性の破れ）

例としてn次元線型シグマ模型を考える。

$$H(n,d) = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \vec{\varphi}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) + \frac{c_0}{2} \nabla \vec{\phi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \vec{\phi}(\boldsymbol{x}) + \frac{c_1}{2} \left\{ \vec{\phi}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{\phi}(\boldsymbol{x}) - 1 \right\}^2 \right]$$

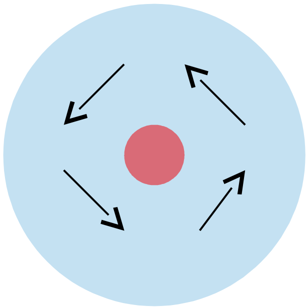
$\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ $\qquad$ $M = |\vec{\phi}| \neq 0$ for $T < T_{\mathrm{c}}$

n=1のとき



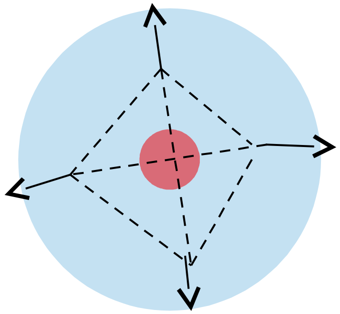
ドメインウォール

n=2のとき



渦

n=3のとき



モノポール

トポロジカル欠陥の分類

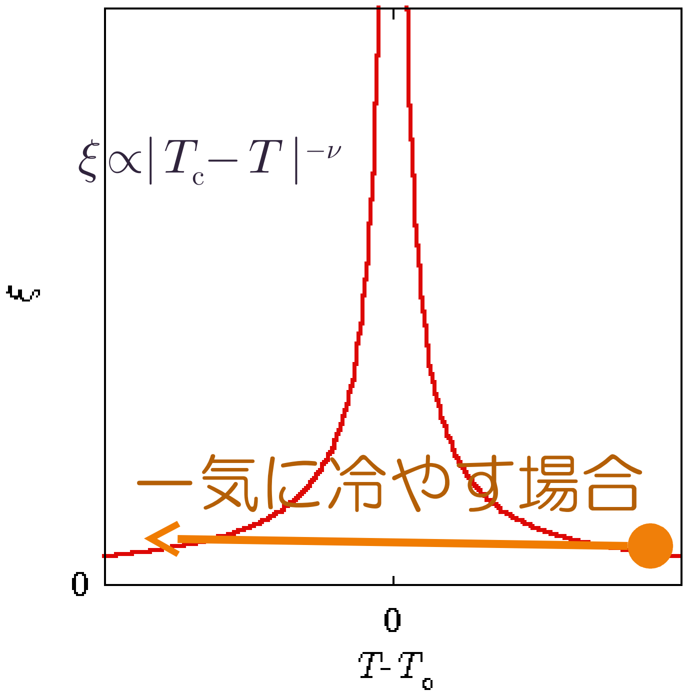
	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$d=2$	線欠陥	点欠陥	
$d=3$	面欠陥	線欠陥	点欠陥

