

2次元スピノル・ボース原子気体における 量子渦とKosterlitz-Thouless転移の 関係

京都大学 小林 未知数

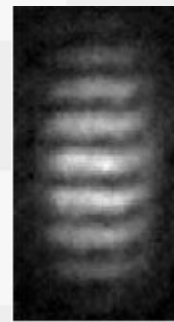
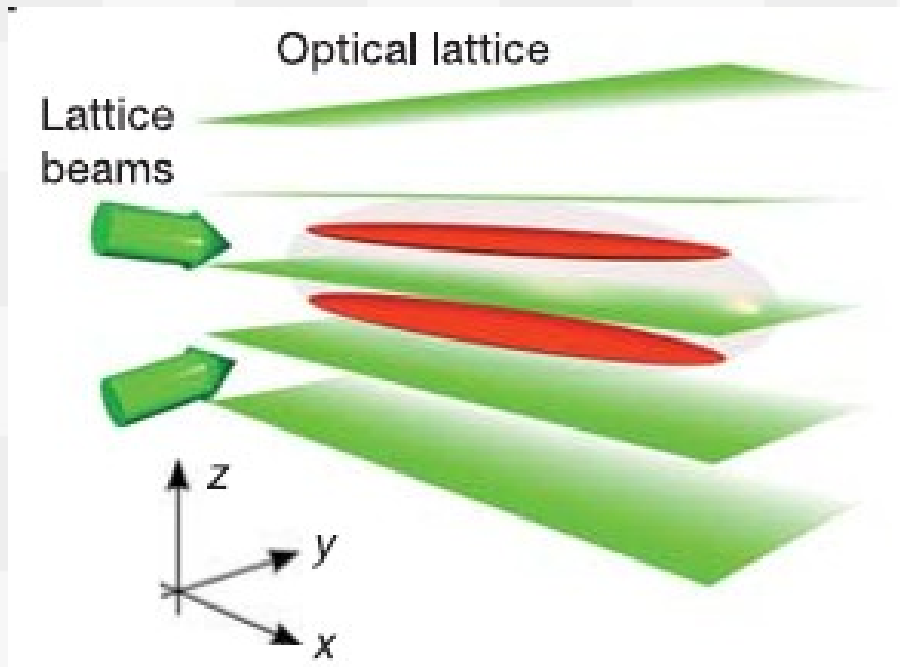
- 擬2次元冷却原子気体のKosterlitz-Thouless転移
- スピノル・ボース凝縮と渦のトポロジー
- 数値計算結果
- まとめ

2015年9月16日 日本物理学会2015年秋季大会

擬二次元冷却原子気体の Kosterlitz-Thouless転移

冷却原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移の観測

一次元方向にレーザーによる周期ポテンシャルを作り、
原子を閉じ込めることで、二次元的な原子気体集団を作る
⇒トラップから開放することで、干渉させる



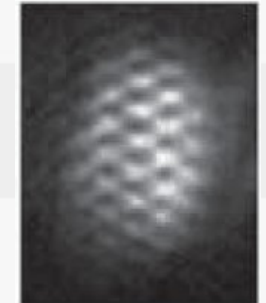
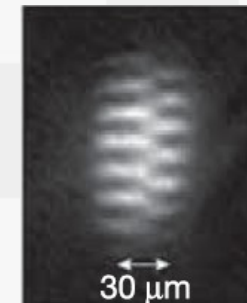
温度が低いとき: 原子波の
(普通の) 干渉縞



フォノン



温度上昇



量子渦

Nature **441**, 1118 (2006)

スピン自由度を持つ冷却原子気体におけるKT転移を調べる

2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

スピノルボース気体と渦のトポロジ

2次元スピノルボース原子気体の ハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[\sum_{m=-1}^1 \left\{ |\nabla\psi_m|^2 + (-\mu + qm^2)|\psi_m|^2 \right\} \right. \\ \left. + : \frac{g_0}{2} \left(\sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2 \right)^2 + \frac{g_1}{2} \left(\sum_{m,m'=-1}^1 \psi_m^* \mathbf{S}_{mm'} \psi_m \right)^2 : \right]$$

2次元スピノルボース原子気体のハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[\sum_{m=-1}^1 \left\{ |\nabla\psi_m|^2 + (-\mu + \underline{qm^2})|\psi_m|^2 \right\} \right. \\ \left. + : \frac{g_0}{2} \left(\sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2 \right)^2 + \frac{g_1}{2} \left(\sum_{m,m'=-1}^1 \psi_m^* \mathbf{S}_{mm'} \psi_m \right)^2 : \right]$$

2次ゼーマン項
(1次ゼーマン項は定数なので無視)

密度

スピン密度

2次元スピノルボース原子気体のハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[\sum_{m=-1}^1 \left\{ |\nabla\psi_m|^2 + (-\mu + \underline{qm^2})|\psi_m|^2 \right\} \right. \\ \left. + : \frac{g_0}{2} \left(\sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2 \right)^2 + \frac{g_1}{2} \left(\sum_{m,m'=-1}^1 \psi_m^* \mathbf{S}_{mm'} \psi_m \right)^2 : \right]$$

2次ゼーマン項

(1次ゼーマン項は定数なので無視)

$q > 0$: 外部磁場によって実現

$q < 0$: レーザーによって実現

2次元スピノルボース原子気体のハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[\sum_{m=-1}^1 \left\{ |\nabla\psi_m|^2 + (-\mu + qm^2)|\psi_m|^2 \right\} + \frac{g_0}{2} \left(\sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2 \right)^2 + \frac{g_1}{2} \left(\sum_{m,m'=-1}^1 \psi_m^* \mathbf{S}_{mm'} \psi_m \right)^2 \right]$$

密度
スピン密度

$g_1 > 0 : {}^{23}\text{Na}$

ポーラー状態 $\psi_0 = e^{i\phi} e^{-in \cdot s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$G/H \simeq \frac{U(1)_\phi \times S_s^2}{(\mathbb{Z}_2)_{\phi+s}}$$

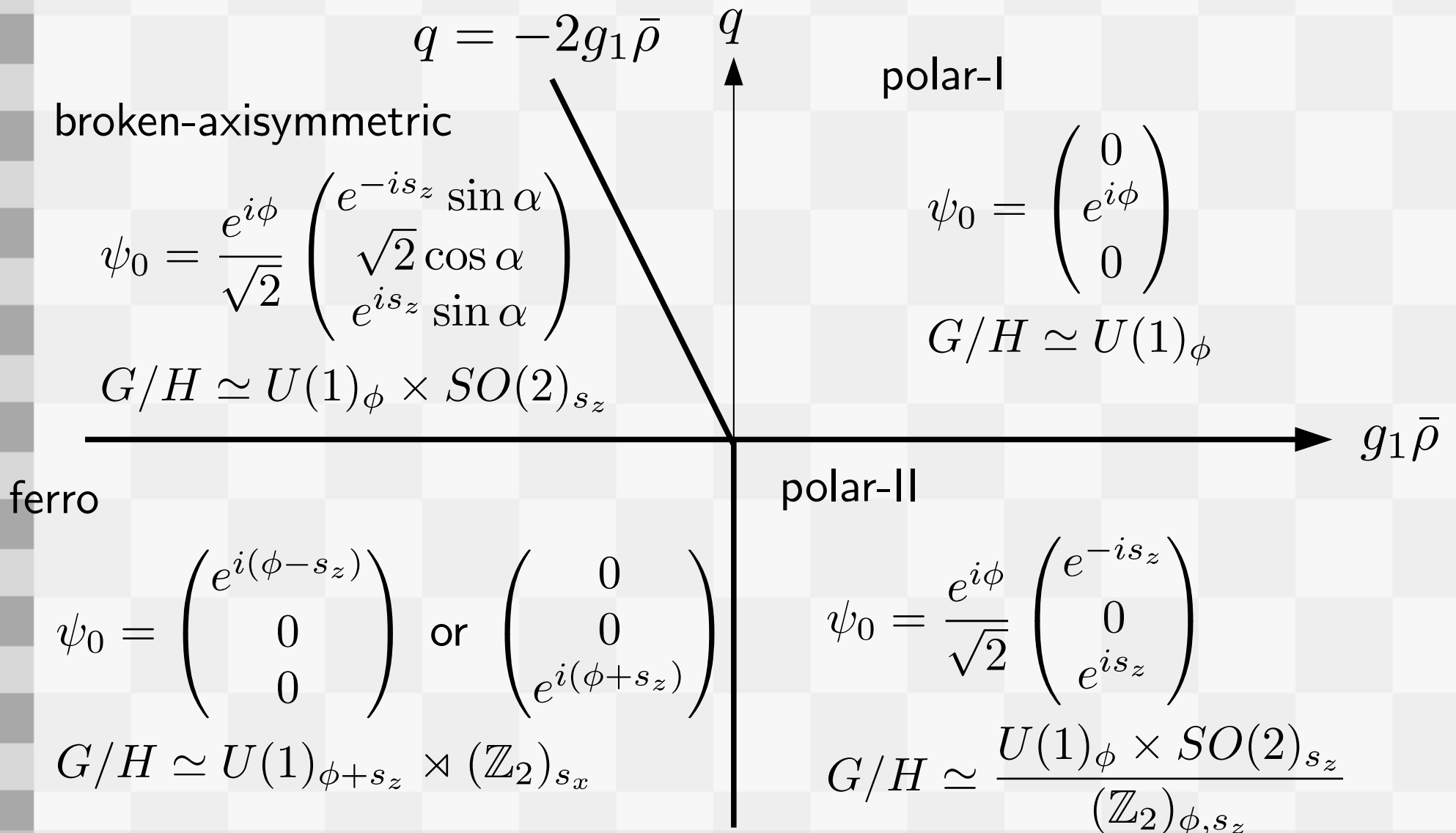
$g_1 < 0 : {}^{87}\text{Rb}$

強磁性状態 $\psi_0 = e^{i\phi} e^{-in \cdot s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$G/H \simeq SO(3)_{\phi-s}$$

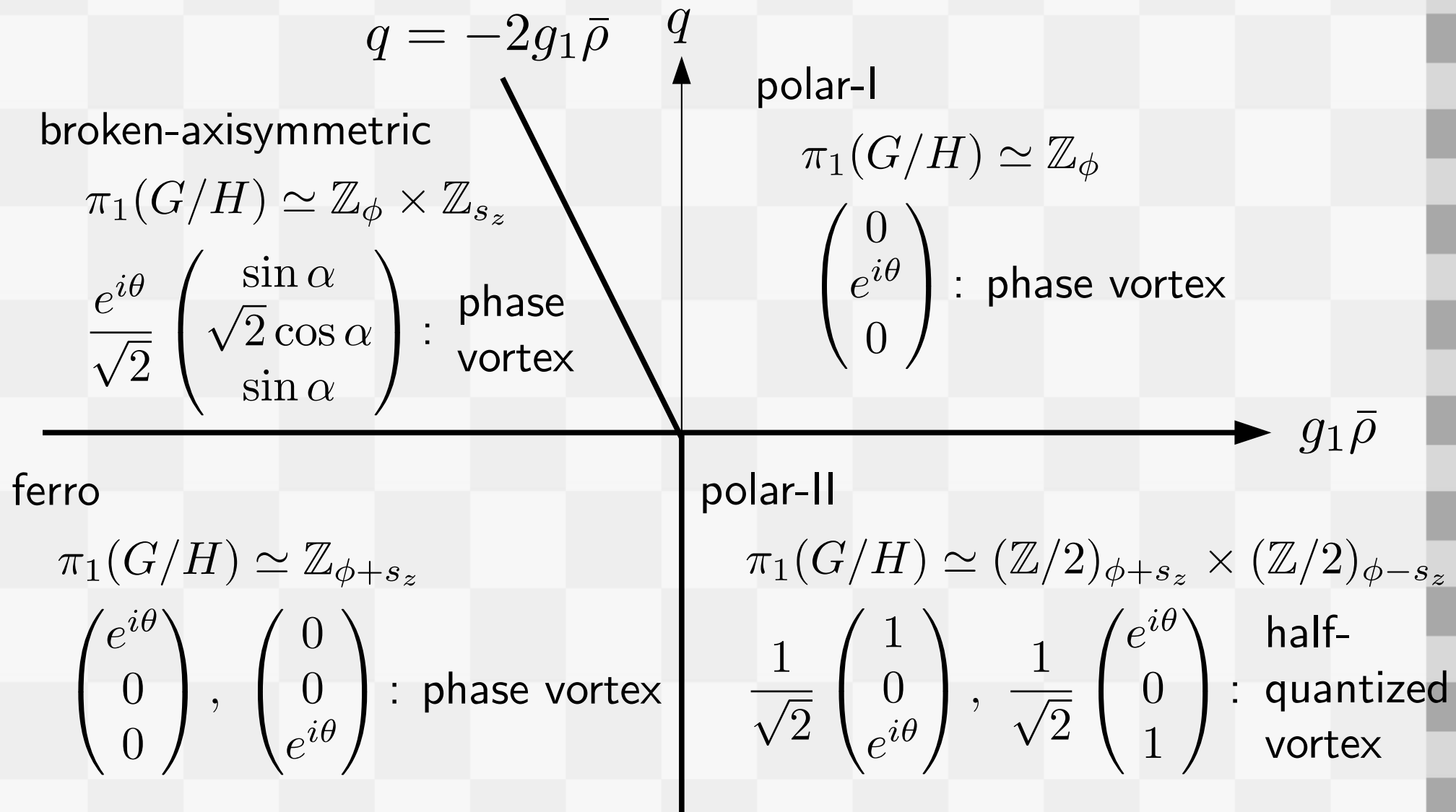
2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

