3次元$O(2)$模型の相秩序化ダイナミクスにおける臨界緩和、動的緩和および有限サイズスケーリング

東大院総合文化・パリ第6大
小林未知数・Leticia F. Cugliandolo

2012年3月27日　日本物理学会第67回年次大会

発表内容

1. イントロダクション：相秩序化過程とトポロジカル欠陥
2. 模型：3次元$O(2)$線型シグマモデル
3. 結果：秩序化過程および有限クエンチ・有限サイズ効果に対するスケーリング
4. まとめと今後の目標

相秩序化過程とトポロジカル欠陥

高温・無秩序相から低温・秩序相へのquench dynamics

- 平衡状態の転移が2次転移（臨界状態が存在する）
- 秩序相のオーダーパラメーターが非保存
- 秩序相の励起状態としてトポロジカル欠陥が存在する

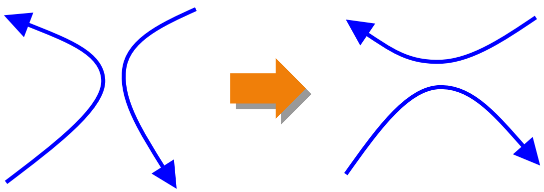
→ダイナミクスにおいて臨界状態が自発的に形成される。

トポロジカル欠陥が線欠陥となるような系を考える：
オーダーパラメーターの自由度：$SO(2) \sqsubset U(1)$

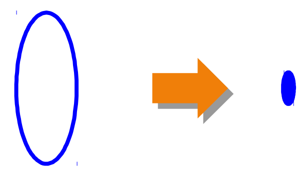
液体^{4}He・スカラーBEC・XYスピン系
（nematic液晶は異なる自由度）

相秩序化過程とトポロジカル欠陥

相秩序化ダイナミクスはトポロジカル欠陥のダイナミクスによって支配される（減衰が最も遅い）



局所対消滅（再結合）



リングの自己消滅

相秩序化ダイナミクスにおけるトポロジカル欠陥の減衰過程は限られている

臨界状態の自発的生成

A. Bray, Adv, Phys. **43**, 357 (1994)
T. Ohta, D. Jasnow, and K. Kawasaki, Phys. Rev. Lett. **49**, 1223 (1982)

動的相関長：$R(t) \propto t^{1/2}$

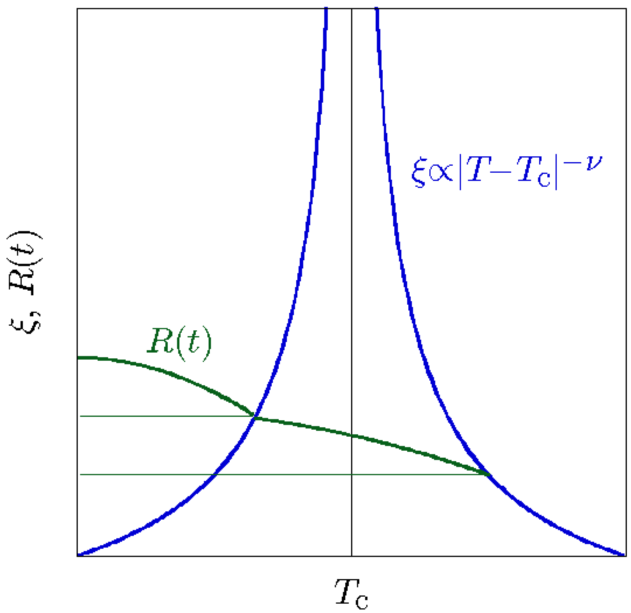
$$S(k,t) = \langle \phi(k)\phi(-k) \rangle = R^d(t) g[kR(t)]$$