スカーミオンタイプのトポロジカル欠陥は秩序化ダイナミクスを支配しないので、今は考えない

$n=1$：イジング型磁性体、気体液体転移臨界点
$n=2$：XY型磁性体、超伝導、超流動、ボース凝縮
$n=3$：ハイゼンベルグ型磁性体

液体Heを使って実際に実験ができる

秩序化ダイナミクス：初期過程

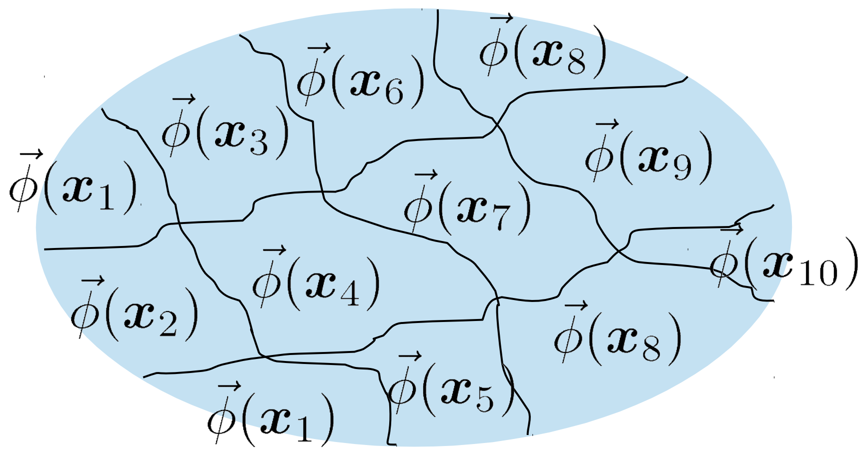


初期状態：$M=0$
ゆらぎのスケール：$\xi(t=0)\equiv\xi_0$

↓

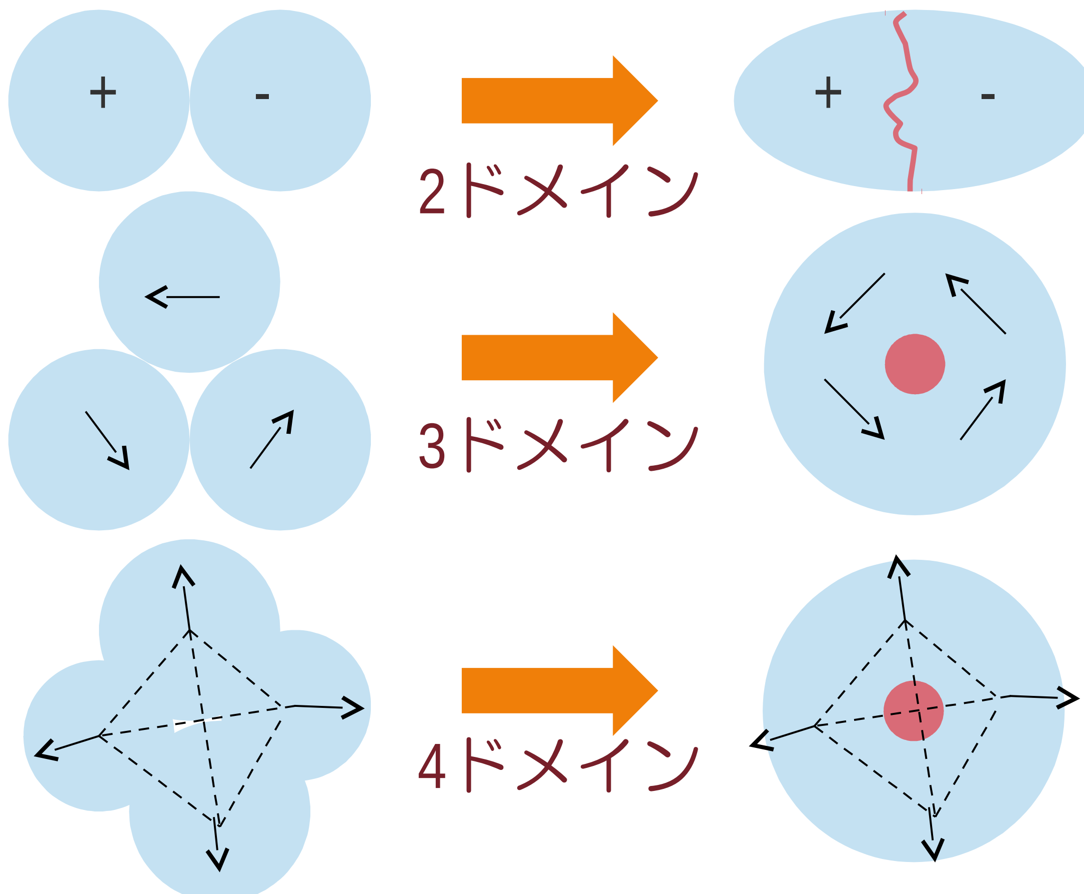
線型不安定性によってMが成長する

オーダーパラメータの空間ゆらぎのスケールはξ_0となる（オーダーパラメータ一定のドメインが系を満たしている）



秩序化ダイナミクス：中間過程

トポロジカル欠陥の生成



$n=1$ $P=1/2$

$n=2$ $P=1/4$

$n=3$ $P=1/8$

欠陥の中心では対称性が破れていない（液体状態）

秩序化ダイナミクス：後期過程

トポロジカル欠陥は容易には消えず、ゆっくりとした時間スケールで減衰してゆく
→秩序化ダイナミクスの後期過程はトポロジカル欠陥のダイナミクスによって支配される

トポロジカル欠陥の直径ζ：微分項と相互作用項の競合で決まる

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{\varphi}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\frac{c_0}{2}\nabla\vec{\phi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla\vec{\phi}(\boldsymbol{x})}_{c_0/\zeta^2} + \underbrace{\frac{c_1}{2}\left\{\vec{\phi}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{\phi}(\boldsymbol{x}) - 1\right\}^2}_{\Delta\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{\mathrm{crystal}} - \mathcal{F}_{\mathrm{liquid}} = c_1}$$

