量子渦の渦芯における内部自由度の幾何学的決定法およびスピノル・ボース凝縮への応用

東大院総合文化・東大理・慶応大日吉物理・東大工
小林未知数・小林伸吾・新田宗土・川口由紀・上田正仁

1. 内部自由度のある量子渦
2. 渦芯の幾何学的決定法
3. スピノルBECへの応用
4. まとめ

2012年9月19日　日本物理学会2012年秋季大会

内部自由度のある量子渦

スカラーBEC（or ^{4}He）の量子渦：密度の穴が開く

内部自由度のある系の量子渦：異なる対称性を持つ状態が渦芯を占めてCoreless vortexとなるときがある。

- 多成分BEC：ある成分の渦芯に別の成分が入る
- Spin-1 spinor BEC：Ferro相（Polar相）の渦芯にPolar相（Ferro相）の成分が入る
- ^{3}He-B相： 渦芯に^{3}He-A相が入る
- d波超伝導：渦芯にs波の成分が入る

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

渦芯の内部状態はオーダーパラメーターや渦芯状態のトポロジーだけでは決まらない

系の特徴的なエネルギー汎関数（スピノルBECを例に）

$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\underbrace{\sum_i |\nabla \psi_i|^2}_{\text{運動エネルギー}} + c_0 \rho^2 + c_1 |\boldsymbol{F}|^2 \right]$$

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

渦芯の内部状態はオーダーパラメーターや渦芯状態のトポロジーだけでは決まらない

系の特徴的なエネルギー汎関数（スピノルBECを例に）

$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\sum_i |\nabla \psi_i|^2 + \underbrace{c_0 \rho^2}_{} + c_1 |\boldsymbol{F}|^2 \right]$$

密度 $\rho = \sum_i |\psi_i|^2$ ：系の密度を決める項

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

渦芯の内部状態はオーダーパラメーターや渦芯状態のトポロジーだけでは決まらない

系の特徴的なエネルギー汎関数（スピノルBECを例に）

$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\sum_i |\nabla \psi_i|^2 + c_0 \rho^2 + \underbrace{c_1 |\boldsymbol{F}|^2} \right]$$

スピン行列 $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$：系のグローバルな相およびオーダーパラメーター空間、渦の種類を決定する。

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

渦芯の内部状態はオーダーパラメーターや渦芯状態のトポロジーだけでは決まらない

系の特徴的なエネルギー汎関数（スピノルBECを例に）

$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\sum_i |\nabla \psi_i|^2 + c_0 \rho^2 + c_1 |\boldsymbol{F}|^2 \right]$$

通常の系ではc_0 ^ c_1 → 密度一定 ^ 密度に穴が開く

- 渦芯近傍では$|\boldsymbol{F}|^2$の項が無視でき、密度に穴が開かない
- 渦芯近傍では運動エネルギーの項もdominant

指導原理　与えられた境界条件の下で、密度一定のまま運動エネルギーを最小化するような波動関数を求める

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

直線状の渦を考える：$\psi = \psi(r,\varphi)$

密度一定かつ任意の状態を表現する必要十分条件

$$\psi(r,\varphi) = \exp\left[-i\alpha(r,\varphi)\right]\psi_{\mathrm{core}}$$

$$\alpha^{\dagger}(r,\varphi) = \alpha(r,\varphi)$$

渦芯状態からのユニタリ変換

$$\begin{cases} \sin^{-1}\left[i\left\{|\psi(r,\varphi)\rangle\langle\psi_{\mathrm{core}}| - |\psi_{\mathrm{core}}\rangle\langle\psi(r,\varphi)|\right\}\right] \\ \text{exist and } \varphi-\text{indep} \end{cases}$$

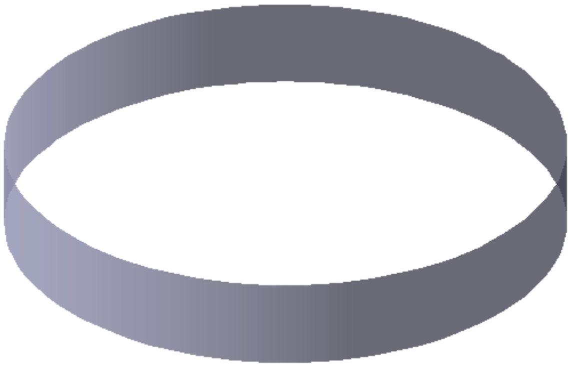
運動エネルギーを極小にする必要十分条件

$$\alpha(r,\varphi)_{i,j} = \begin{cases} \sigma_{i,j}(r)e^{i(\lambda_{i,j}\varphi+\delta_{i,j})} & i>j \\ \alpha^{*}(r,\varphi)_{j,i} & j>i \\ 0 & i=j \end{cases}$$

$$\sigma_{i,j}(r) \propto r^{|\lambda_{i,j}|} \text{ for } r\to 0 \text{ and } \lambda_{i,j}\neq 0$$