$R(t)$はトポロジカル欠陥の平均的な距離¬に相当する

$$\ell \simeq \sqrt{V/L}$$

L : total length of line defects

有限速度quenchへの拡張



温度Tの時間依存性を考える

→平衡状態の相関長ξや緩和時間τ_{e}も時間依存

$$T(t) = T_{\mathrm{c}}\,(1 - t/\tau_{\mathrm{Q}})$$

τ_{Q}：quench時間

$\tau_{\mathrm{e}} = \tau_{\mathrm{Q}}$となる時間を$=: t_{\mathrm{e}}$として

- $t < -t_{\mathrm{e}}$：平衡状態への緩和が追いつく：$R(t) \sim \xi(T(t))$
- $t > -t_{\mathrm{e}}$：緩和が追いつかず、臨界緩和状態となる
  ：$R(t) \sim \xi(T(t))[1 - \exp\{-t/\tau_{\mathrm{e}}(T(t))\}]$
- $t > t_{\mathrm{e}}$：トポロジカル欠陥による相秩序化過程：$R(t) \propto t^{1/2}$

スケーリング仮説

一連のダイナミクスを特徴づけるスケーリング仮説：
「$R(t)$は平衡状態の値$\xi(T(t))$, $\tau_{\mathrm{e}}(T(t))$の値によって決まる」

$$R(t) = \xi(T(t)) f\left(\frac{t}{\tau_{\mathrm{e}}(T(t))}\right) = \xi(T(t)) f\left(\frac{t}{\xi^z(T(t))}\right) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \ll -1 \\ x^{1/2} & x \gg 1 \end{cases}$$

有限サイズ効果に対する仮説：
「$R(t)$はξ, τ_{e}のL依存性を通してのみLに依存する」

$$R(t,L) = \xi(T(t),L) f\left(\frac{t}{\xi^z(T(t),L)}, \frac{L}{\xi(T(t),L)}\right) = \xi(T(t),L) g\left(\frac{t}{\xi^z(T(t),L)}, \frac{t}{L^z}\right)$$

$$\to \frac{R(t,L)}{\xi(T(t),L)} = \tilde{g}\left(\frac{t}{\xi^z(T(t),L)}\right) \quad \text{for } \tau_{\mathrm{Q}} = \alpha L^z$$

一連のスケーリング仮説が正しいかどうか具体的に3次元$O(2)$線型シグマ模型を用いて検証する

3次元$O(2)$線型シグマ模型

$$\mathcal{H}=\int dx\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}+\frac{c_0}{2}\nabla\boldsymbol{\phi}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}+\frac{c_1}{4}\left\{\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}-1\right\}^2\right] \quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2) \quad \boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2)$$

時間発展はランジュバン方程式に従うことを要請する

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\varphi}} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\phi}}-\gamma\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\xi} \quad \langle\xi_i(\boldsymbol{x},t)\xi_j(\boldsymbol{y},t')\rangle=2\gamma T\delta_{i,j}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-t')$$

$$T(t)=T_{\mathrm{c}}\left(1-t/\tau_{\mathrm{Q}}\right)$$

Rapid quenchに対する$t\sim 0$, $\langle\boldsymbol{\phi}\rangle\sim 0$付近の線型領域

$$\boldsymbol{\phi}\sim\boldsymbol{\phi}_0\exp(t/\tau_{\mathrm{L}}) \quad \tau_{\mathrm{L}}=1/\sqrt{c_1}$$

有限速度quench $T(t)=T_{\mathrm{c}}(1-t/\tau_{\mathrm{Q}})$に対して

- $\tau_{\mathrm{Q}}\sim\tau_{\mathrm{L}}$：$\phi$の成長よりもquenchが速いので、rapid quenchと同等
- $\tau_{\mathrm{Q}}>\tau_{\mathrm{L}}$：有限速度quenchに対するスケーリングが成立する
- τ_{Q}^ τ_{L}：quenchが遅すぎてトポロジカル欠陥が生成されない