基底状態 (ボース凝縮) の相図



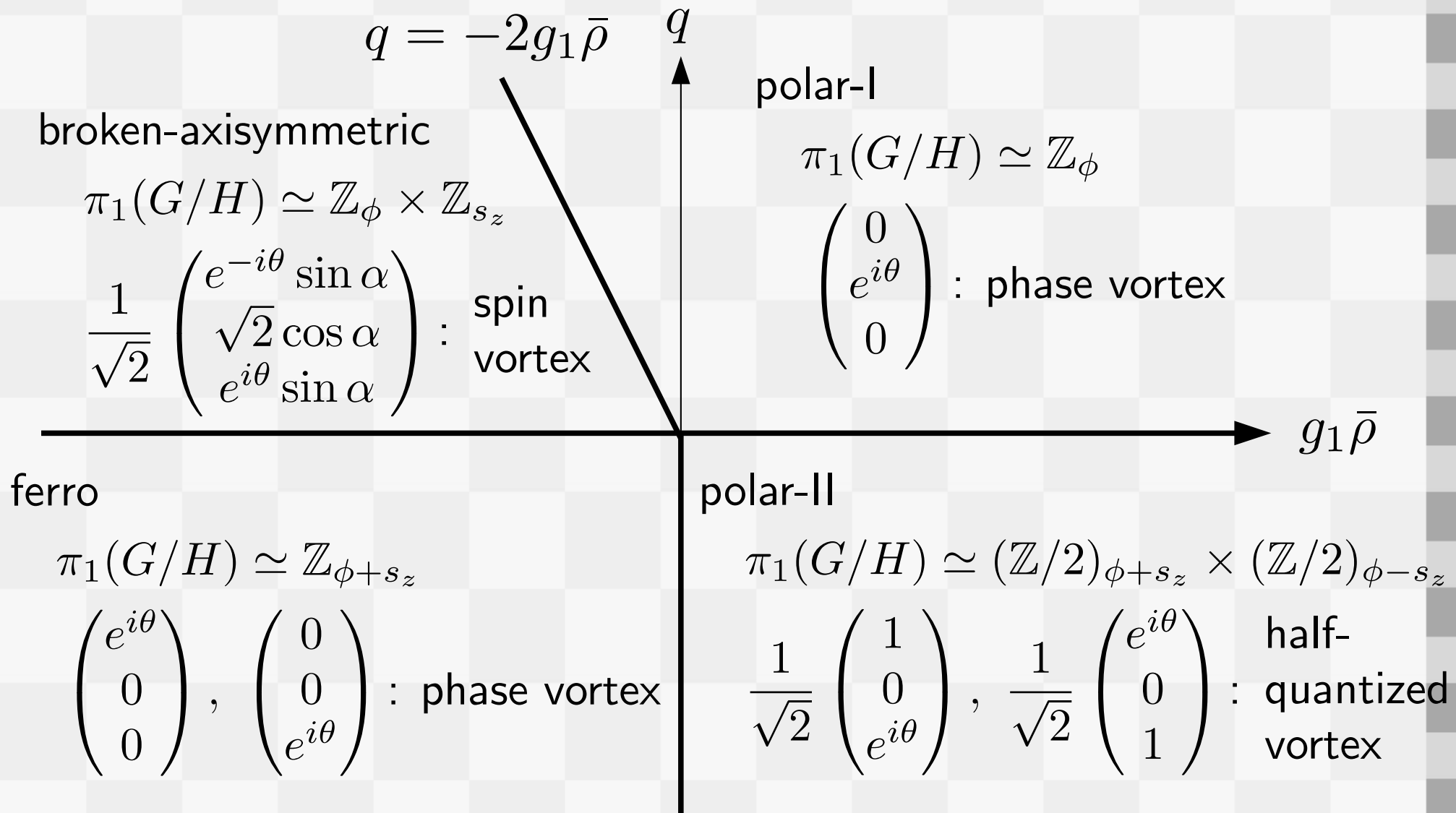
2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

トポロジカル欠陥



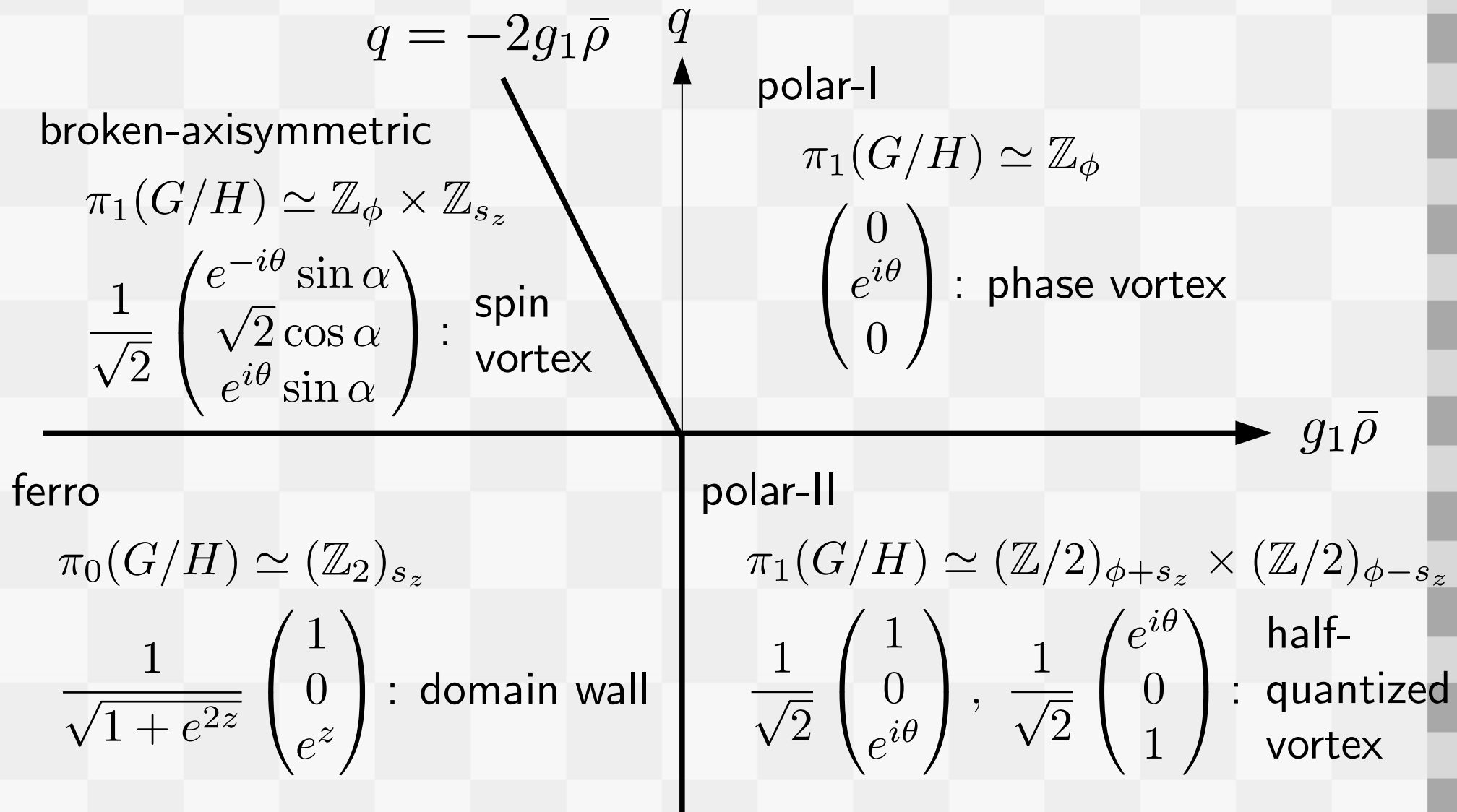
2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

トポロジカル欠陥



2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

トポロジカル欠陥



2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

数値計算

レプリカ交換経路積分Monte-Carlo法を用いて物理量の統計平均値を求める

$$\langle f \rangle = \left(\prod_{m=-1}^1 \int D\psi_m D\psi_m^* \right) f[\psi_m, \psi_m^*] e^{-H/T}$$

興味ある物理量：位相およびスピンに対する非対角長距離秩序
質量流およびスピン流に関する超流動密度

$$M_{\phi, s} = \sqrt{C_{\phi, s}(L/2)} \left\{ \begin{array}{l} C_{\phi}(r) = \left\langle \sum_{m=-1}^1 \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right\rangle \\ C_s(r) = \left\langle \sum_{m, m'=-1}^1 \psi_m^*(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{mm'} \psi_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right\rangle \end{array} \right.$$

数値計算

レプリカ交換経路積分Monte-Carlo法を用いて物理量の統計平均値を求める

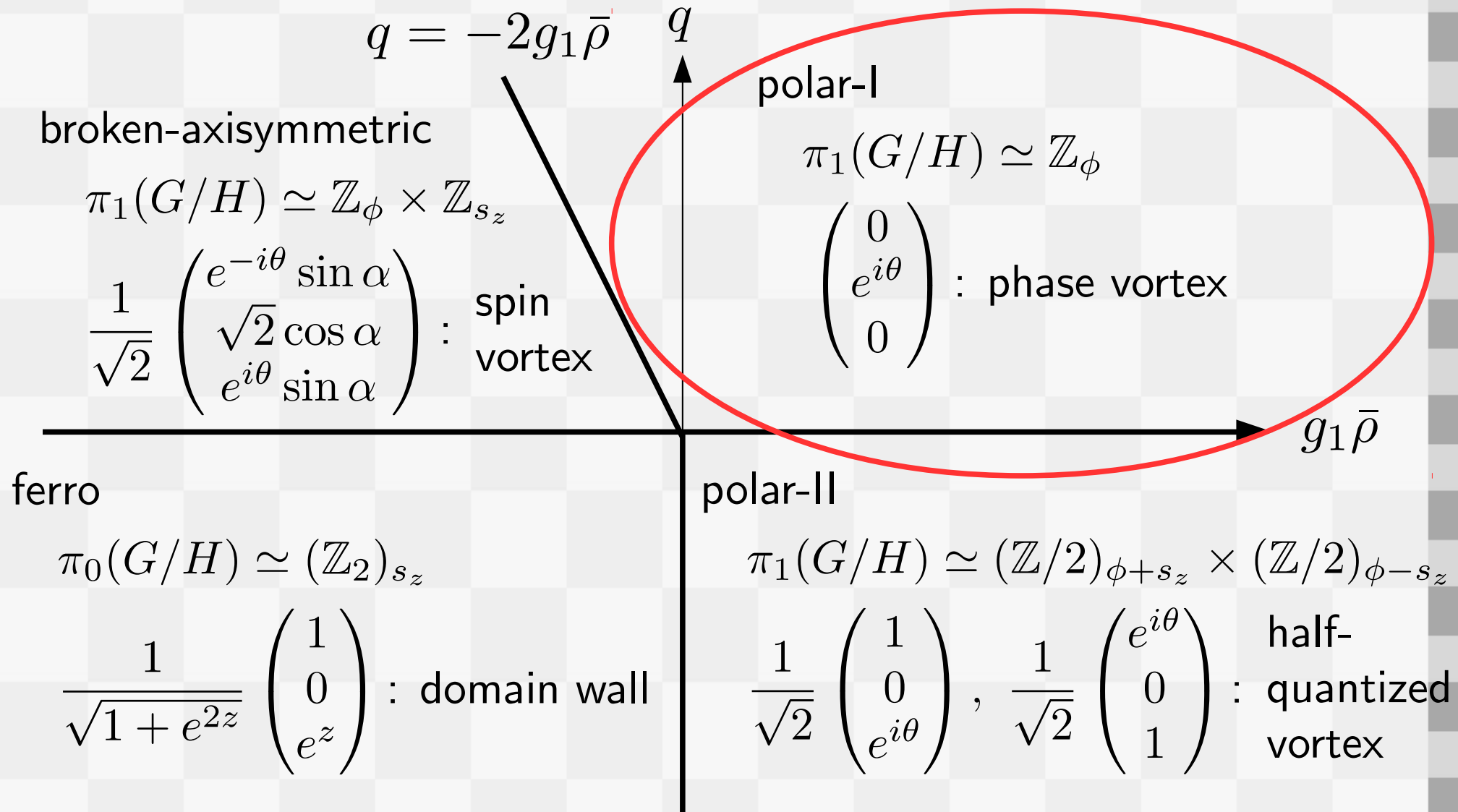
$$\langle f \rangle = \left(\prod_{m=-1}^1 \int D\psi_m D\psi_m^* \right) f[\psi_m, \psi_m^*] e^{-H/T}$$

興味ある物理量：位相およびスピンに対する非対角長距離秩序
質量流およびスピン流に関する超流動密度

$$\Upsilon_{\phi, s} = \frac{F_{\phi, s}(\Delta) - F_{\phi, s}(0)}{\Delta^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{for } \phi : \psi_m(x+L) = \psi_m(x)e^{i\Delta} \\ \text{for } s : \psi_m(x+L) = \psi_m(x)e^{is\Delta} \end{array} \right.$$
$$F_{\phi, s}(\Delta) = -T \log \langle e^{-H/T} \rangle_{\phi, s}$$