$$\zeta = \sqrt{c_0/c_1}$$

ドメインウォールの表面張力$\sigma = \zeta\Delta$ㅎ　：
小さなドメインウォールが結合して大きくなり、最終的に系のサイズにまで広がる

渦の張力$\mu = \zeta^2\Delta$ㅎ　：
小さな渦輪は消滅する。曲がった渦は伸びてゆき、その過程で他の渦と再結合をすることでより長くなり、最終的に系のサイズにまで伸びる

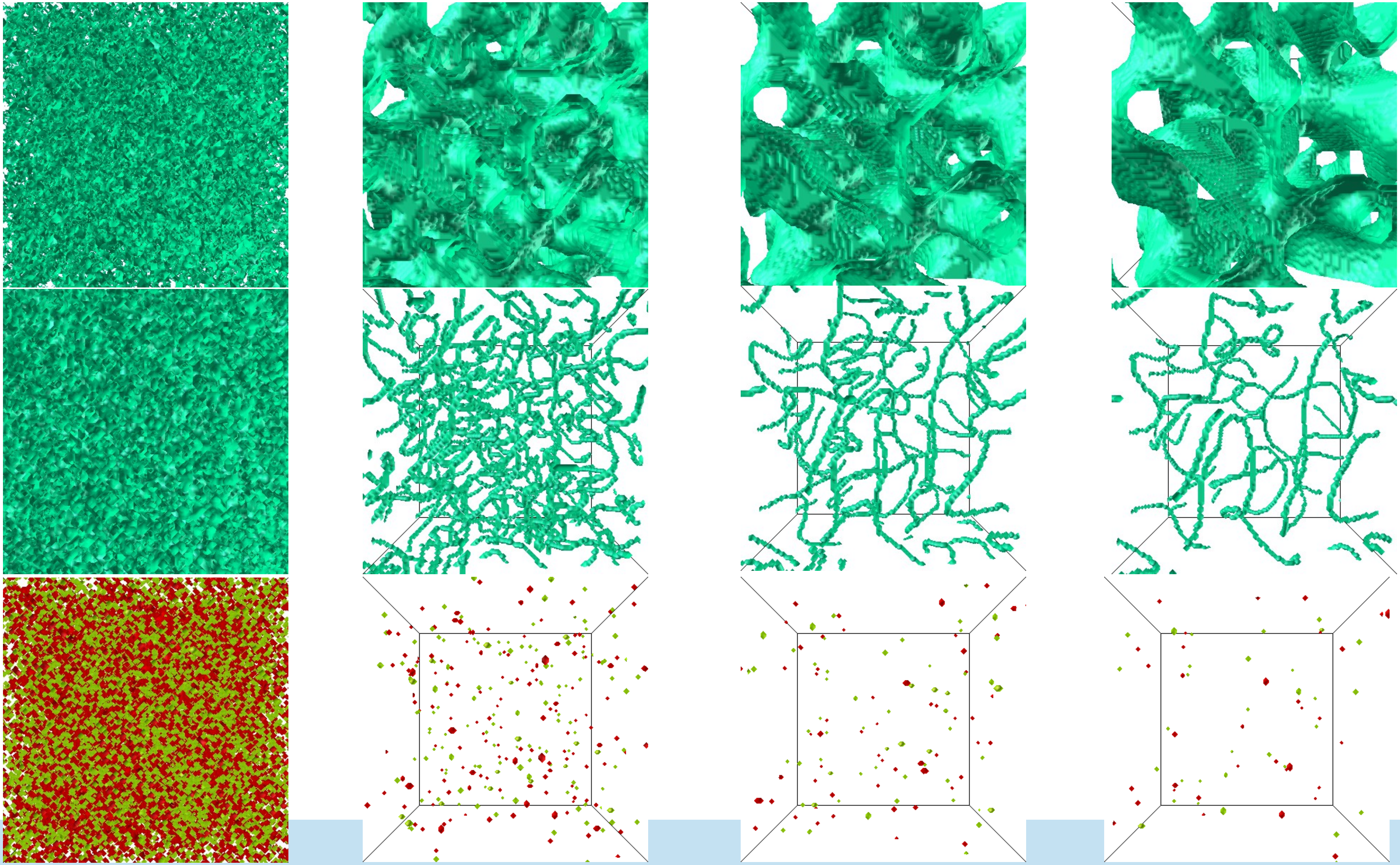
モノポール1個のエネルギー$\varepsilon = \zeta^3\Delta$ㅎ　：
モノポールは対消滅して減っていく