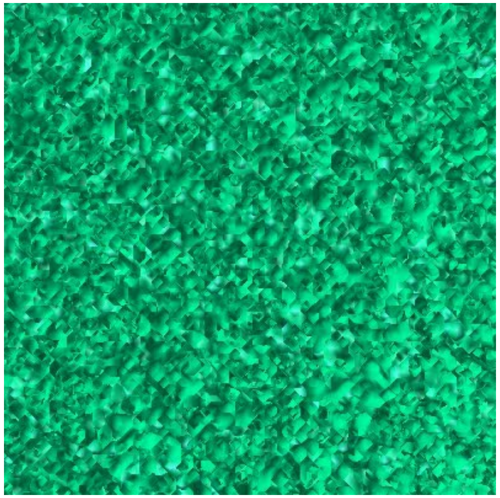
Rapid quenchによる相秩序化過程

数値計算における
相関長$R(t)$の定義

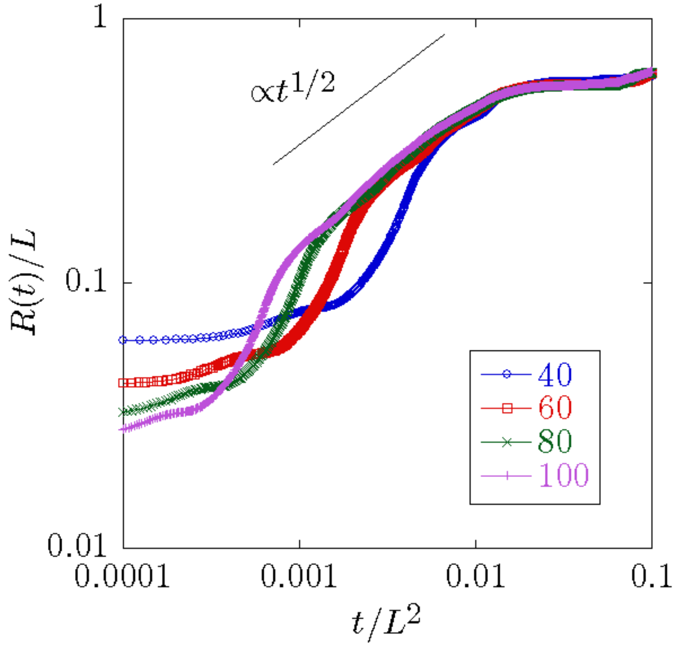
$$\frac{S(1/R)}{S(k \to 0)} = 10\% \quad S(k) = \langle \phi(k) \cdot \phi(-k) \rangle$$