数值計算結果

polar-I

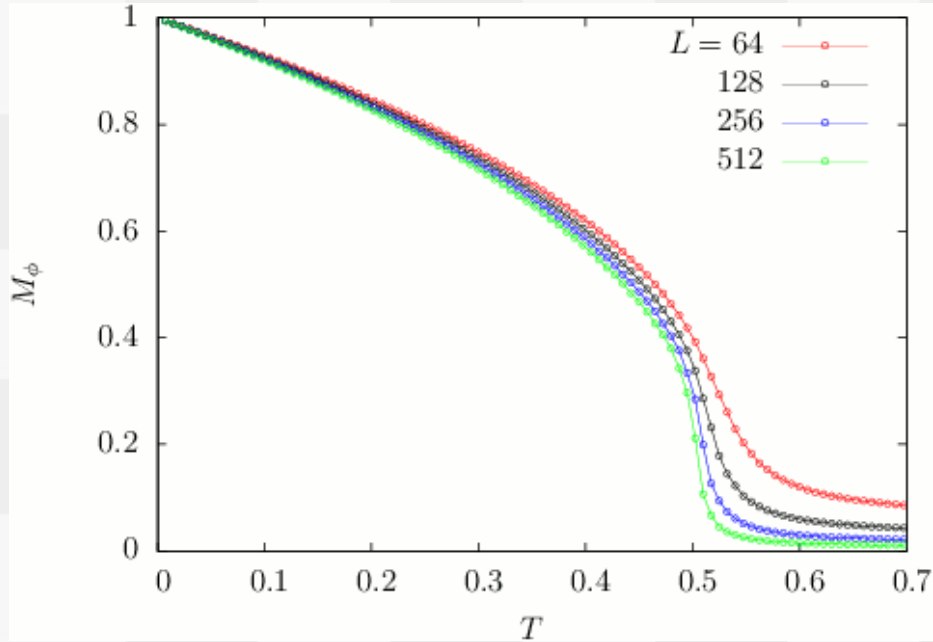


2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad G/H = U(1)_\phi \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} : \text{phase vortex}$$

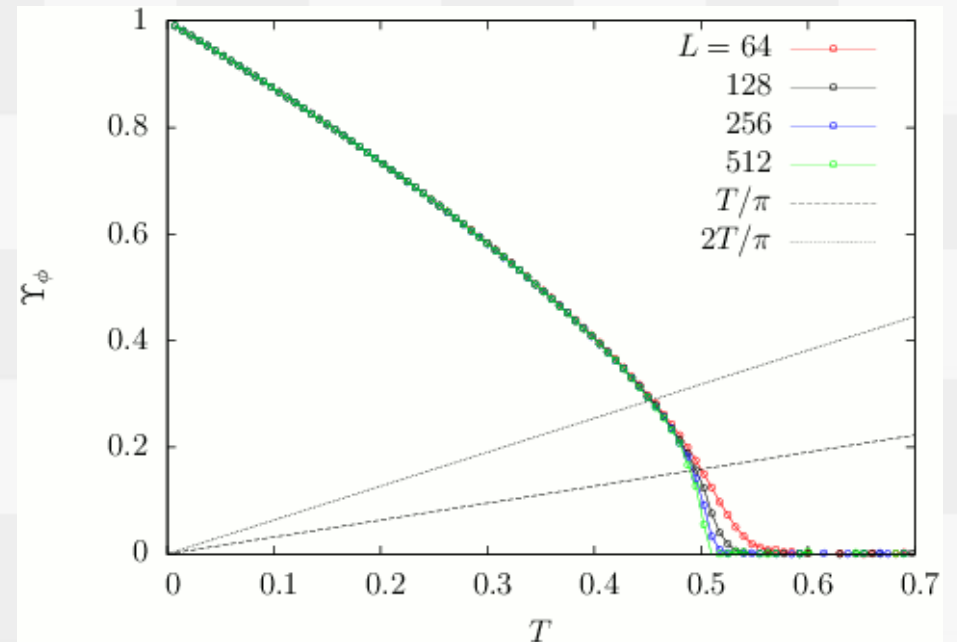
$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_\phi$$

オーダーパラメーター



あらゆる温度領域でサイズ依存
: $L \rightarrow \infty$ で消失

超流動密度

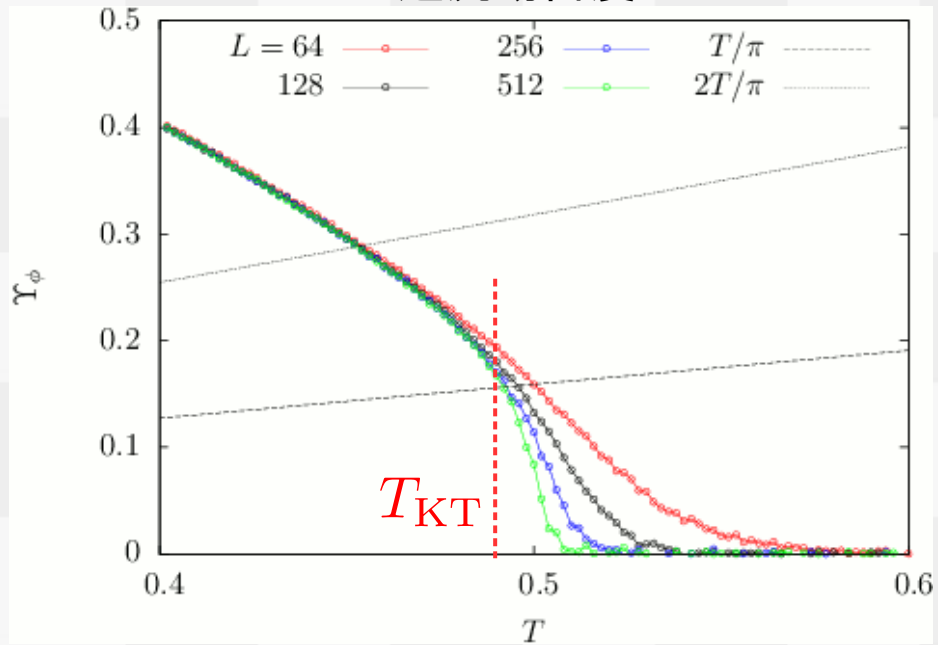


低温領域でサイズ依存しない
: $L \rightarrow \infty$ でも有限の値

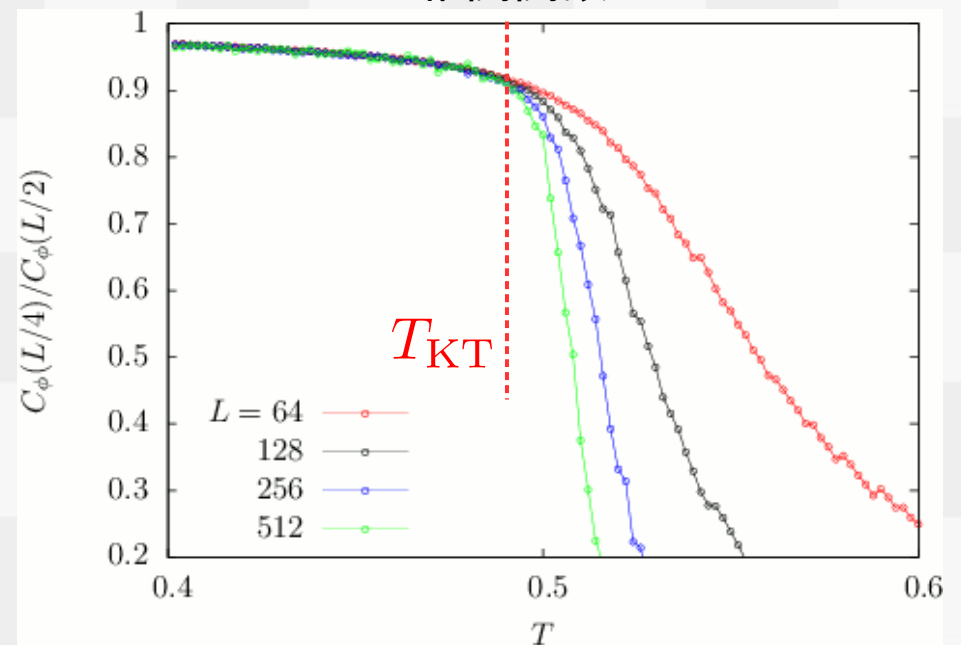
$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad G/H = U(1)_\phi \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} : \text{phase vortex}$$

$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_\phi$$

超流動密度

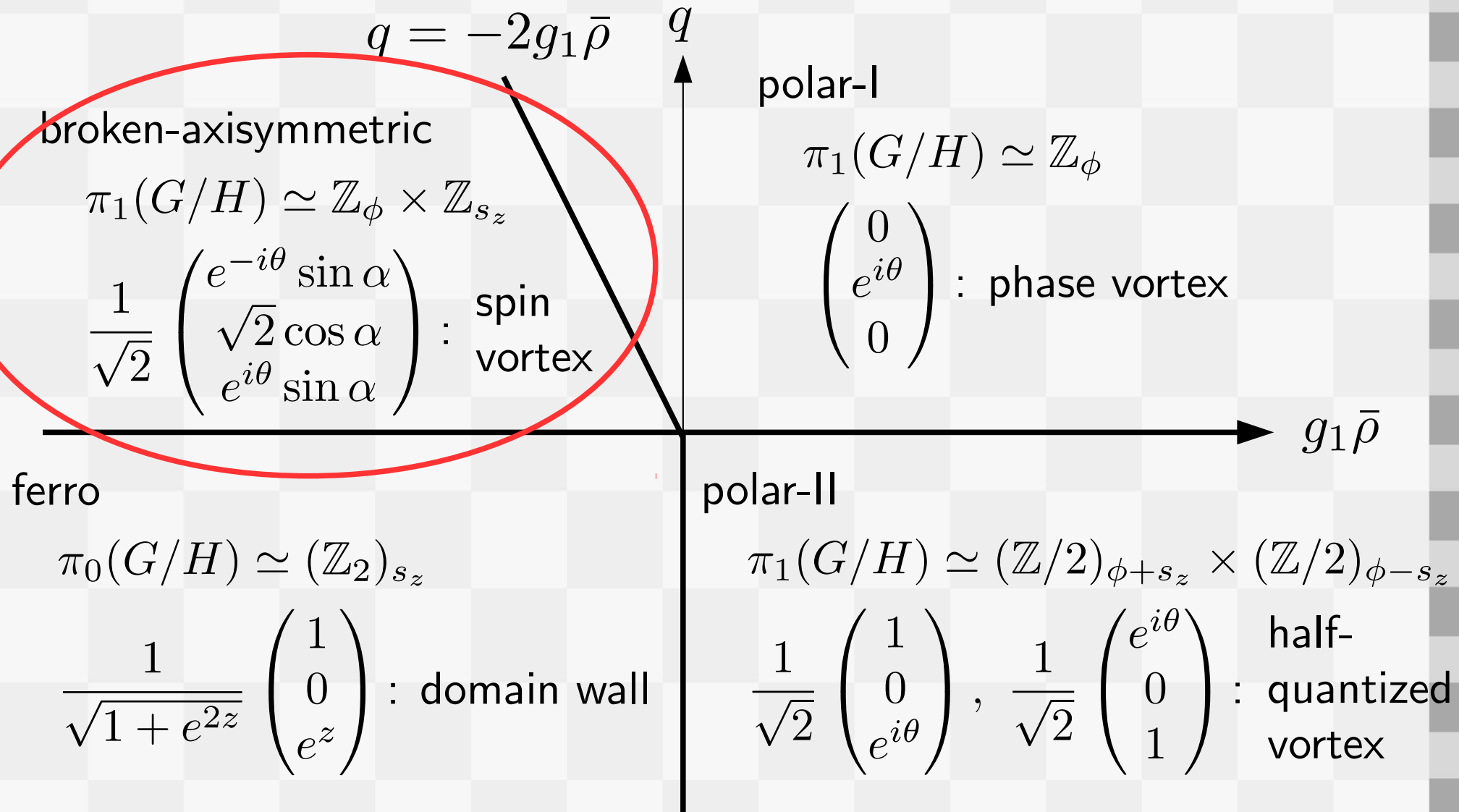


相関関数比



スカラーBECと同様のユニバーサルジャンプ $\Delta\gamma_\phi/T_{KT} \simeq 1/\pi$ が得られる

broken-axisymmetric



2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

$$\psi_0 = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-is_z} \sin \alpha \\ \sqrt{2} \cos \alpha \\ e^{is_z} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

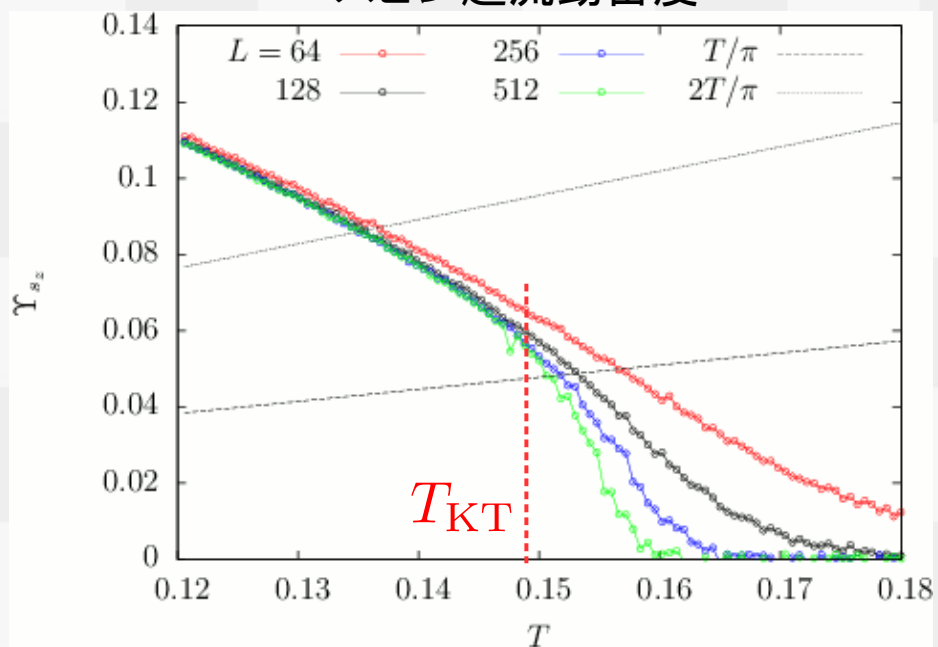
$$G/H = U(1)_\phi \times SO(2)_{s_z}$$

$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_\phi \times \mathbb{Z}_{s_z}$$