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

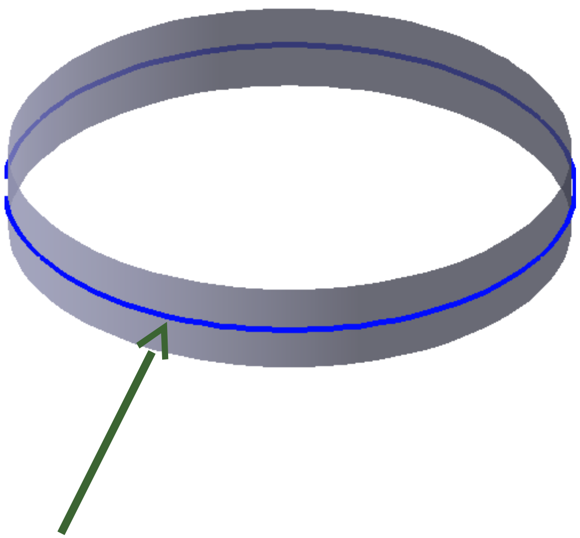
オーダーパラメーター空間



帯状にオーダーパラメーター空間があるとする

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

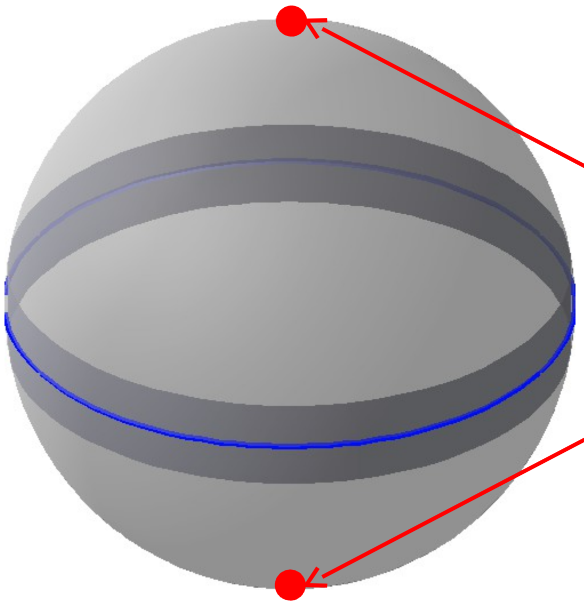
オーダーパラメーター空間



オーダーパラメーター空間で決まる
渦（境界）の状態：ループ

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

密度一定空間

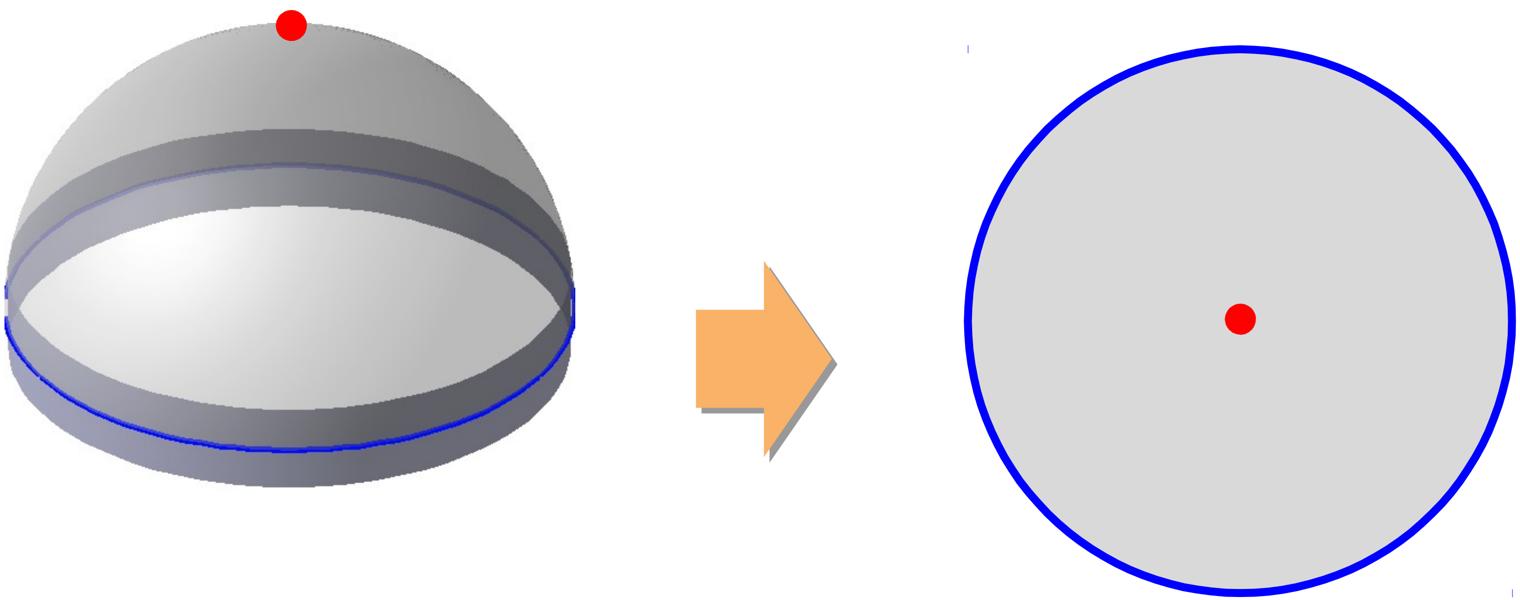


ループから（球面上で）
等距離にある点を探す
→渦芯の状態

密度一定面がオーダーパラメーター空間を含んだ
球面状にあるとする

Coreless Vortexの波動関数をどうやって決定するか？

オーダーパラメーター空間　　　　　　実空間



どちらか片方を選んで半球面上を実空間（円）に写像する
→エネルギーを計算し、最小となる等距離点を探す

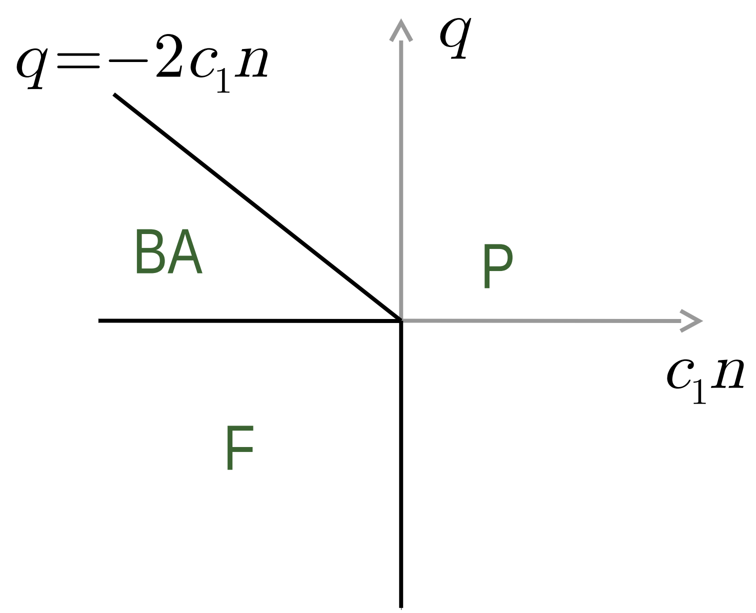
スピノルBECへの応用

2次ゼーマンエネルギーを含めたエネルギー汎関数

$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i |\nabla \psi_i|^2 + \frac{c_0}{2}\rho^2 + \frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + q \sum_i i^2 |\psi_i|^2 \right]$$

$q > 0$: magnetic field
$q < 0$: microwave

Ferromegnetic : $(1 \;\; 0 \;\; 0)^T$
Polar : $(0 \;\; 1 \;\; 0)^T$
Broken-axisymmetric : $(\sin\eta \;\; \cos\eta \;\; 0)^T$



スピノルBECへの応用

密度一定の空間：$|\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_{-1}|^2 = \mathrm{const.}$ → 5次元球面

Ferromagnetic相の渦：$(e^{\mathrm{i}\varphi} \;\; 0 \;\; 0)^T$ を考える

可能な渦芯状態
$$\begin{cases} \text{Polarコア：} (0 \;\; e^{\mathrm{i}\gamma} \;\; 0)^T \\ \text{Ferromagneticコア：} (0 \;\; 0 \;\; e^{\mathrm{i}\delta})^T \\ \text{Broken-axisymmetricコア：} (0 \;\; e^{\mathrm{i}\gamma}\cos\eta \;\; e^{\mathrm{i}\delta}\sin\eta)^T \end{cases}$$