rapid quenchに対する有限サイズスケーリング $\frac{R(t)}{L} = h\left(\frac{t}{L^2}\right)$

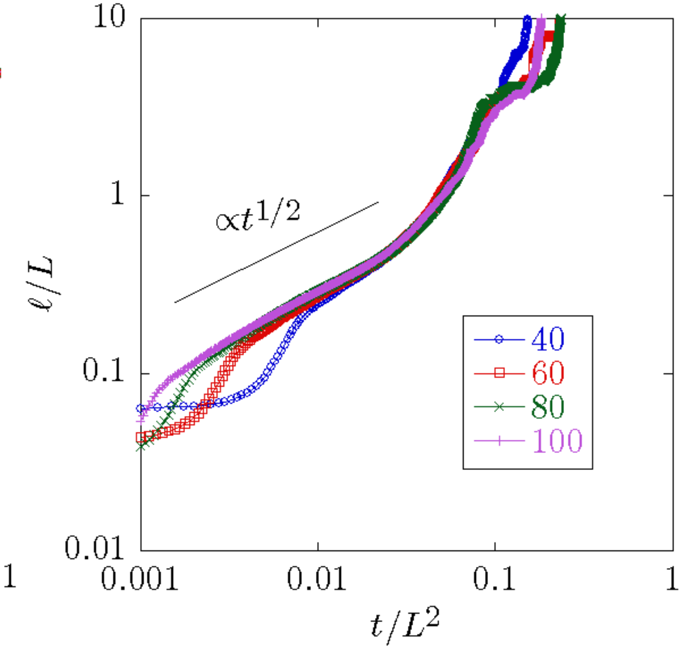
欠陥ダイナミクス



相関長の時間発展



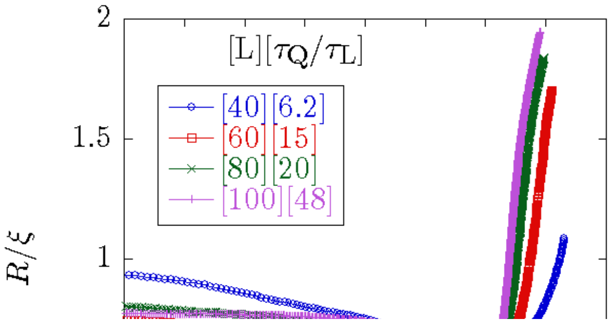
平均欠陥間距離の時間発展



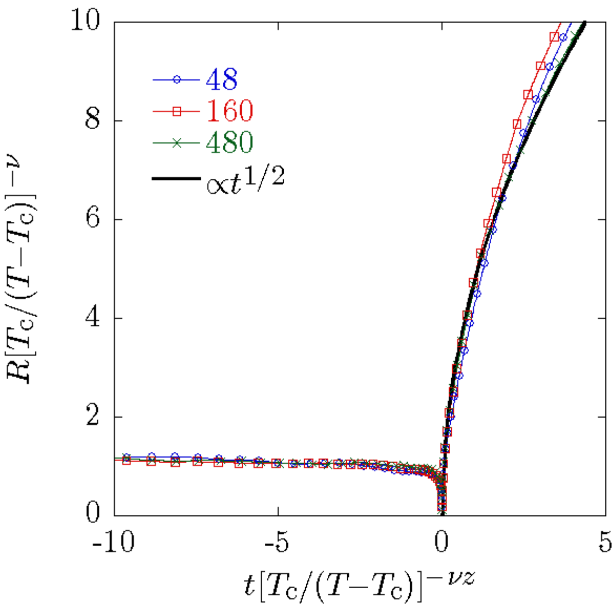
臨界状態の領域において有限サイズスケーリングが成り立っている

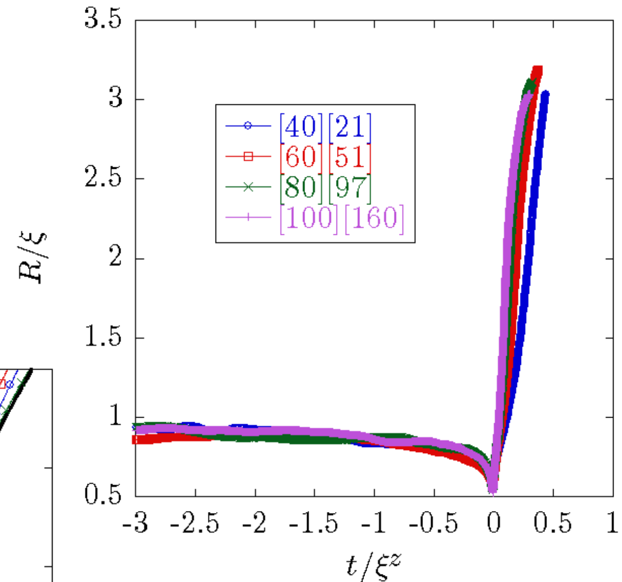
有限速度quenchに対するスケーリング

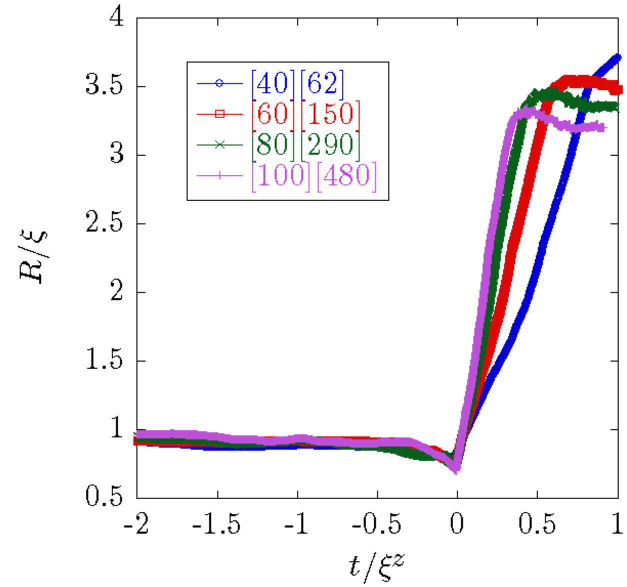
速　quench速度　遅



L=100







τ_Qが小さすぎず（rapid quench領域でない）、大きすぎない（欠陥が消えてしまわない）領域においてスケーリングが成り立っていると思われる（欠陥間距離に対してもほぼ同様に成り立っている）。