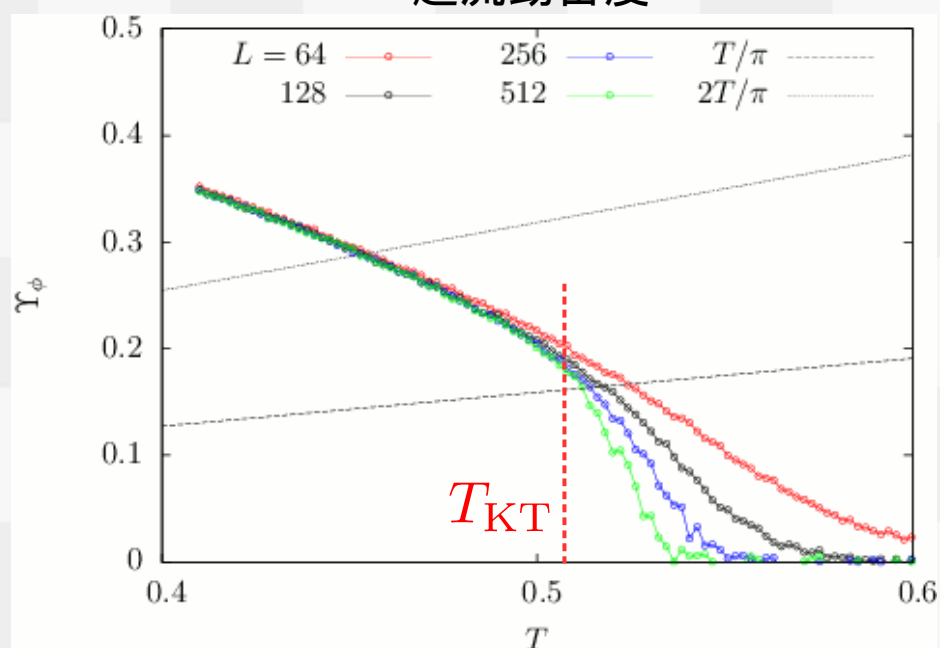
$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \sqrt{2} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} : \text{phase vortex}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \sin \alpha \\ \sqrt{2} \cos \alpha \\ e^{i\theta} \sin \alpha \end{pmatrix} : \text{spin vortex}$$

スピン超流動密度



超流動密度

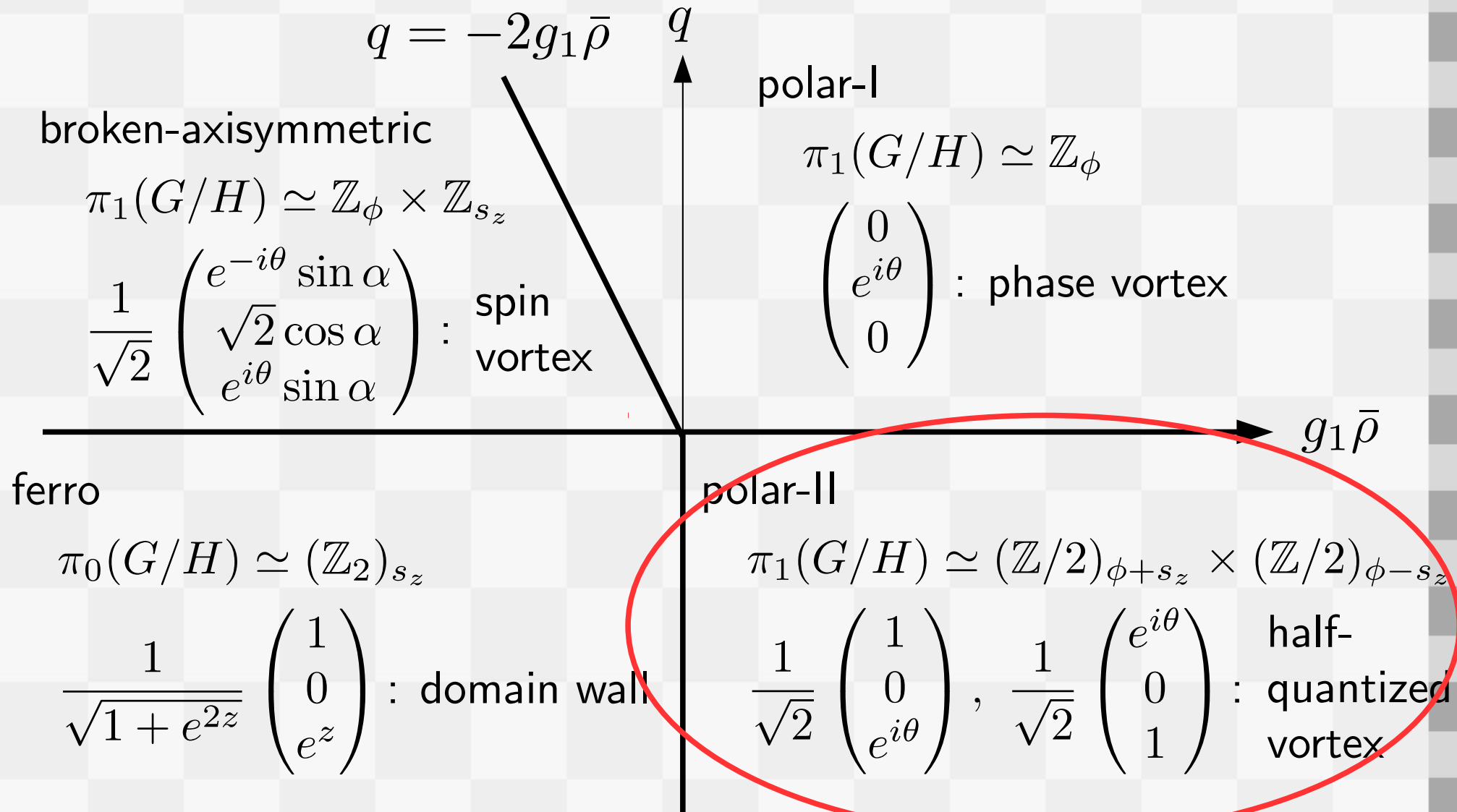


位相部分とスピン部分が独立にKT転移を起こす。

ユニバーサルジャンプはどちらも $\Delta\gamma_{\phi,s}/T_{KT} \simeq 1/\pi$ である。

2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

polar-II



2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

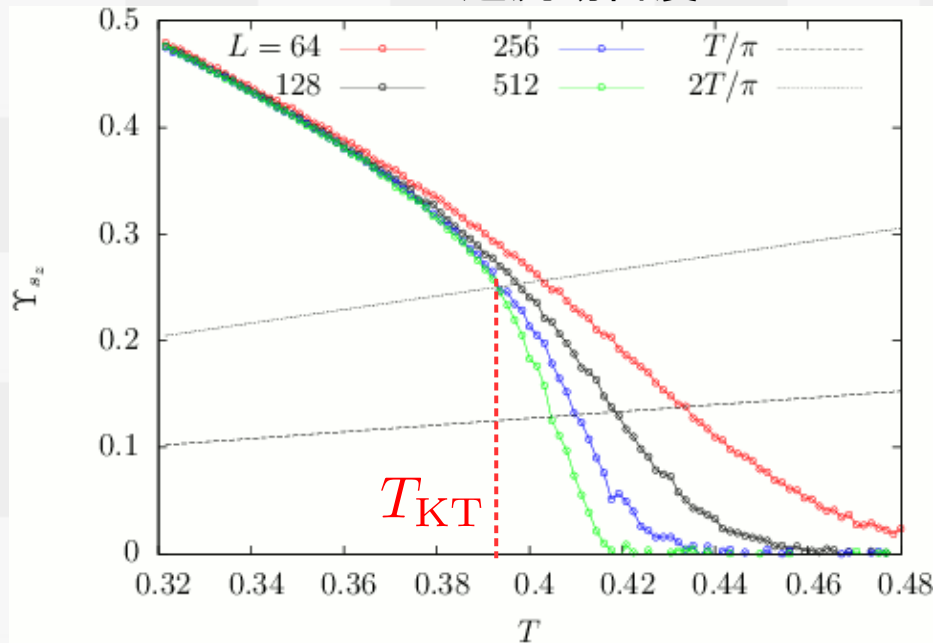
$$\psi_0 = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-is_z} \\ 0 \\ e^{is_z} \end{pmatrix}$$

$$G/H \simeq \frac{U(1)_\phi \times SO(2)_{s_z}}{(\mathbb{Z}_2)_{\phi+s_z}}$$

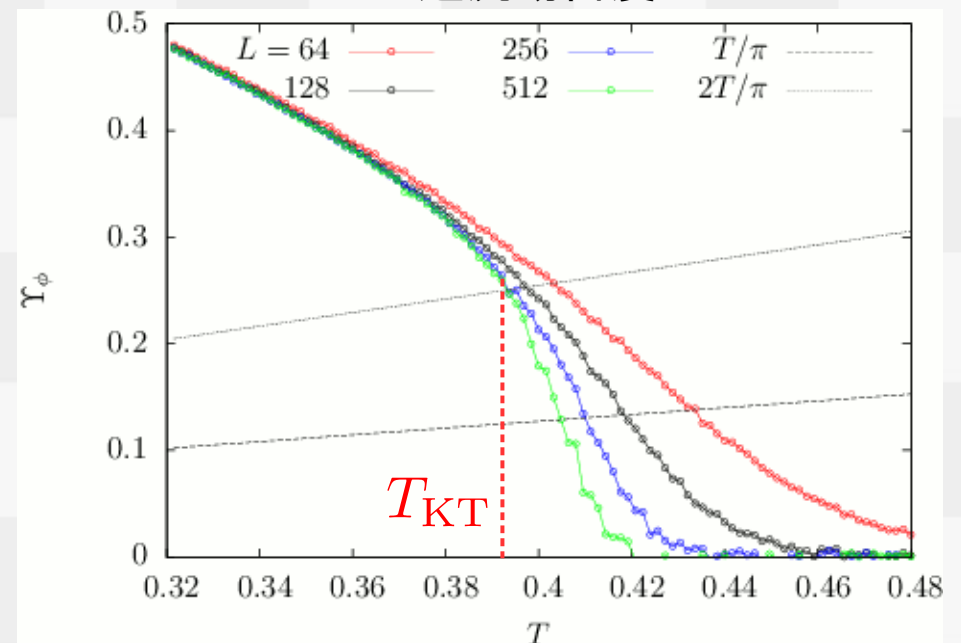
$$\pi_1(G/H) \simeq (\mathbb{Z}/2)_{\phi+s_z} \times (\mathbb{Z}/2)_{\phi-s_z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} : \text{half-quantized vortex}$$

スピン超流動密度



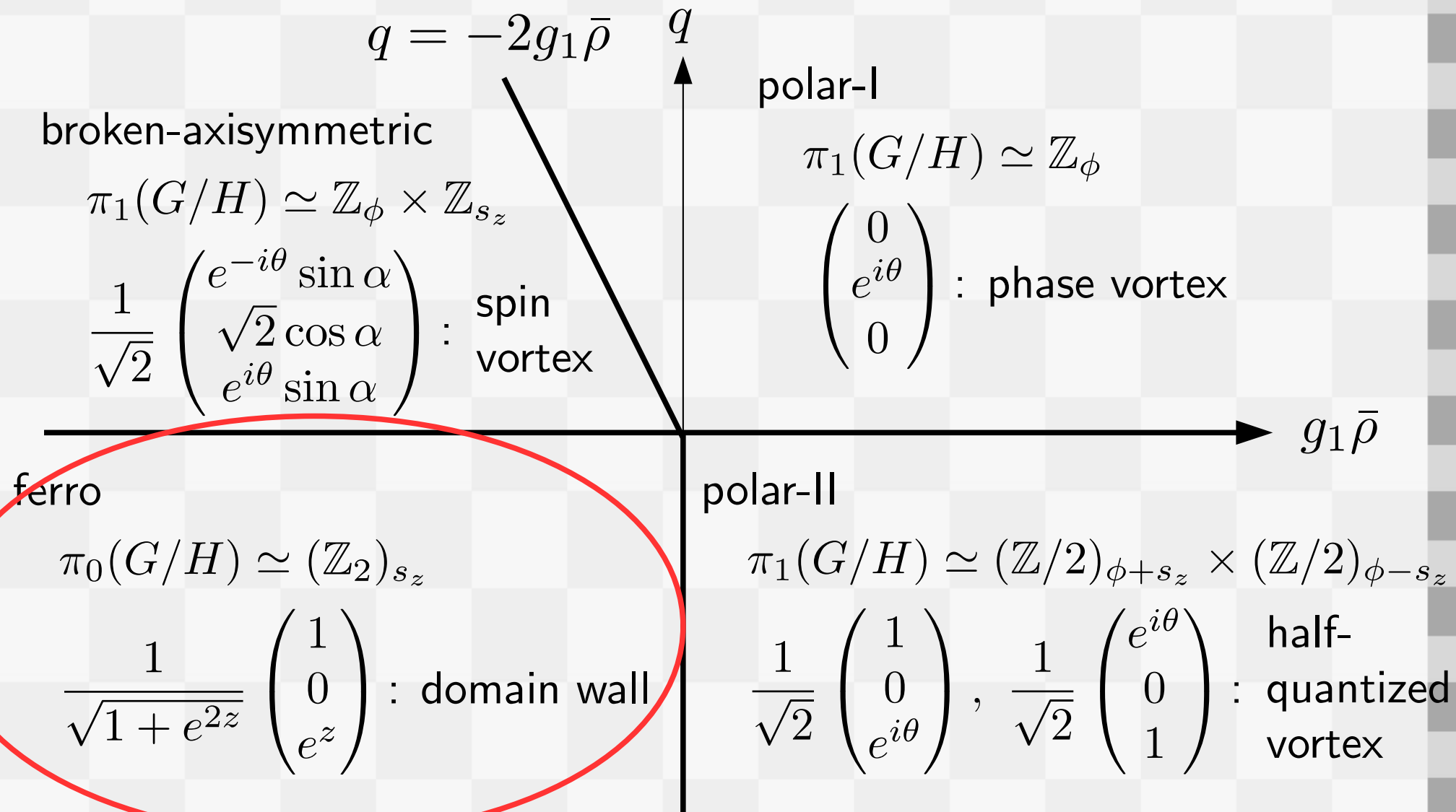
超流動密度



位相部分とスピン部分が同じ温度でKT転移を起こす。
ユニバーサルジャンプはスカラーBECの倍 $\Delta\gamma_{\phi,s}/T_{KT} \simeq 2/\pi$ である。