スピノルBECへの応用

密度一定の空間：$|\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_{-1}|^2 = \mathrm{const.}$ → 5次元球面

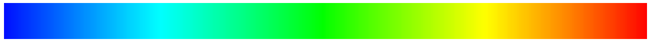
Ferromagnetic相の渦：$(e^{\mathrm{i}\varphi} \;\; 0 \;\; 0)^T$ を考える

可能な渦芯状態 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Polarコア：} (0 \;\; e^{\mathrm{i}\gamma} \;\; 0)^T \\ \\ \end{array} \right.$

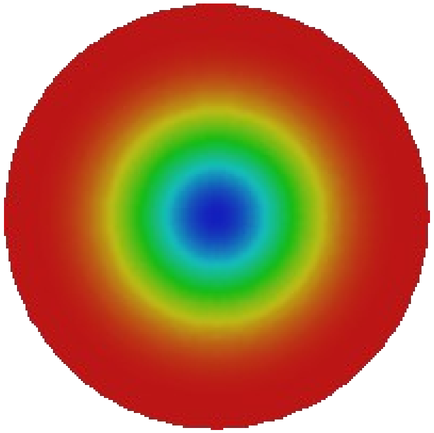
Polarコア波動関数：$(e^{\mathrm{i}\varphi} h_1(r) \;\; e^{\mathrm{i}\gamma} h_0(r) \;\; 0)^T$

コアに$U(1)$の自由度がある

磁化分布

0  1

$|\boldsymbol{F}|^2/\rho^2$



スピノルBECへの応用

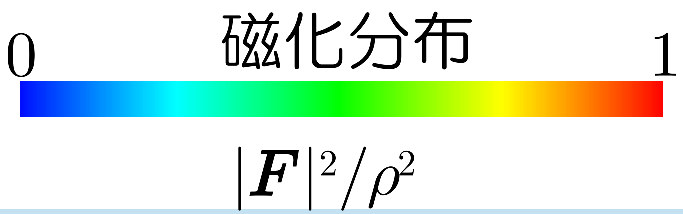
密度一定の空間：$|\psi_1|^2+|\psi_0|^2+|\psi_{-1}|^2=\mathrm{const.}$ → 5次元球面

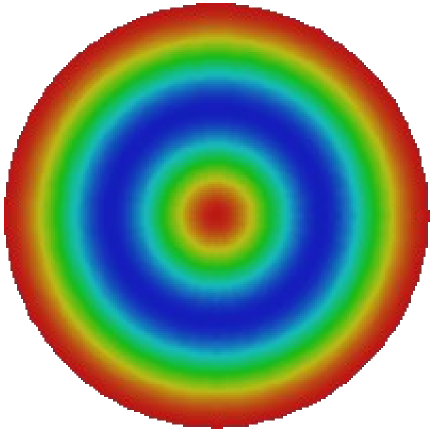
Ferromagnetic相の渦：$(e^{i\varphi}\ \ 0\ \ 0)^T$ を考える

可能な渦芯状態　Ferromagneticコア：$(0\ \ 0\ \ e^{i\delta})^T$

Ferroコア波動関数：$(e^{i\varphi}h_1(r)\ \ 0\ \ e^{i\delta}h_{-1}(r))^T$

コアに$U(1)$の自由度がある





スピノルBECへの応用

密度一定の空間：$|\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_{-1}|^2 = \mathrm{const.}$ → 5次元球面

Ferromagnetic相の渦：$(e^{\mathrm{i}\varphi}\quad 0\quad 0)^T$ を考える

可能な渦芯状態 $\Big\{$ Ferromagneticコア：$(0\quad 0\quad e^{\mathrm{i}\delta})^T$

Ferroコア波動関数：$(e^{\mathrm{i}\varphi}\, h_1(r)\quad e^{\mathrm{i}(\gamma-\varphi)}\, h_0(r)\quad e^{\mathrm{i}\delta}\, h_{-1}(r))^T$

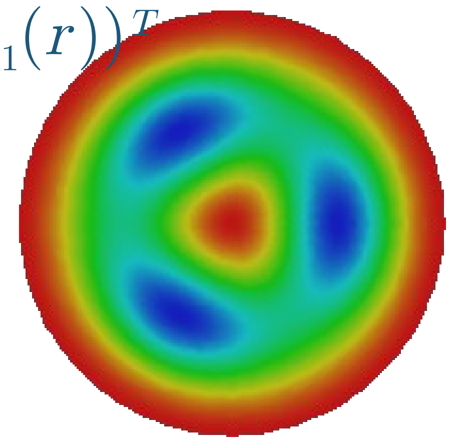
コアに$U(1)$の自由度がある

コアの周囲に$U(1)$の自由度がある

磁化分布

0 1

$|\boldsymbol{F}|^2/\rho^2$



スピノルBECへの応用

密度一定の空間：$|\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_{-1}|^2 = \mathrm{const.}$ → 5次元球面

Ferromagnetic相の渦：$(e^{i\varphi}\ \ 0\ \ 0)^T$ を考える

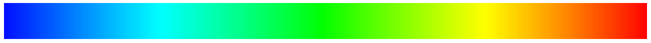
可能な渦芯状態

Broken-axisymmetricコア：$(0\ \ e^{i\gamma}\cos\eta\ \ e^{i\delta}\sin\eta)^T$

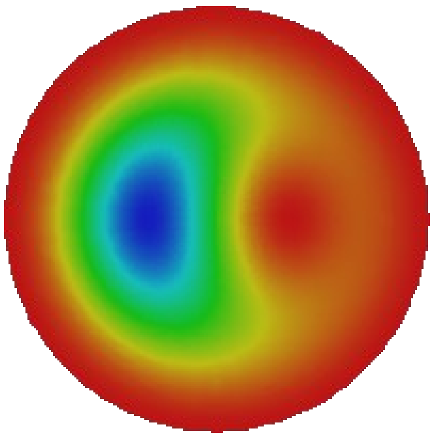
BAコア波動関数：$(e^{i\varphi} h_1(r)\ \ e^{i\gamma} h_0(r)\ \ e^{i\delta} h_{-1}(r))^T$