まとめ

3次元$O(2)$模型を用いて、相秩序化ダイナミクスの有限速度quench、有限サイズ効果におけるスケーリングの存在を明らかにした。

rapid quench & 無限系 $R(t) \propto t^2$

rapid quench & 有限系 $R(t, L) = Lh\left(\frac{t}{L^2}\right)$

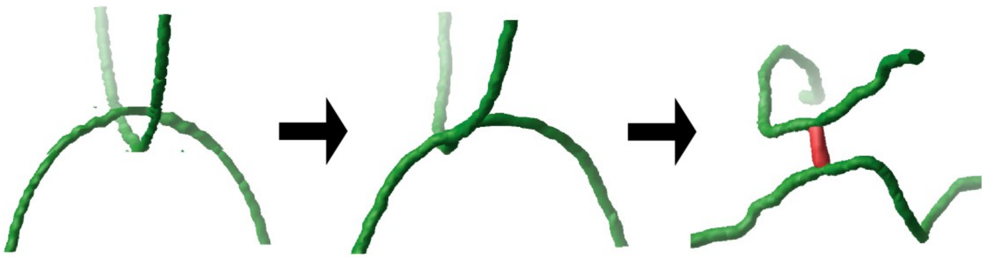
有限速度quench & 無限系 $R(t) = \xi(T(t))f\left(\frac{t}{\xi^z(T(t))}\right)$

有限速度quench & 有限系 $R(t, L) = \xi(T(t), L)g\left(\frac{t}{\xi^z(T(t), L)}, \frac{t}{L^z}\right)$

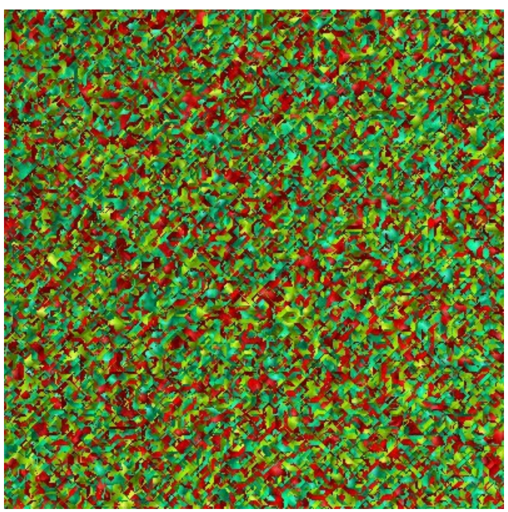
$$\to \xi(T(t), L)\tilde{g}\left(\frac{t}{\xi^z(T(t), L)}\right)$$ for $\tau_{\mathrm{Q}} = \alpha L^z$

今後の課題

1. 超流動ヘリウム、冷却原子気体BECにおける実験と比較するべく有限温度Gross-Pitaevskii方程式で同様の計算を行う。
2. 非可換な欠陥が存在する場合に拡張する。