2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

ferro



2次元スピナル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} e^{i(\phi-s_z)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i(\phi+s_z)} \end{pmatrix}$$

$$G/H = U(1)_{\phi+s_z} \times (\mathbb{Z}_2)_{s_x}$$

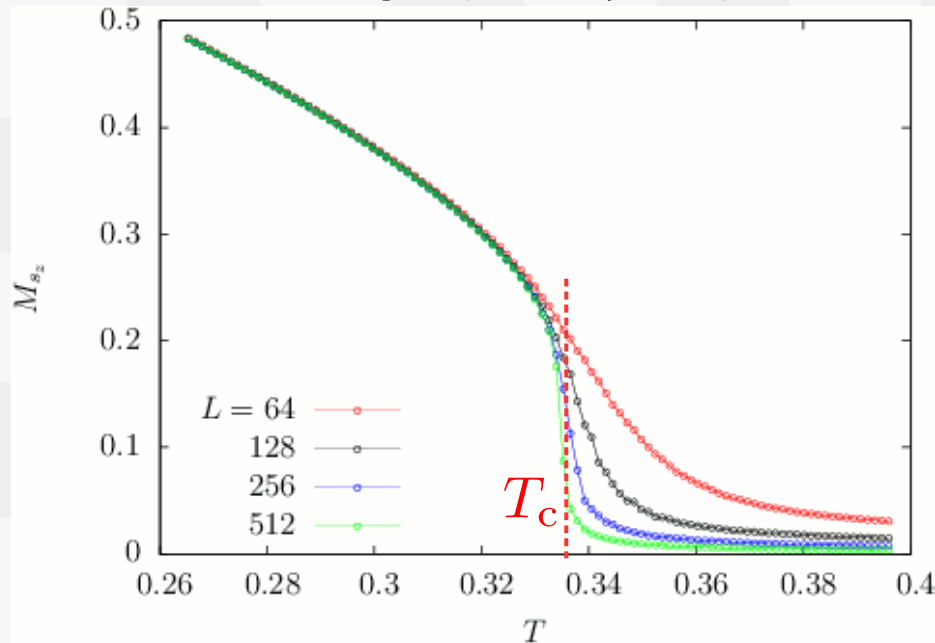
$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_{\phi+s_z}$$

$$\pi_0(G/H) \simeq (\mathbb{Z}_2)_{s_x}$$

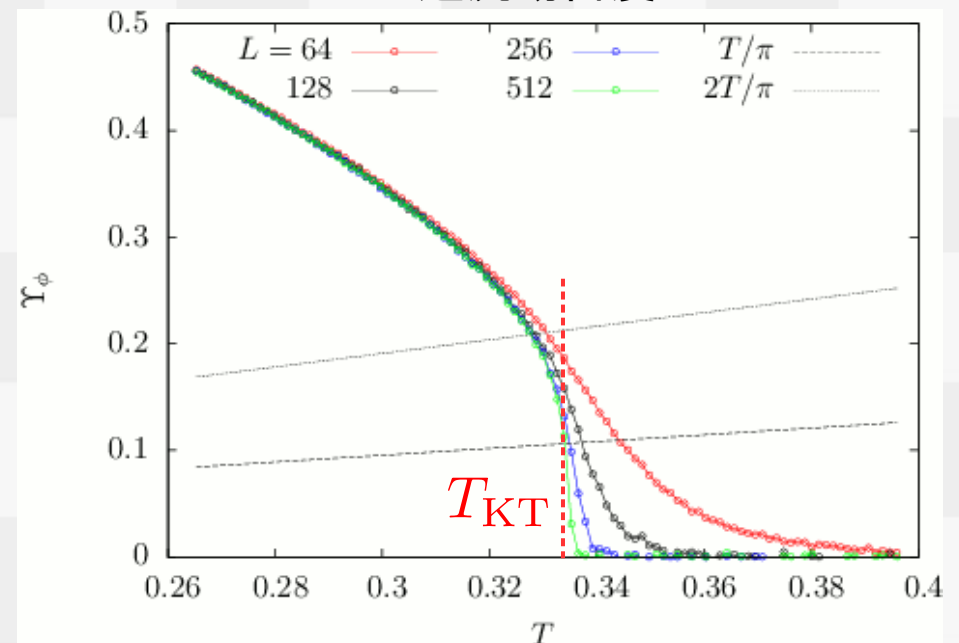
$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} : \text{phase vortex}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2z}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix} : \text{domain wall}$$

スピナーパラメーター



超流動密度

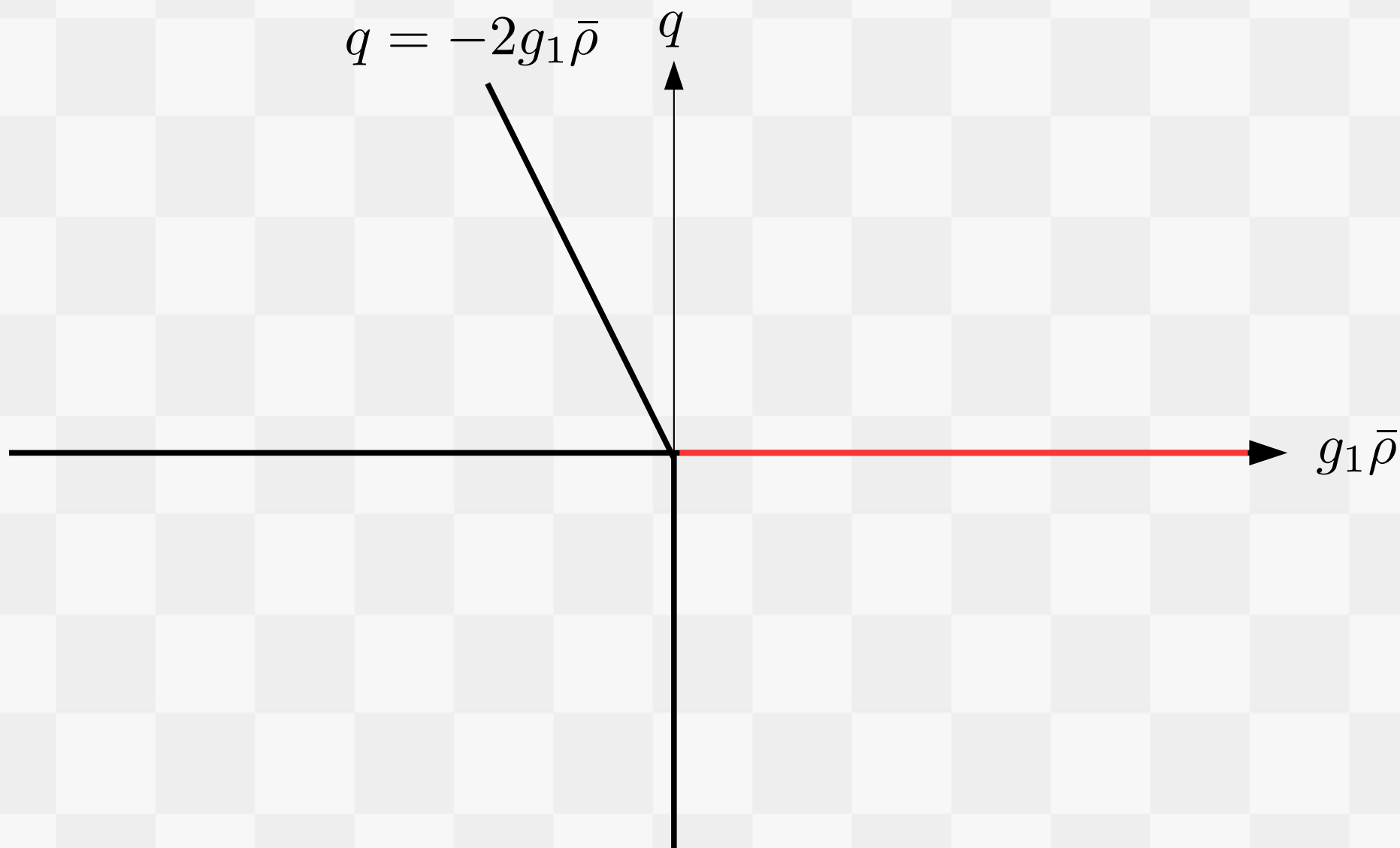


スカラーBECと同様のユニバーサルジャンプ $\Delta\Upsilon_\phi/T_{\text{KT}} \simeq 1/\pi$ が得られる

離散対称性のため、スピン部分は相転移を起こす ($T_c > T_{\text{KT}}$)。

2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

polar under zero magnetic field



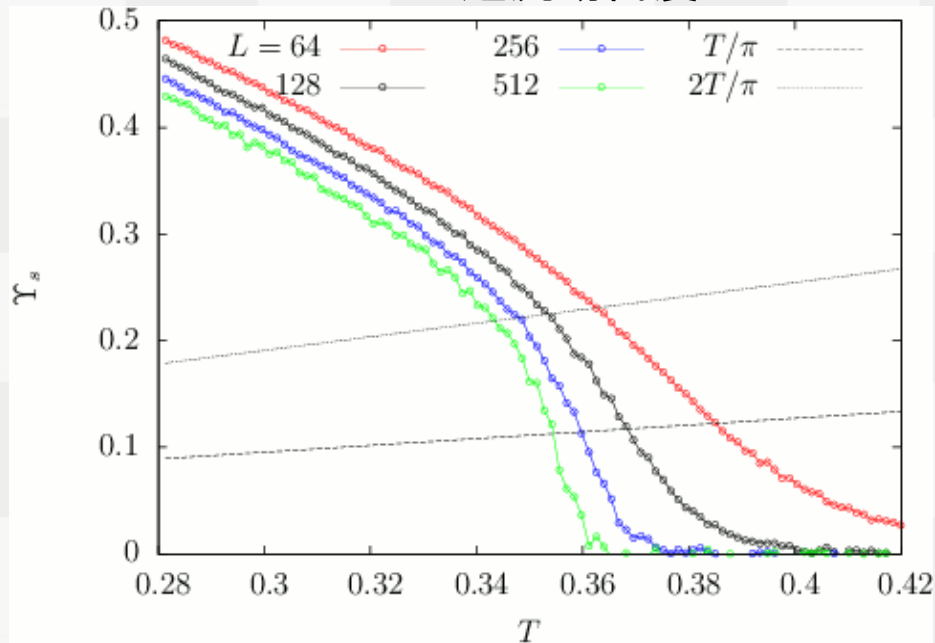
2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

$$|\psi_0\rangle = \left\{ e^{i\phi} \left(\frac{\hat{a}_0^{\dagger 2} - 2\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_{-1}^{\dagger}}{\sqrt{3}} \right) \right\}^{N/2} \quad |0\rangle: \text{singlet-pair condensate}$$