系のハミルトニアンは近似的にトポロジカル欠陥の座標を用いて書くことができる

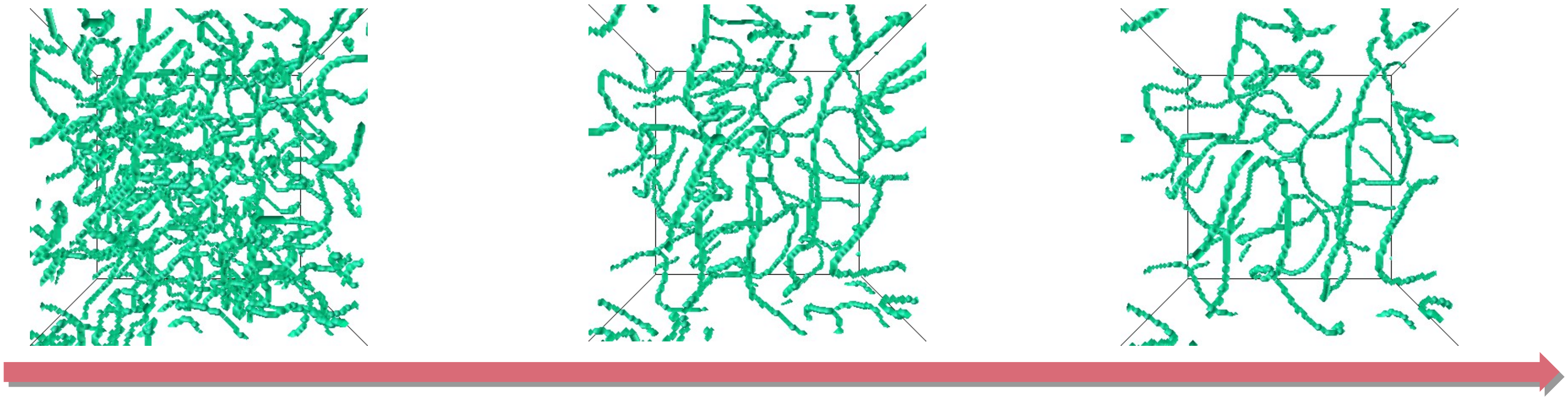
$$H = H\left[\vec{\phi}(\boldsymbol{x})\right] \simeq H[\boldsymbol{q}(a)] = \begin{cases} \int da\, \sigma(a) \\ \int da\, \mu(a) \\ \sum_a \varepsilon(a) \end{cases}$$