非可換欠陥の衝突ダイナミクス

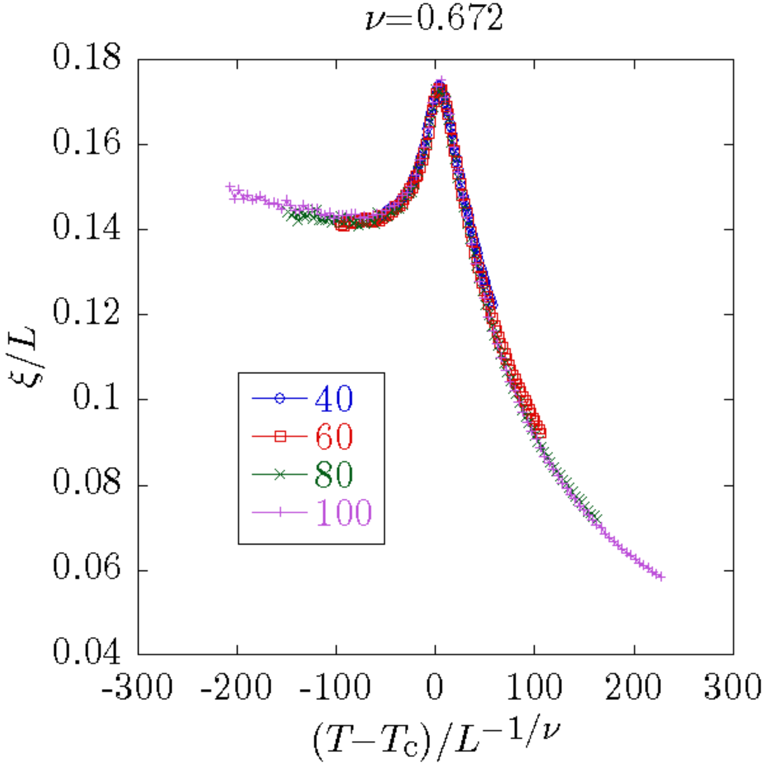


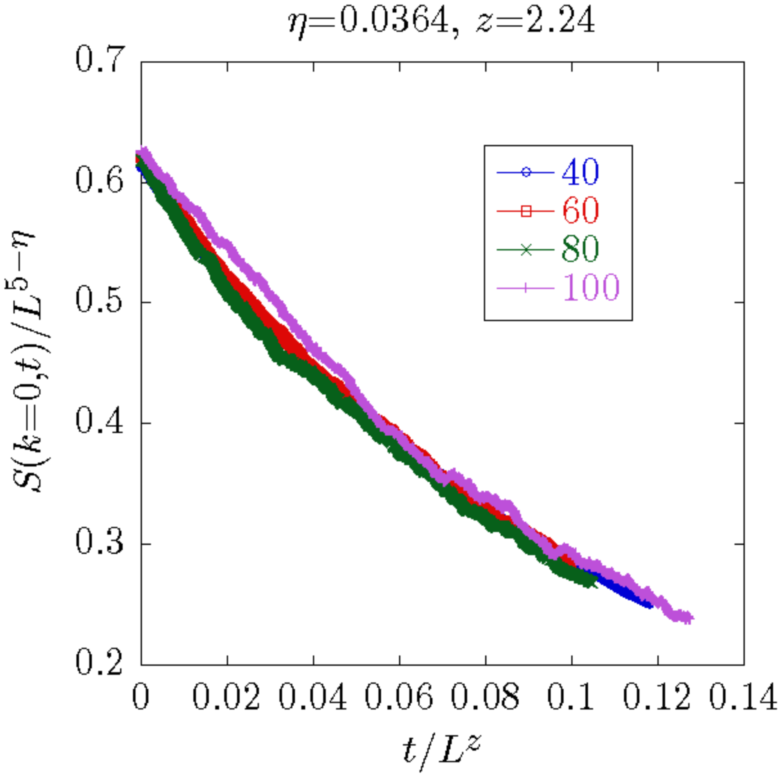
平衡状態の臨界指数

G/H	type	β	γ	ν	η	z
$SO(2)$	Abelian	0.35	1.3	0.67	0.036	2.24
$[SO(2)]^4$	Abelian	0.40	1.7	0.83	-0.04	?
$SU(2)/D_4^*$	non-Abelian	0.35	1.4	0.70	0.0	?
mean field	–	1/2	1	1/2	0	1