コアに$U(1)\times U(1)$の自由度がある

磁化分布

0  1

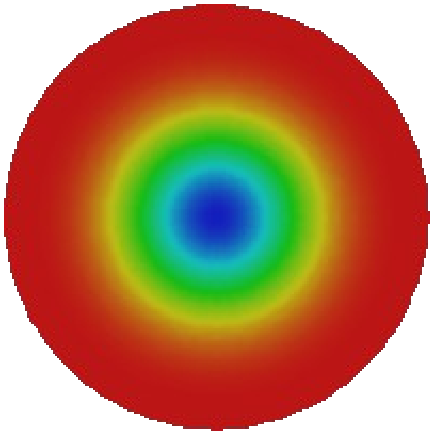
$|\boldsymbol{F}|^2/\rho^2$



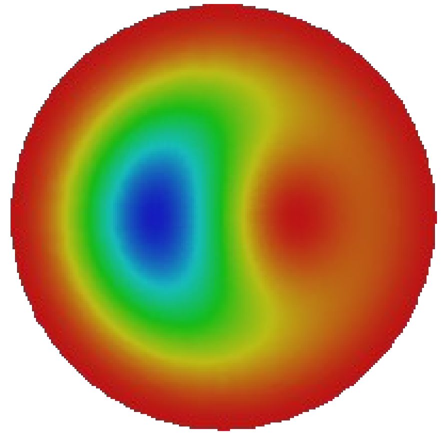
渦の特徴

0 磁化分布 1

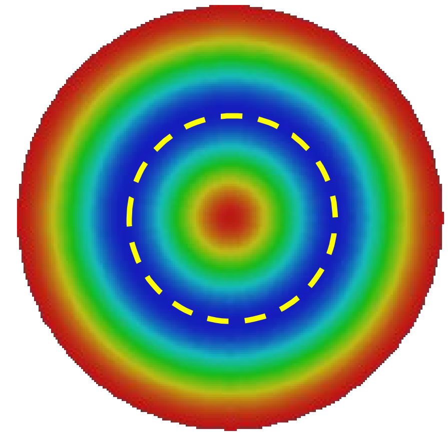
$|\boldsymbol{F}|^2/\rho^2$



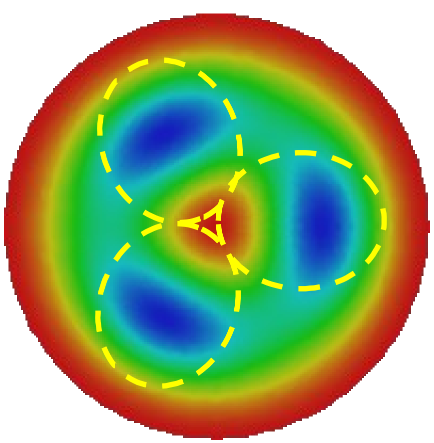
Polarが中央



Polarがずれる



Polarリング
（1/2渦を形成）

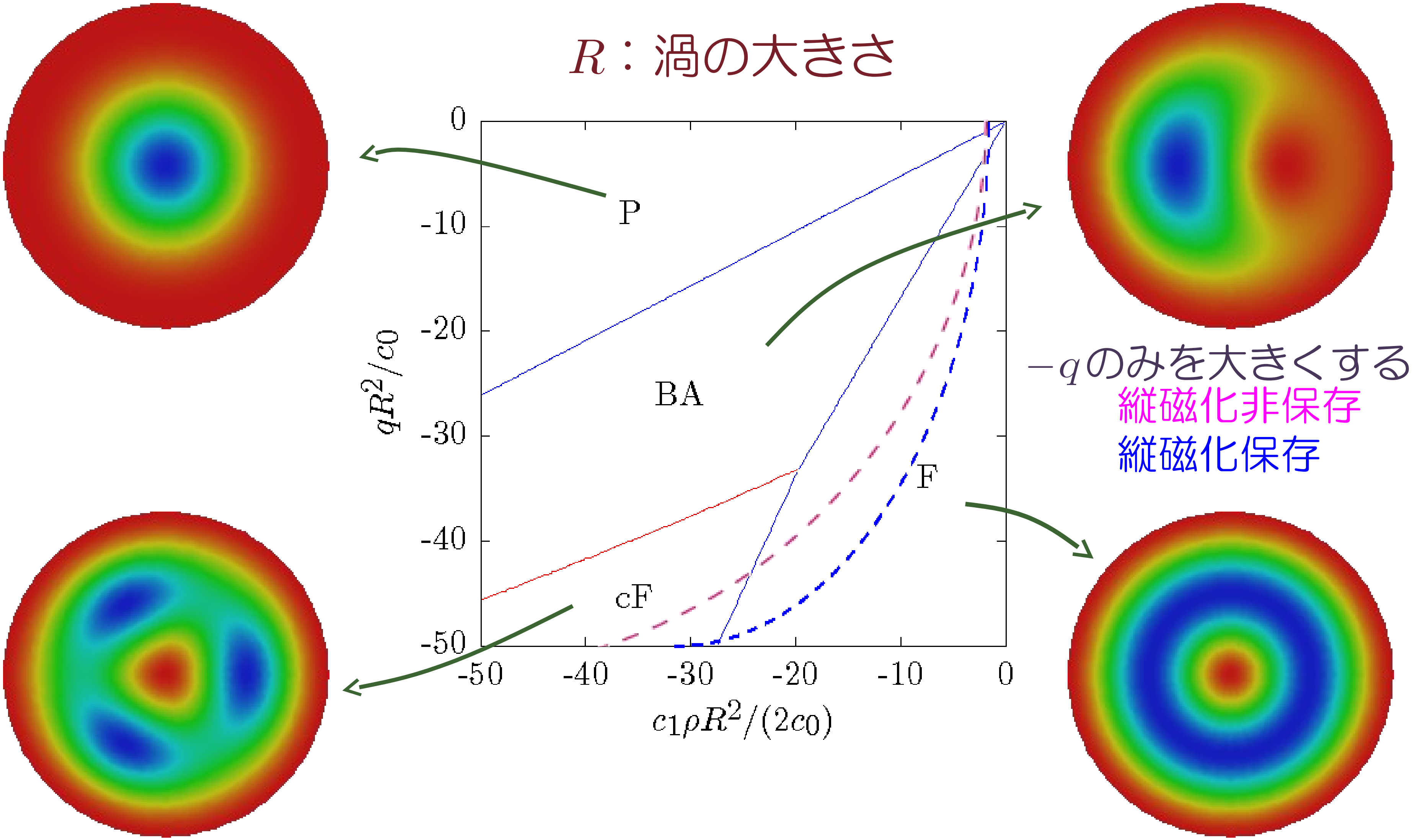


カレント1/3を持つPolarコアの渦が3本

Ferro相の渦のトポロジカルチャージ：$\mathbb{Z}_2$：(0,1)

$1+1+1=1$（奇数本の渦と1本の渦が等価）

渦芯相図



R：渦の大きさ
0
-10
-20
-30
-40
-50
-50
-40
-30
-20
-10
0
$qR^2/c0$
$c_1\rho R^2/(2c_0)$
P
BA
F
cF
$-q$のみを大きくする
縦磁化非保存
縦磁化保存

数値計算との比較(^{87}Rbの磁化分布)