$\boldsymbol{q}$：欠陥の座標
a：欠陥の位置に対応するパラメータ

欠陥の緩和ダイナミクス



スケール不変性の仮定



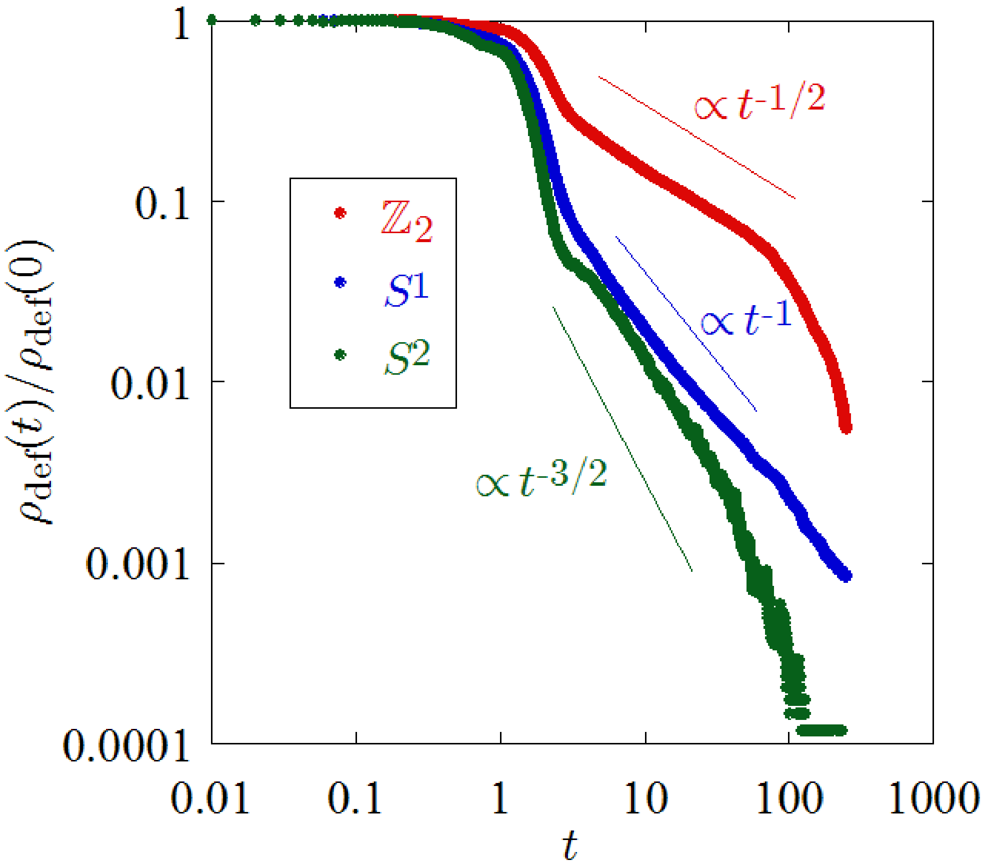
秩序化ダイナミクスの後期過程において、系のスケール変換と時間発展が等価であると仮定する

スケール不変性の仮定とハミルトニアンの形から、動的相関長$R(t) \propto C t^{1/2}$が導かれる。$C = \xi^{1-z/2}$

t_0は線型不安定性による特徴的な時間、
$R(t)$はトポロジカル欠陥の平均的な距離に相当する

$$\rho_{\mathrm{domainwall}} \propto t^{-1/2}, \quad \rho_{\mathrm{vortex}} \propto t^{-1}, \quad \rho_{\mathrm{monopole}} \propto t^{-3/2}$$

数値シミュレーションによる結果



現在ある程度分かっていること

スケール不変性は仮定であり証明はされていない：どこまで正しいだろうか？

- トポロジカル欠陥の存在しない系では、成り立っていないように見える
- モノポールはドメインウォールや渦に比べると、系全体に広がらず、緩和も速いのでダイナミクスの支配という点では弱い。ゆえにスケール不変性も弱い
- 保存系はトポロジカル欠陥の運動に制限を加え、スケール不変性が成り立っていないように見える
- 渦が非可換の場合も保存系同様に、スケール不変性が成り立っていないように見える：新たな保存量としての絡み数の存在？

有限速度クエンチ

冷却は実際には有限の時間で行われる。その影響を調べたい

冷却速度τ_{Q}の導入：$T(t)=T_{\mathrm{c}}(1-t/\tau_{\mathrm{Q}})$　$--\tau_{\mathrm{Q}} \leq t \leq \tau_{\mathrm{Q}}$

重要な物理量：緩和時間$\tau_{\mathrm{eq}}=\tau_{\mathrm{eq}}(T)$：系が外力によって平衡からずれたときに元に戻る時間

$\tau_{\mathrm{eq}}(T)$は相関時間$\tau_{\mathrm{col}}(T)$から得られる（揺動散逸定理）

→ $\tau_{\mathrm{col}} \propto |T_{\mathrm{c}}-T|^{-\nu z}$から$\tau_{\mathrm{eq}} \propto |T_{\mathrm{c}}-T|^{-\nu z}$が得られる

$t < -\tau_{\mathrm{eq}}(T(t))$：系は平衡状態に緩和しながら時間発展する

$$R(t) = \xi(T(t))$$

$-\tau_{\mathrm{eq}}(T(t)) < t,\ t < \tau_{\mathrm{eq}}(T(t))$：臨界点近傍において緩和時間が長くなるため、系は平衡状態へ緩和できなくなる