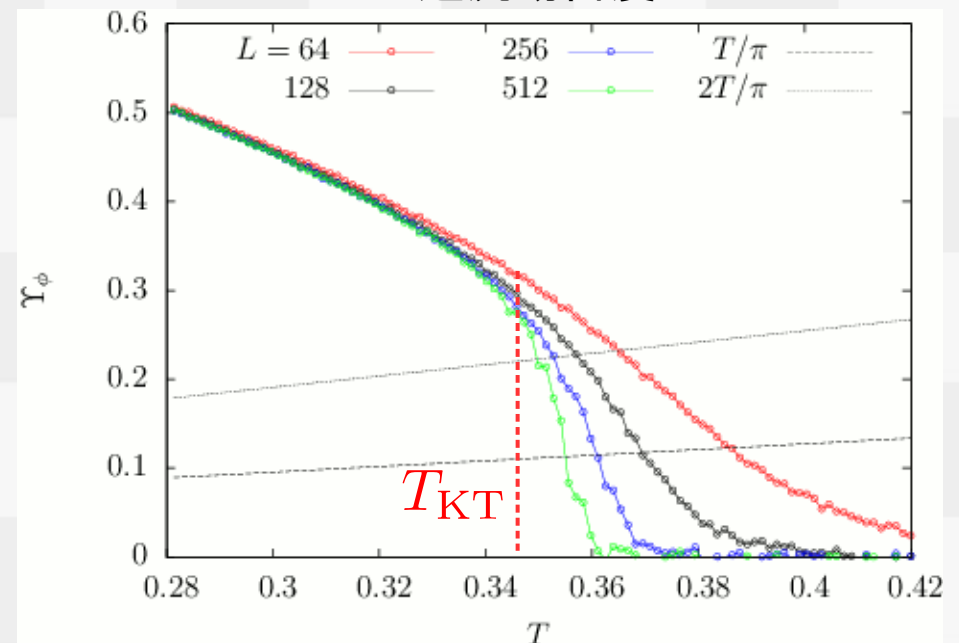
$$G/H \simeq U(1)_\phi$$

$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_\phi$$

スピン超流動密度



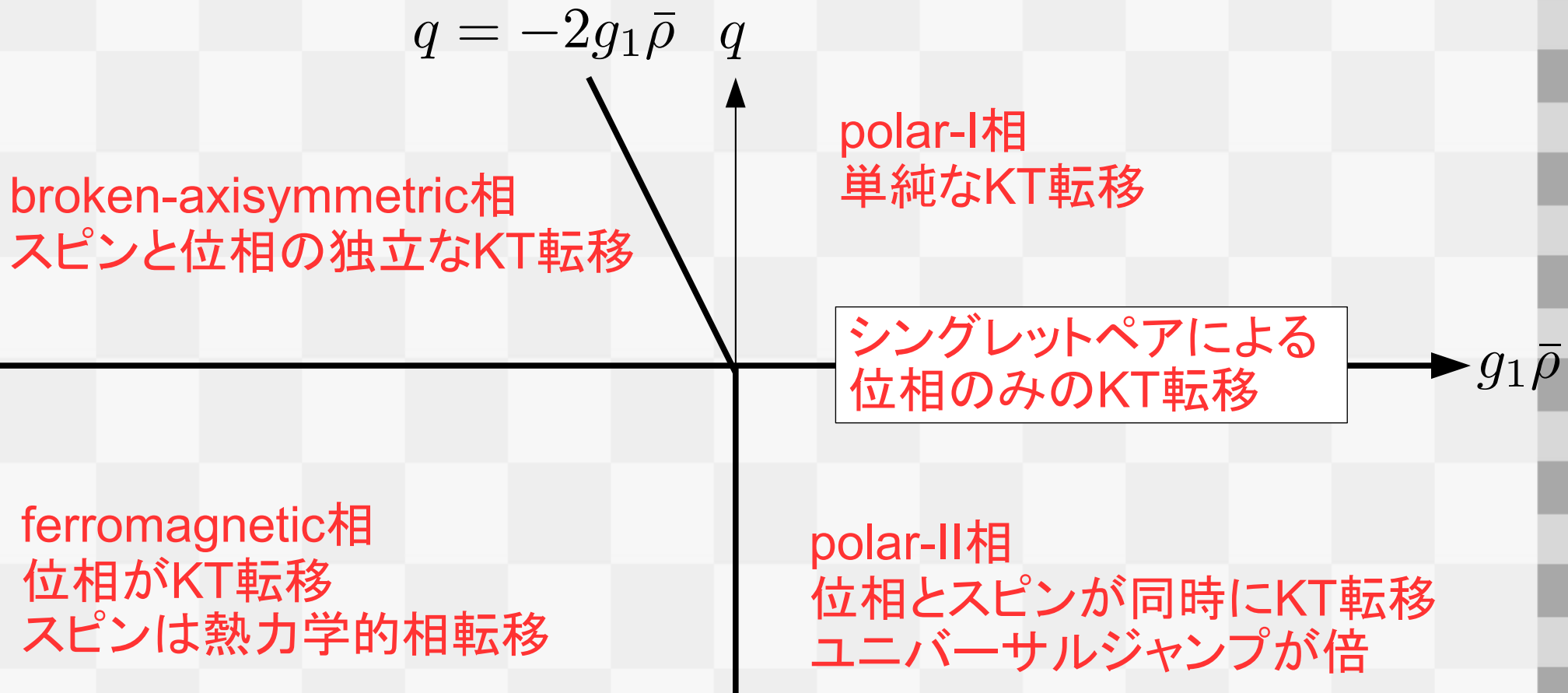
超流動密度



位相部分はKT転移を起こすが、ユニバーサルジャンプは
ペアでの寄与により、スカラーBECの倍 $\Delta\gamma_\phi/T_{\text{KT}} \simeq 2/\pi$ となる

まとめ

2次元スピノルボース系では系のトポロジを反映して
様々なKT転移が見られる



$$\psi_0 = \begin{pmatrix} e^{i(\phi-s_z)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i(\phi+s_z)} \end{pmatrix}$$

$$G/H = U(1)_{\phi+s_z} \times (\mathbb{Z}_2)_{s_x}$$

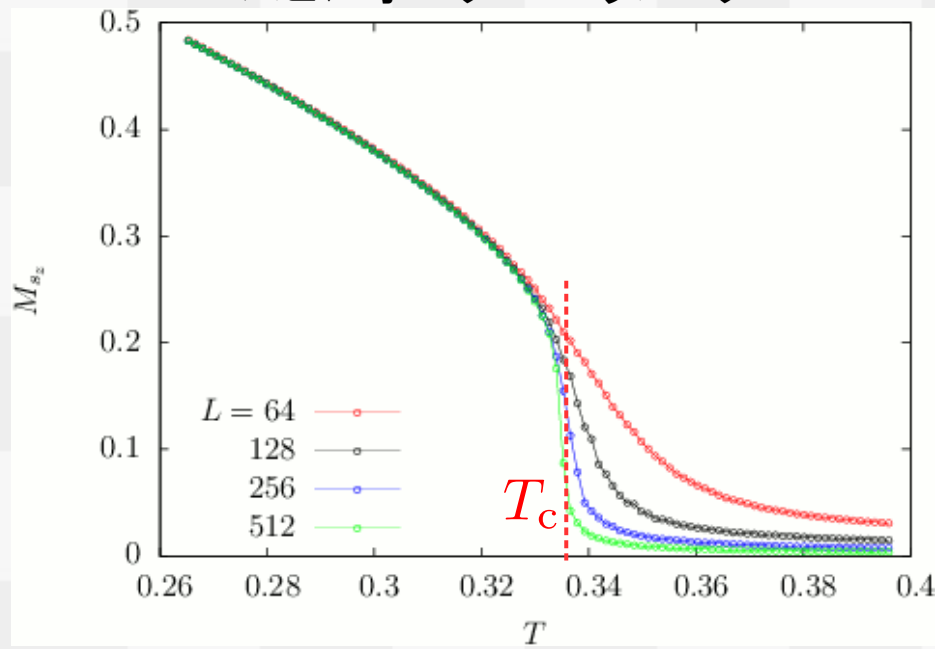
$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_{\phi+s_z}$$

$$\pi_0(G/H) \simeq (\mathbb{Z}_2)_{s_x}$$

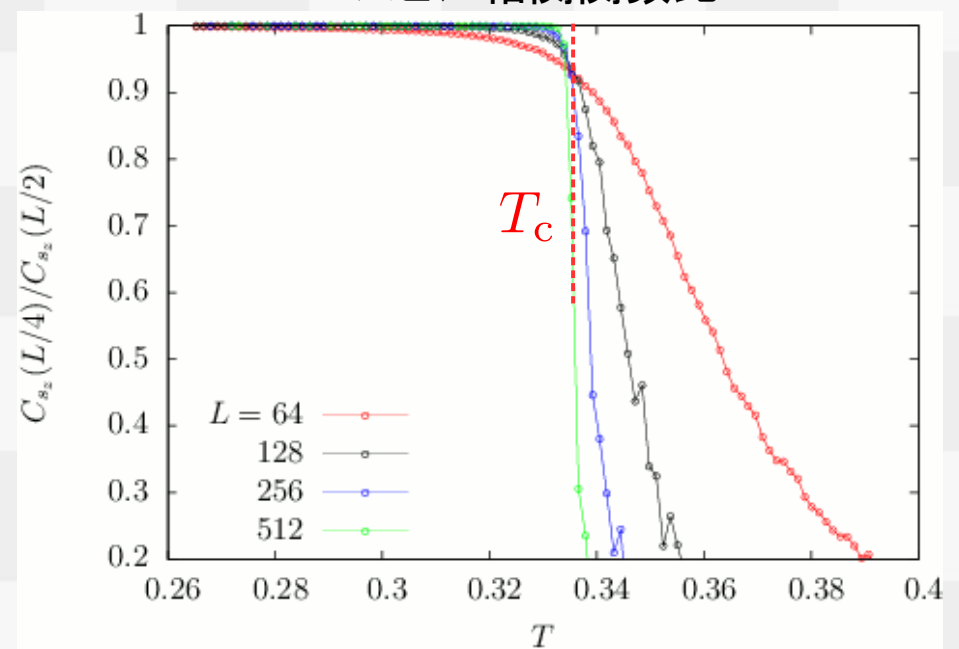
$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} : \text{phase vortex}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2z}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix} : \text{domain wall}$$

スピナーオーダーパラメーター



スピン相関関数比

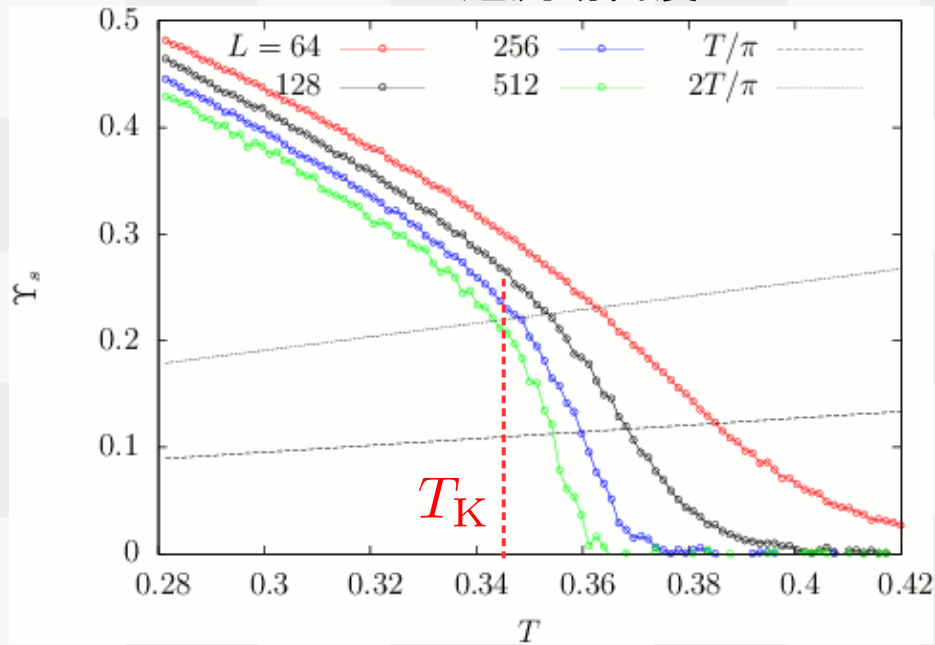


$$|\psi_0\rangle = \left\{ e^{i\phi} \left(\frac{\hat{a}_0^{\dagger 2} - 2\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_{-1}^{\dagger}}{\sqrt{3}} \right) \right\}^{N/2} \quad |0\rangle: \text{singlet-pair condensate}$$