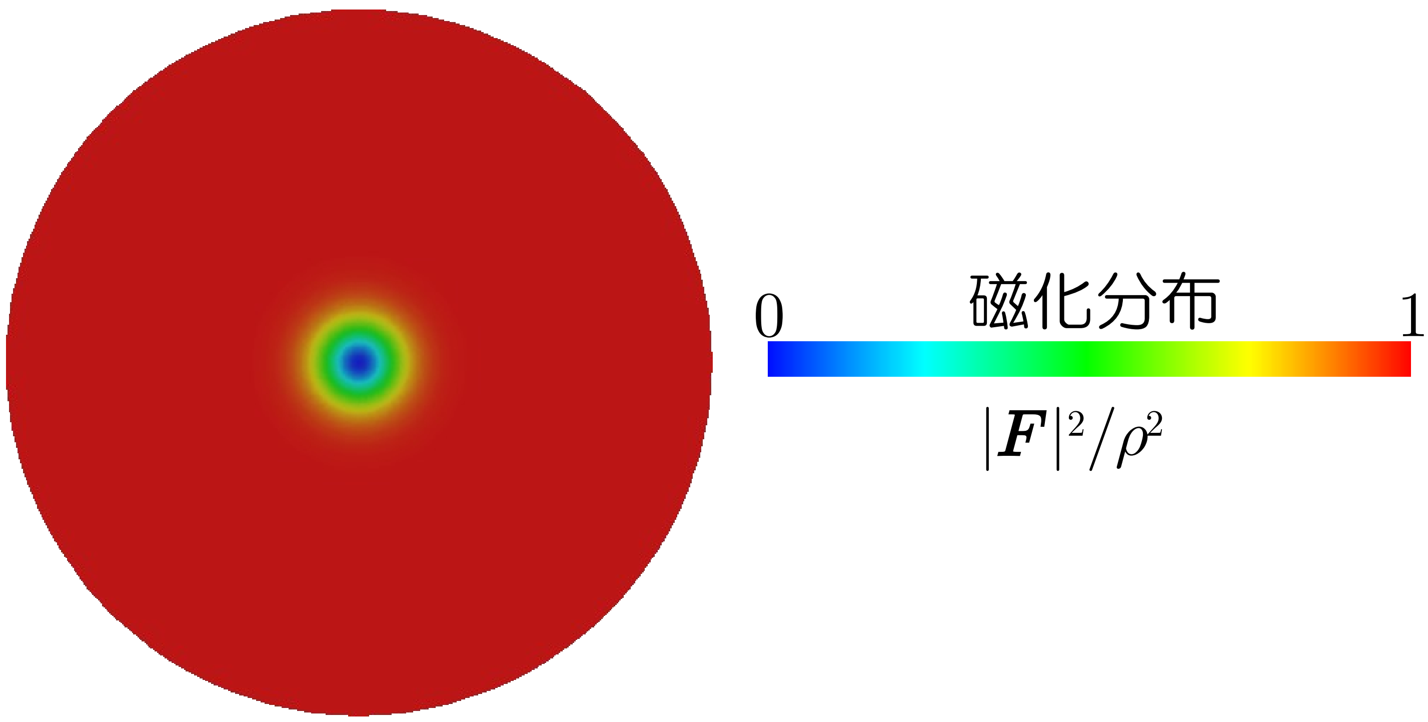
$$E=\int d\boldsymbol{x}\left[\frac{\hbar^2}{2M}\sum_i|\nabla\psi_i|^2+\frac{c_0}{2}\rho^2+\frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2+q\sum_i i^2|\psi_i|^2+\frac{M\omega^2r^2}{2M}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho=0$

縦磁化保存



数値計算との比較(^{87}Rbの磁化分布)

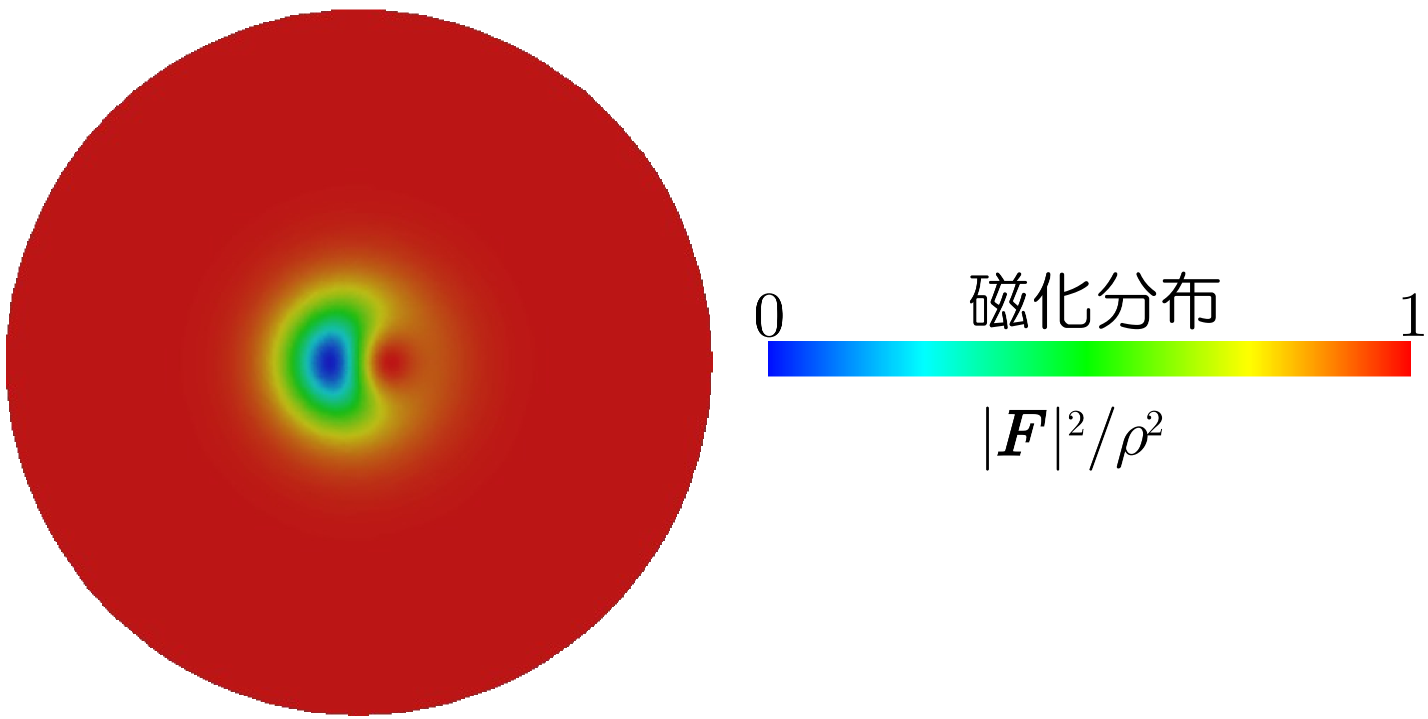
$$E=\int d\boldsymbol{x}\left[\frac{\hbar^2}{2M}\sum_i|\nabla\psi_i|^2+\frac{c_0}{2}\rho^2+\frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2+q\sum_i i^2|\psi_i|^2+\frac{M\omega^2r^2}{2M}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho=0.2$