Zurekはここでダイナミクスが「凍っている」という仮定を用いたが、この領域でも系の時間発展は続いており、トポロジカル欠陥の緩和ダイナミクスは存在する

$\tau_{\mathrm{eq}}(T(t)) < t$：今まで議論してきた秩序化ダイナミクスが起こる

$$R(t) = \xi(T(t))^{1-z/2} t^{1/2}$$

臨界緩和領域のダイナミクス

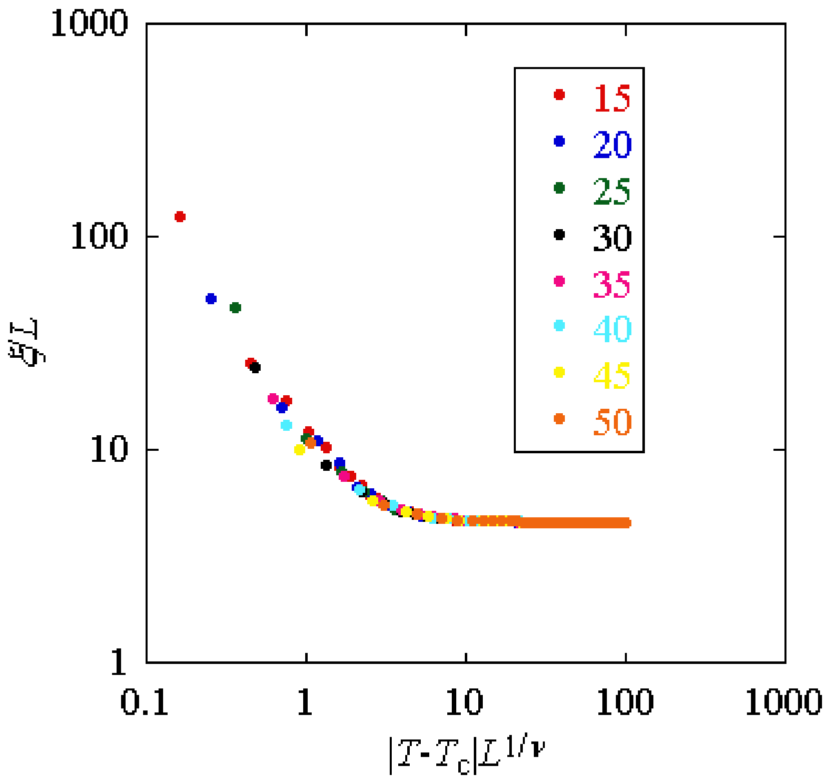
平衡状態における有限サイズスケーリングを思い出す。

有限系では相転移は起こらず熱力学量の特異性はない。

$$\xi = f(|T_c - T|, L)$$

$$\to \xi/b = f(|T_c - T|/b^{\nu}, L/b)$$

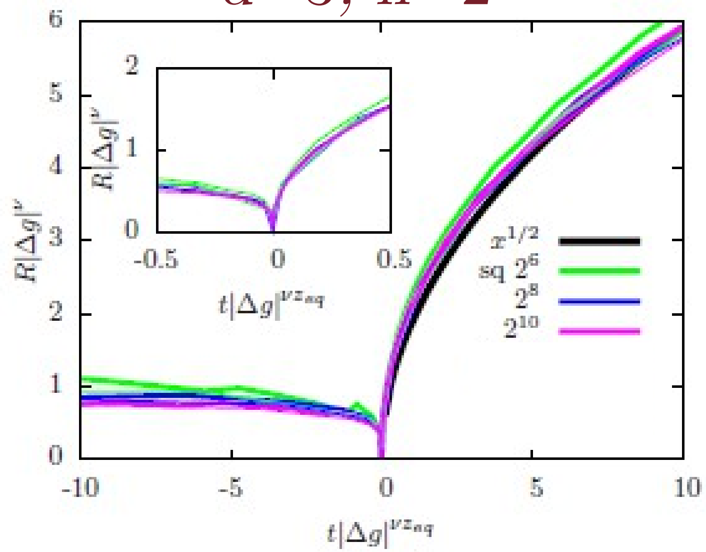
$$\to \xi/L = f(|T_c - T|/L^{\nu})$$



時間のスケーリングを仮定して

$$R(t) = \xi(T(t)) f(t/\tau_{\mathrm{eq}}(T(t)))$$

d=3, *n*=2



fの解析的な形は分からないが任意の冷却速度における振る舞いを予測できる。
この形を超流動ヘリウムに適用すると量子渦生成に関してZurekの予言から10倍以上少ない量子渦密度が予測される。