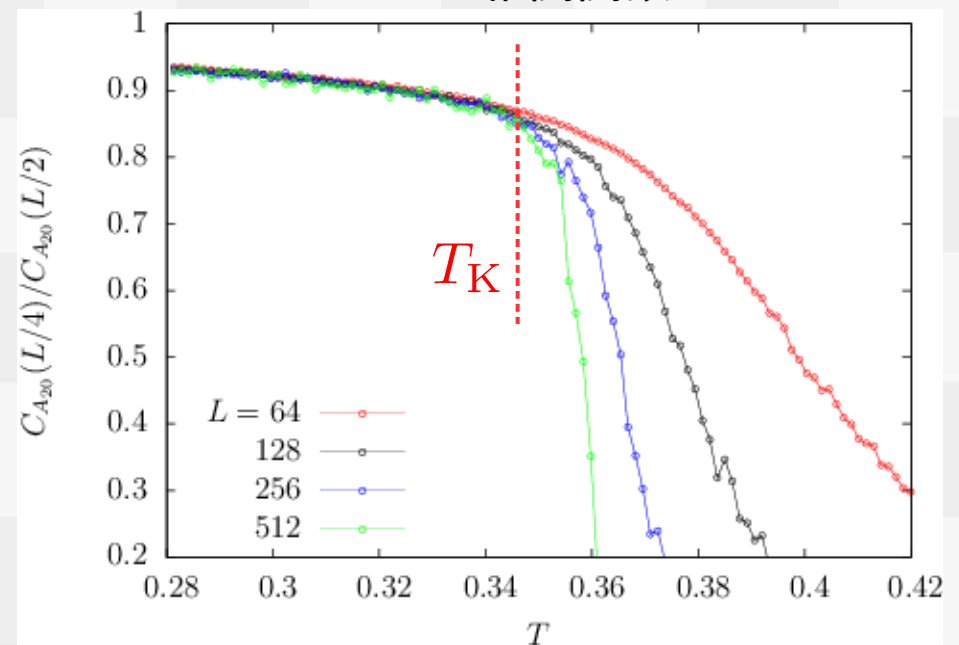
$$G/H \simeq U(1)_\phi$$

$$\pi_1(G/H) \simeq \mathbb{Z}_\phi$$

スピン超流動密度



スピン相関関数比



スピン部分は明らかにKT転移を起こしていないが、何らかの臨界状態にある

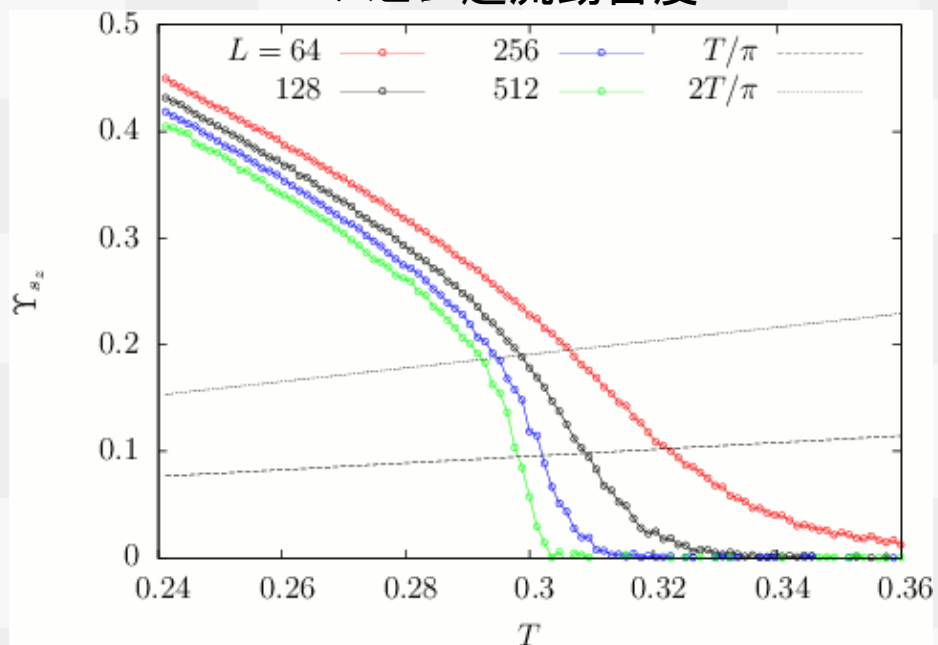
$$\psi_0 = \frac{e^{i(\phi-\alpha)}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\gamma} \cos^2(\beta/2) \\ \sin \beta \\ \sqrt{2}e^{i\gamma} \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix}$$

$$G/H \simeq SO(3)_{\phi-s_z}$$

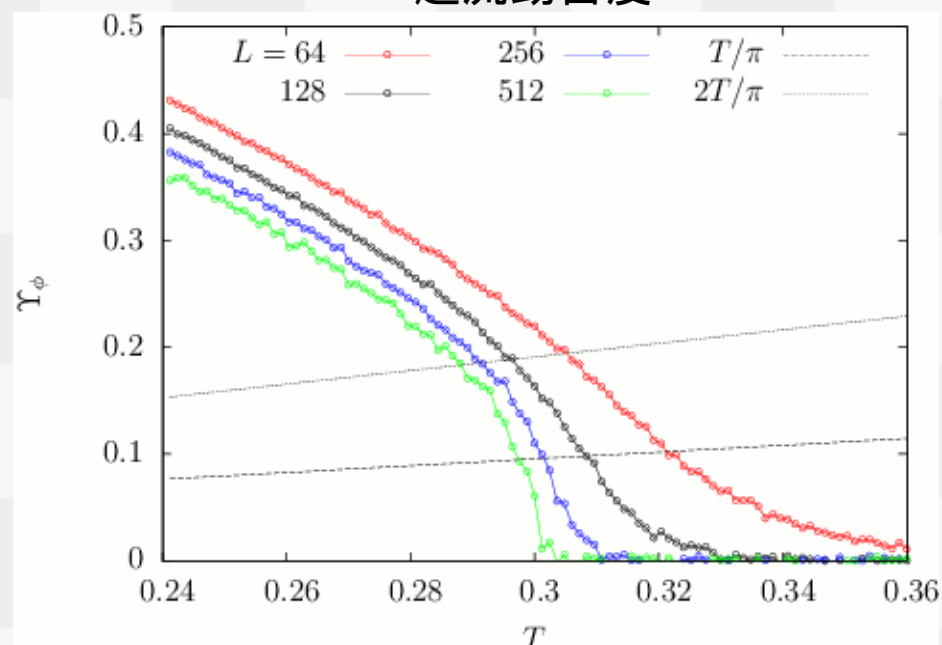
$$\pi_1(G/H) \simeq (\mathbb{Z}_2)_{\phi+s_z}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\gamma} \cos^2(\beta/2) \\ \sin \beta \\ \sqrt{2}e^{i\gamma} \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix} : \mathbb{Z}_2 \text{ vortex}$$

スピン超流動密度



超流動密度



\mathbb{Z}_2 渦はKT転移を引き起こさない

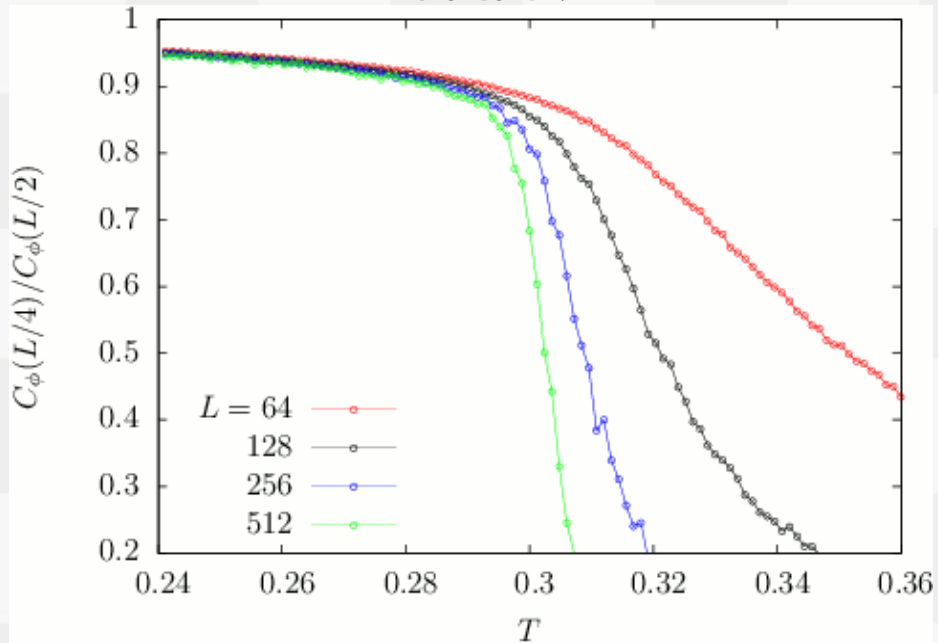
$$\psi_0 = \frac{e^{i(\phi-\alpha)}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\gamma} \cos^2(\beta/2) \\ \sin \beta \\ \sqrt{2}e^{i\gamma} \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix}$$

$$G/H \simeq SO(3)_{\phi-s_z}$$

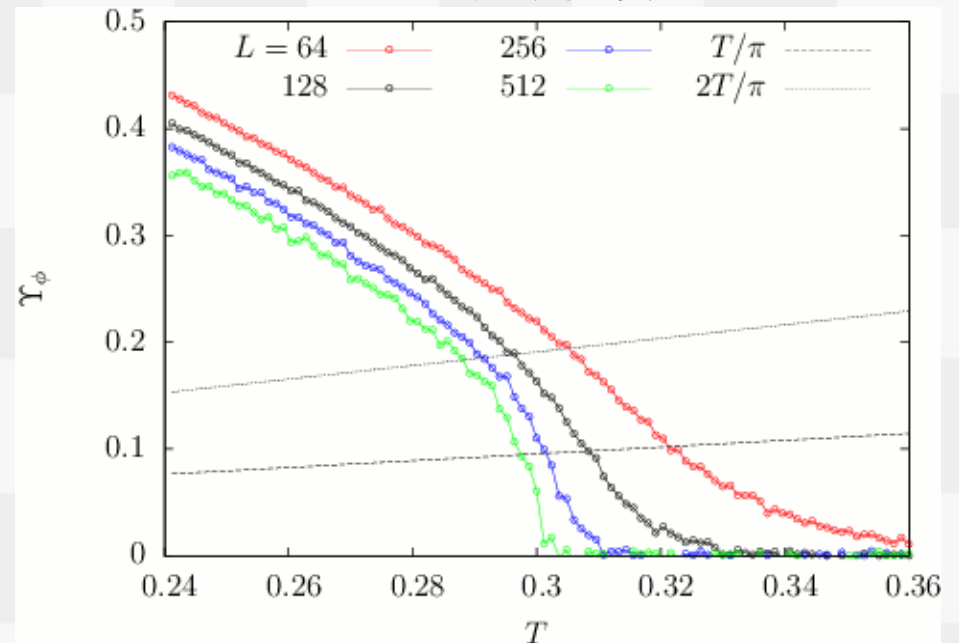
$$\pi_1(G/H) \simeq (\mathbb{Z}_2)_{\phi+s_z}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\gamma} \cos^2(\beta/2) \\ \sin \beta \\ \sqrt{2}e^{i\gamma} \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix} : \mathbb{Z}_2 \text{ vortex}$$

相関関数比

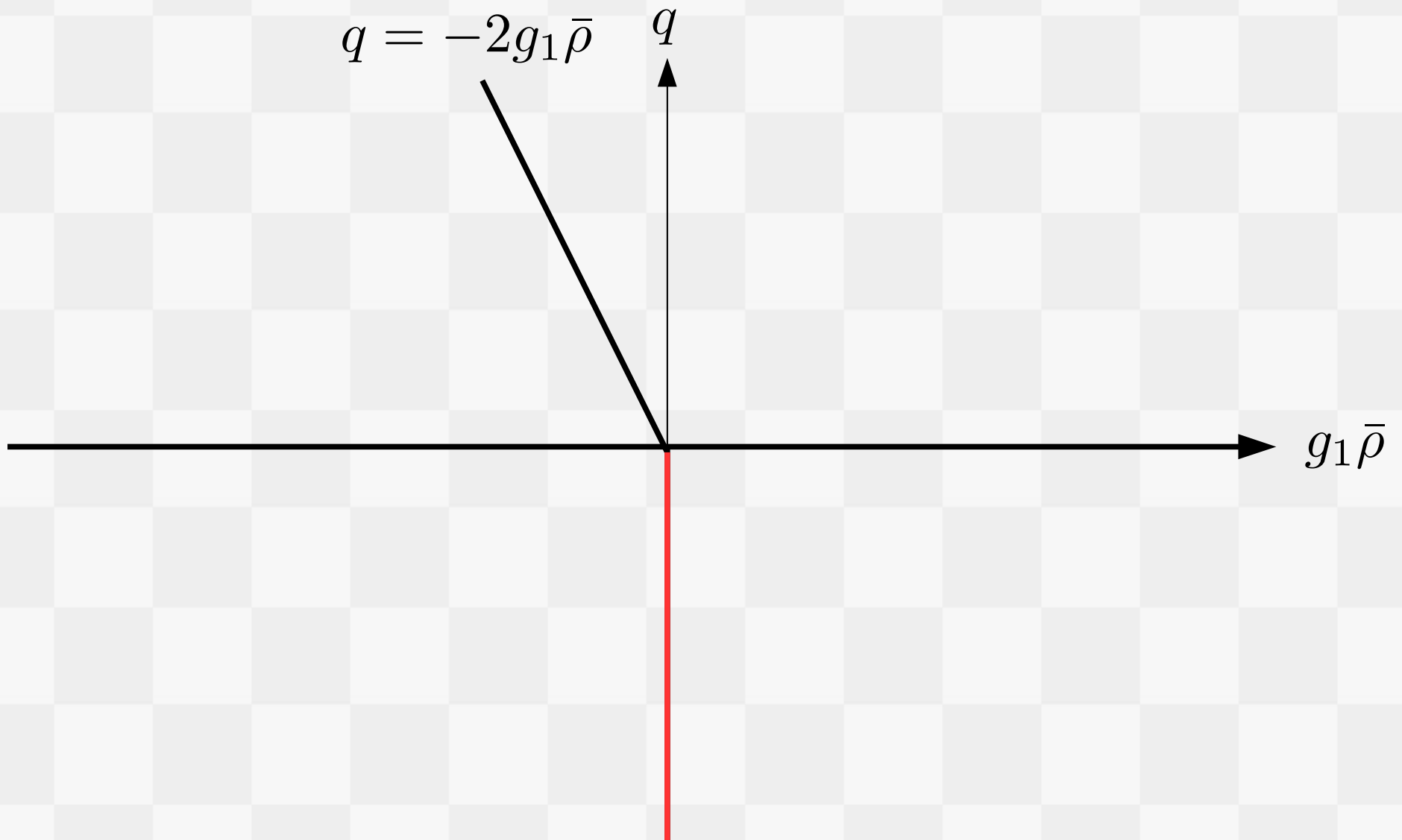


超流動密度



\mathbb{Z}_2 渦はKT転移を引き起こさないが、何らかの臨界状態にはなる(川村転移)