縦磁化保存



数値計算との比較(^{87}Rbの磁化分布)

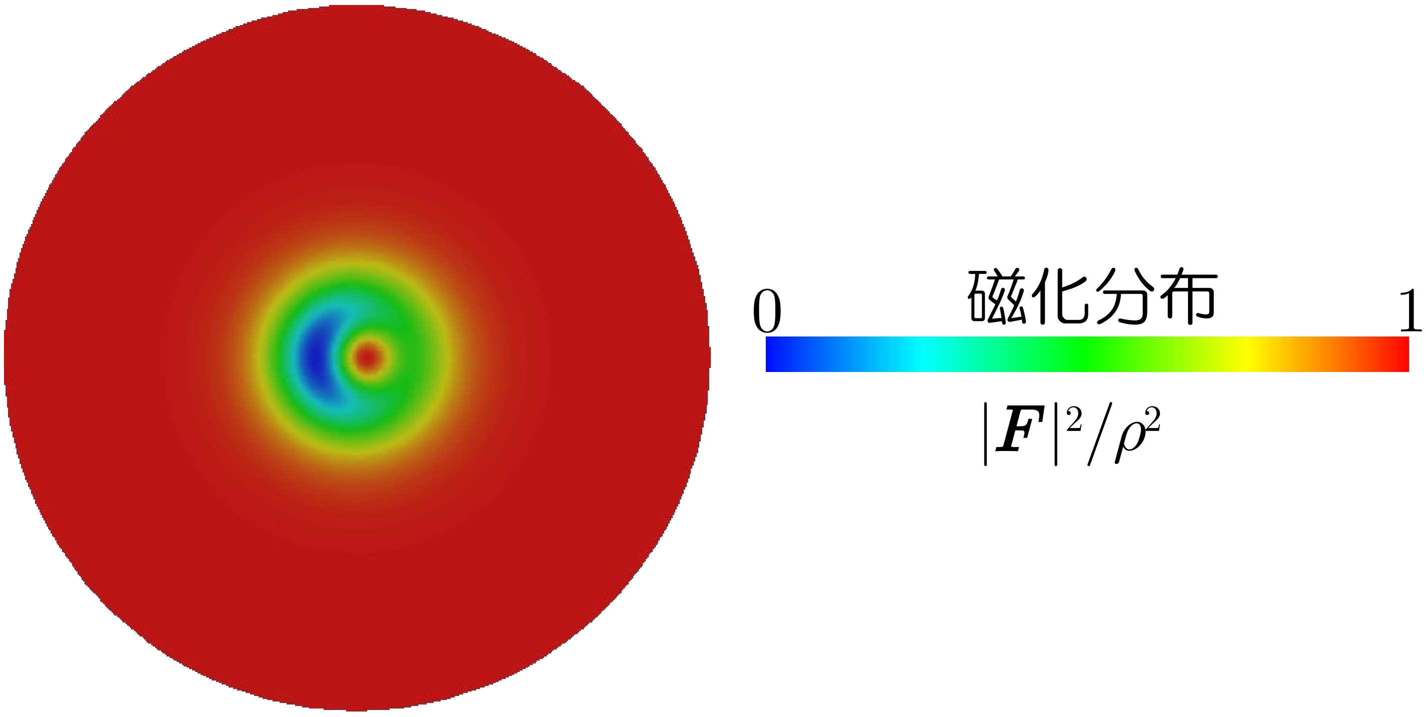
$$E=\int d\boldsymbol{x}\left[\frac{\hbar^2}{2M}\sum_i|\nabla\psi_i|^2+\frac{c_0}{2}\rho^2+\frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2+q\sum_i i^2|\psi_i|^2+\frac{M\omega^2r^2}{2M}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho=0.25$

縦磁化保存



数値計算との比較(^{87}Rbの磁化分布)

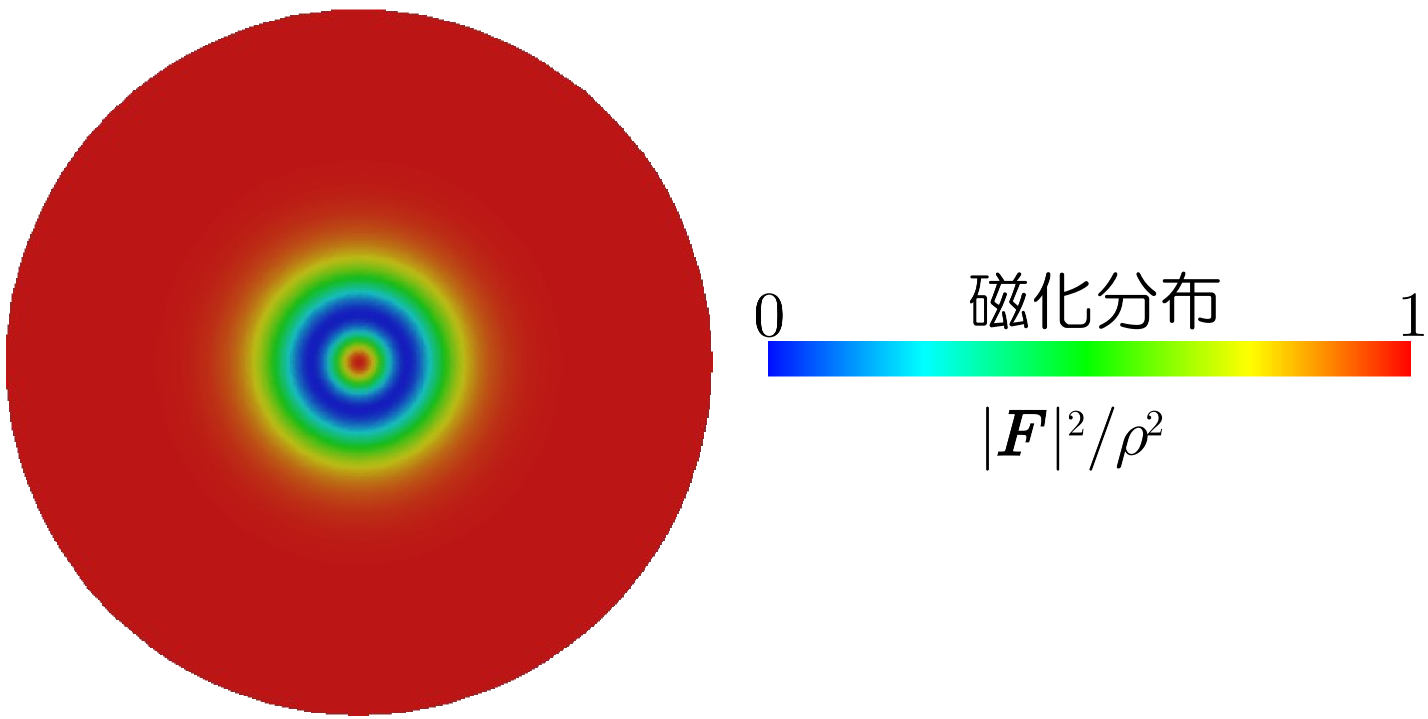
$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i |\nabla \psi_i|^2 + \frac{c_0}{2}\rho^2 + \frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + q\sum_i i^2 |\psi_i|^2 + \frac{M\omega^2 r^2}{2M} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L} \right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho = 0.3$