有限速度quenchに対するスケーリング

平衡状態における相関長、緩和時間の決定

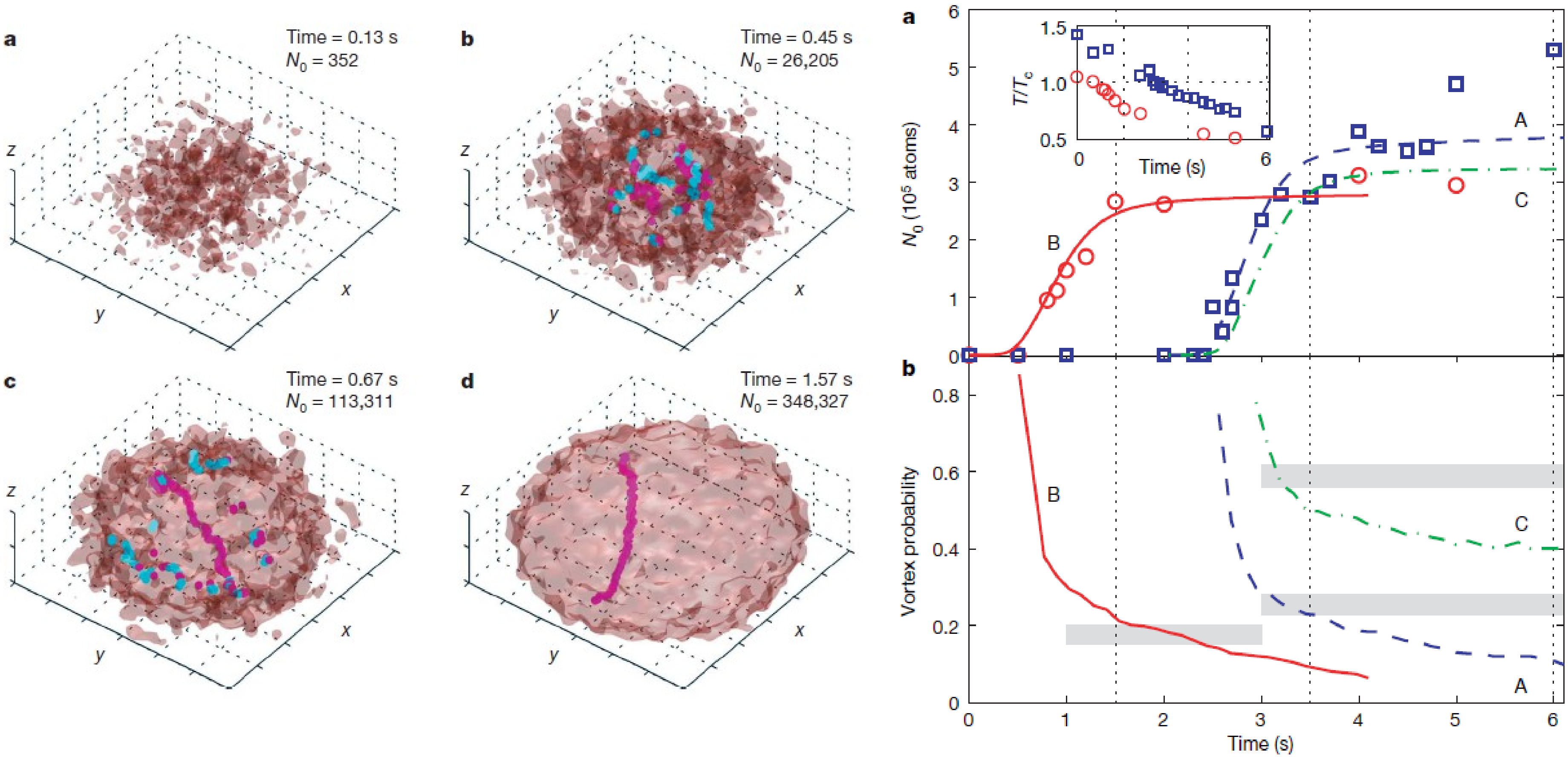




$$\frac{S(k \to 0, t)}{L^{5-\eta}} = g\left(\frac{t}{L^z}\right) \qquad S(k,t) = \langle \phi(k,0)\phi(-k,t) \rangle$$

冷却原子BECにおけるquench実験

C. N. Weiler *et al.*, Nature **455**, 948 (2008)



3次元$O(2)$模型の相秩序化過程における臨界緩和、動的緩和および有限サイズスケーリング