縦磁化保存



数値計算との比較(^{87}Rbの磁化分布)

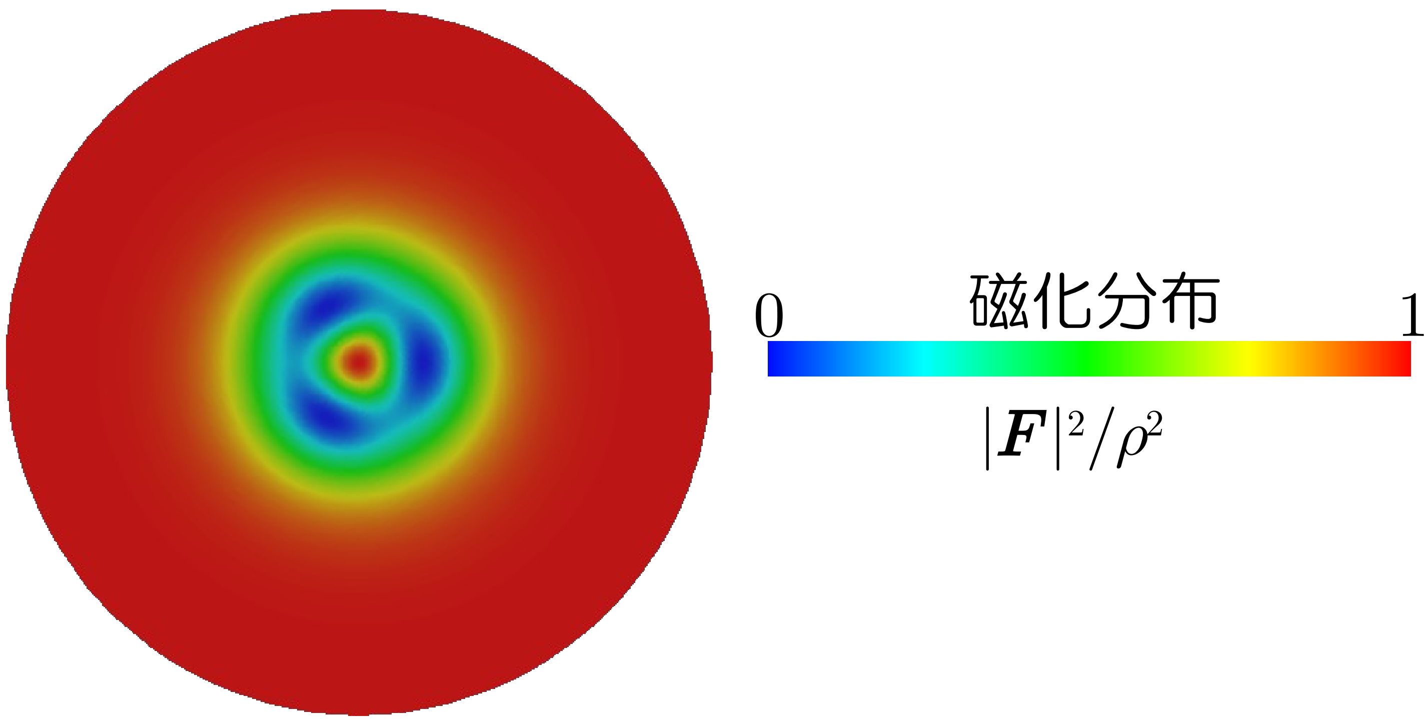
$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i |\nabla \psi_i|^2 + \frac{c_0}{2}\rho^2 + \frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + q \sum_i i^2 |\psi_i|^2 + \frac{M\omega^2 r^2}{2M} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L} \right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho = 0.7$

縦磁化保存



数値計算との比較(⁸⁷Rbの磁化分布)

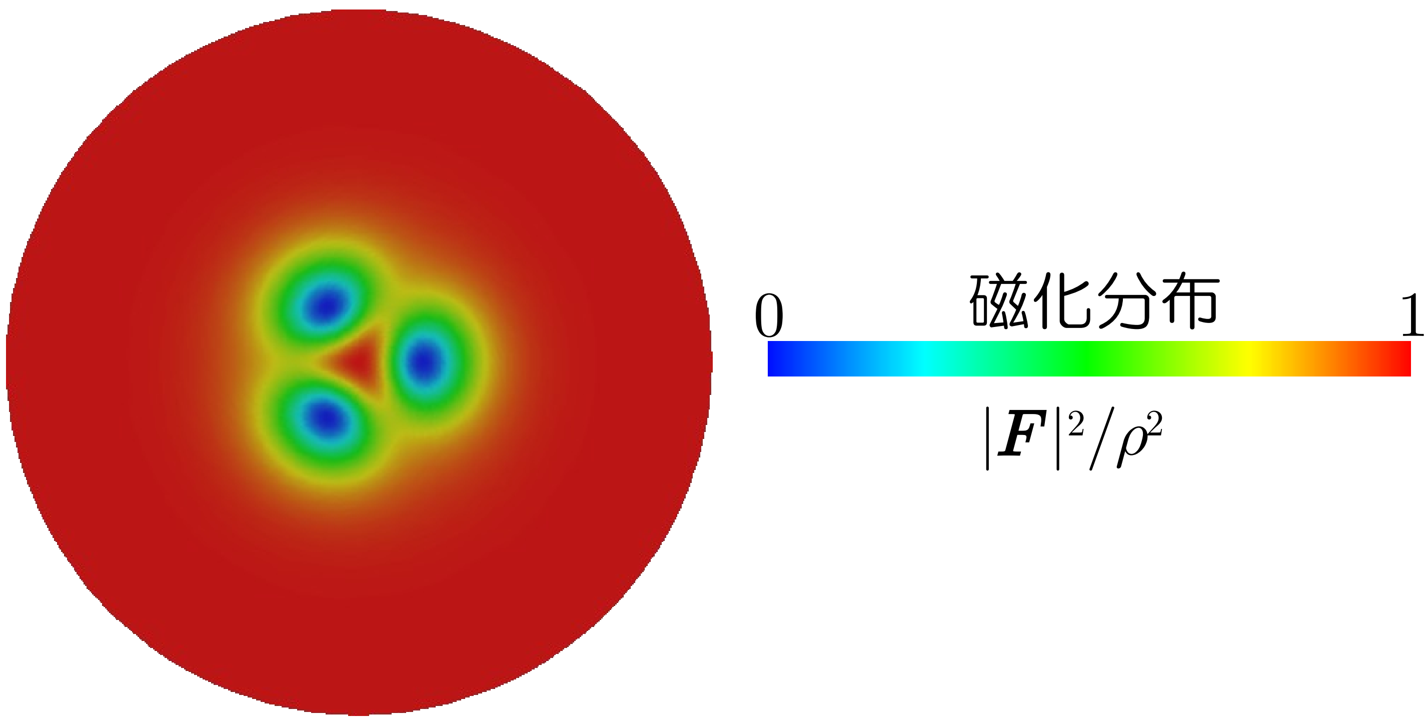
$$E = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i |\nabla \psi_i|^2 + \frac{c_0}{2}\rho^2 + \frac{c_1}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + q \sum_i i^2 |\psi_i|^2 + \frac{M\omega^2 r^2}{2M} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{L} \right]$$

トラップ　回転

トラップ：21 Hz（長軸）141 Hz（動径）　原子数：250000　回転振動数：25 Hz

$q/c_1\rho = 0.8$

縦磁化保存



まとめ

1. 内部自由度のある系のcoreless vortexにおける渦芯状態を決定する手法を提唱した
2. 密度一定かつ運動エネルギーを極小化するという原理を課すことにより渦芯状態を決定できる
3. Spin-1スピノルBECのFerromagnetic相の渦に適用することにより様々な種類の渦が存在し、2次ゼーマン項を操作することでそれらを操作することができる

今後の課題

1. 他の系への応用
2. 渦の励起状態（ゴールドストーンモード）の解析

^{3}He-B相への応用

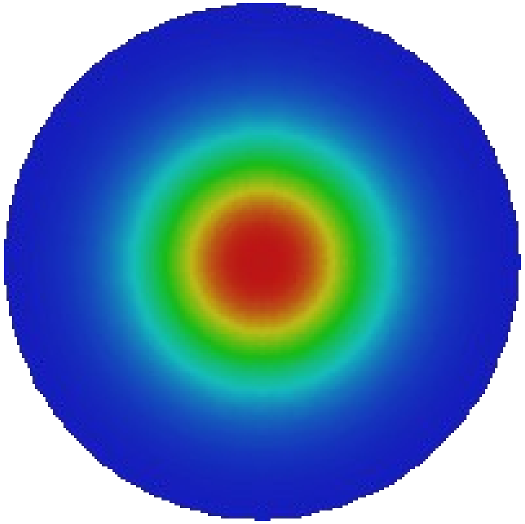
A相： $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

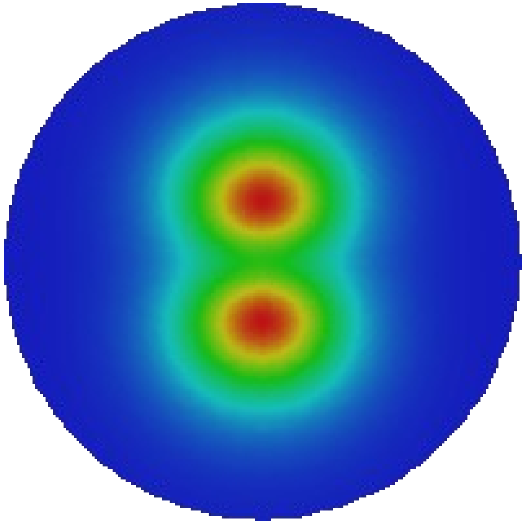
B相： $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Planar相： $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A相コア



Planar相コア



まとめ

1. 内部自由度のある系のcoreless vortexにおける渦芯状態を決定する手法を提唱した
2. 密度一定かつ運動エネルギーを極小化するという原理を課すことにより渦芯状態を決定できる
3. Spin-1スピノルBECのFerromagnetic相の渦に適用することにより様々な種類の渦が存在し、2次ゼーマン項を操作することでそれらを操作することができる

今後の課題

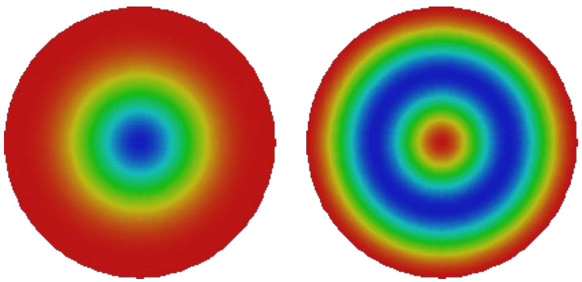
1. 他の系への応用
2. 渦の励起状態（ゴールドストーンモード）の解析

渦を含めたオーダーパラメーター空間

Ferro相のmanifold：$U(1)_{\phi}\times SO(3)_{s}\,/\,U(1)_{\phi-sz} \simeq SO(3)_{\mathrm{Ferro}}$

Polarコア波動関数：$\left(e^{i\varphi}\,h_1(r)\quad e^{i\gamma}\,h_0(r)\quad 0\right)^T$

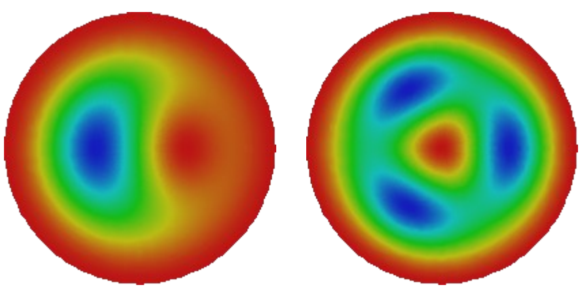
Ferroコア波動関数：$\left(e^{i\varphi}\,h_1(r)\quad 0\quad e^{i\delta}\,h_{-1}(r)\right)^T$



$SO(3)_{\mathrm{Ferro}}\times U(1)_{\phi-sz}$

BAコア波動関数：$\left(e^{i\varphi}\,h_1(r)\quad e^{i\gamma}\,h_0(r)\quad e^{i\delta}\,h_{-1}(r)\right)^T$

Ferroコア波動関数：$\left(e^{i\varphi}\,h_1(r)\quad e^{i(\gamma-\varphi)}\,h_0(r)\quad e^{i\delta}\,h_{-1}(r)\right)^T$



$SO(3)_{\mathrm{Ferro}}\times U(1)_{\phi-sz}\times U(1)_{\mathrm{anisotropy}}$

Localized Goldstone modeの存在