SU(2) state



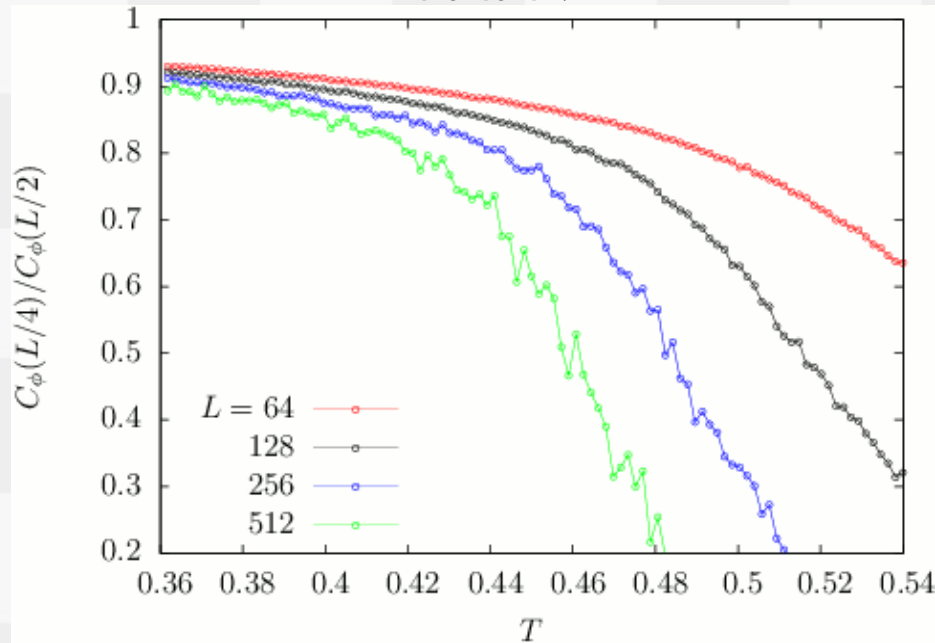
2次元スピノル・ボース原子気体における量子渦とKosterlitz-Thouless転移の関係

$$\psi_0 = e^{i(\phi-\alpha)} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma} \cos \beta \\ 0 \\ e^{i\gamma} \sin \beta \end{pmatrix}$$

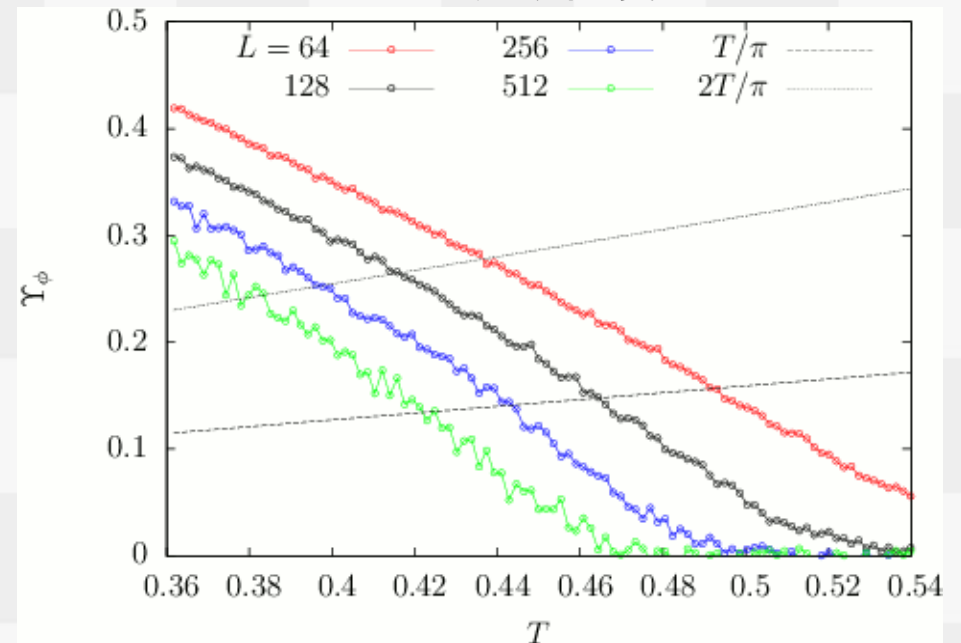
$$G/H \simeq SU(2)_{\phi-s_z}$$

$$\pi_1(G/H) \simeq 0$$

相関関数比



超流動密度



渦が存在しないので何も起こらない

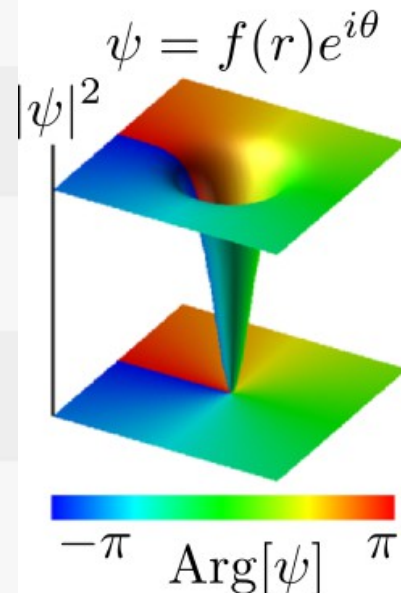
ユニバーサルジャンプ

$$E = E_{\text{core}} + \int_{\zeta}^R 2\pi r dr K |\nabla\psi|^2$$

$$= E_{\text{core}} + 2\pi K \log(R/\zeta)$$

$$S = \log(R/\zeta)^2$$

$$F = E_{\text{core}} + 2(\pi K - T) \log(R/\zeta)$$



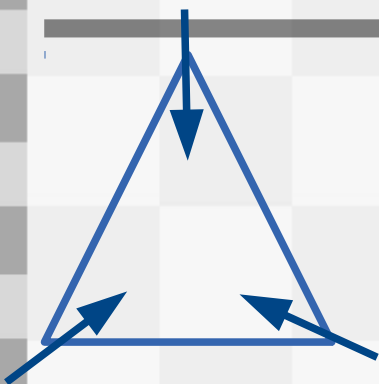
$$\psi(x=0) = \psi(x=L)e^{i\Delta}$$

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(\Delta) - F(0)}{\Delta^2}$$

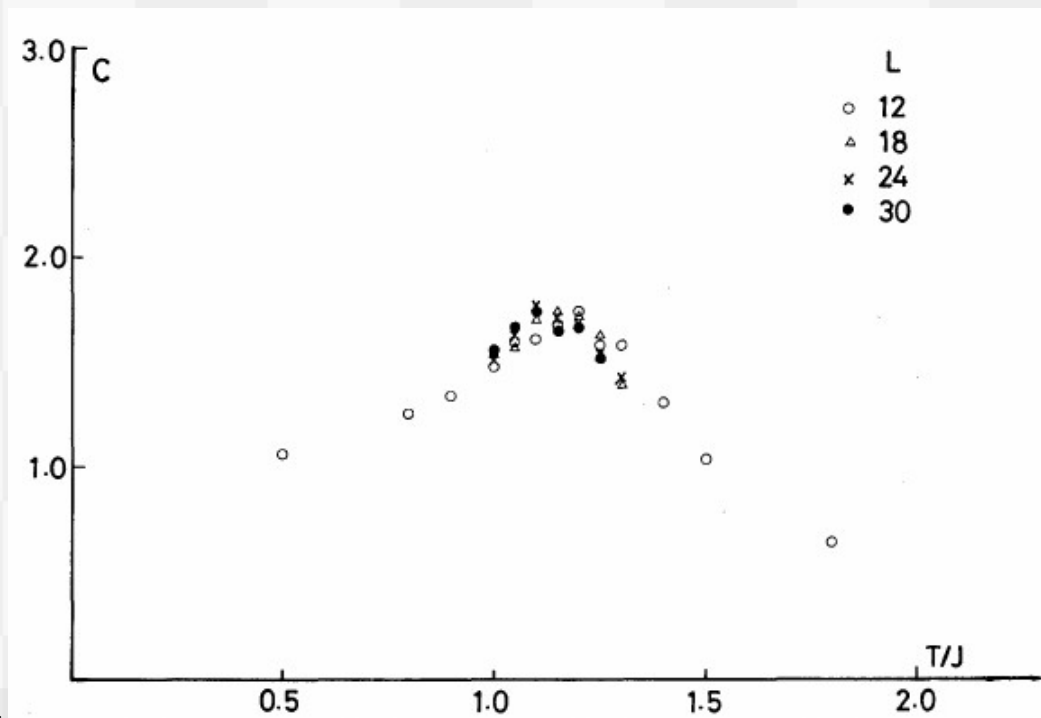
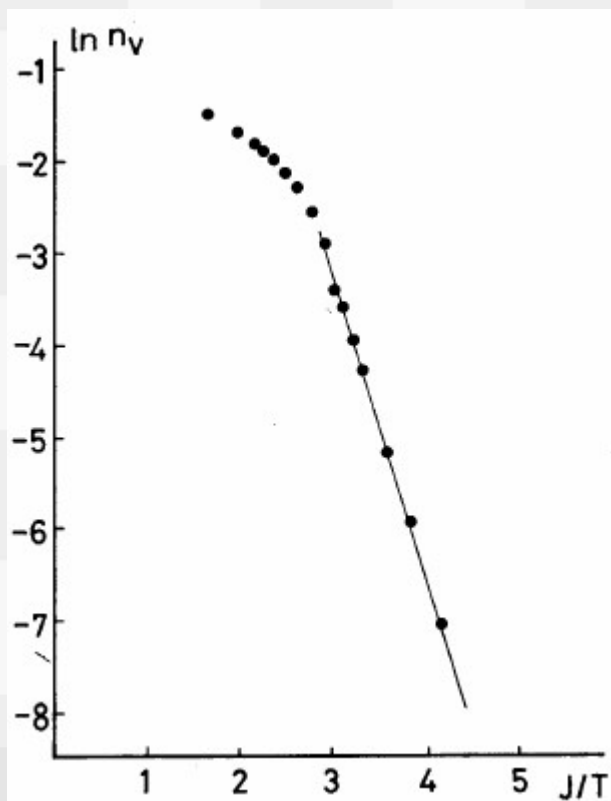
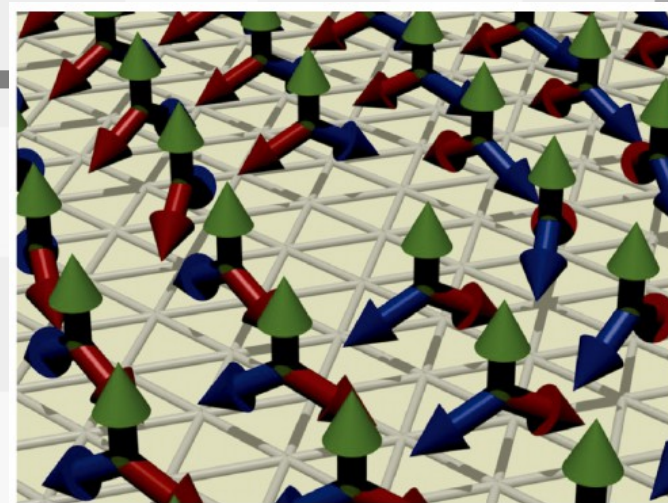
$$\frac{K(T = T_{\text{KT}})}{T_{\text{KT}}} = \frac{1}{\pi}$$

三角格子上反強磁性Heisenbergスピン系

H. Kawamura and S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **53** 4138 (1984).



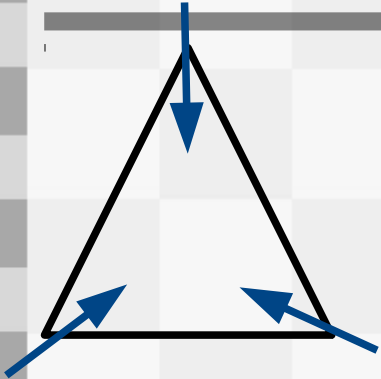
1つの3角形ユニットで 120° 構造をとる
 $SO(3)$ の回転自由度 (spin-1 Ferro相と共通) $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 渦の存在



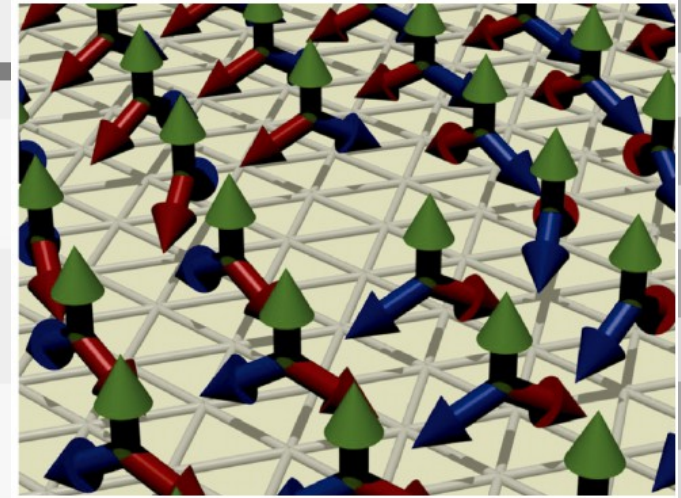
体における里丁洞とKosterlitz-Thouless転移の関係

三角格子上反強磁性Heisenbergスピン系

H. Kawamura and S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **53** 4138 (1984).



1つの3角形ユニットで 120° 構造をとる
 $SO(3)$ の回転自由度(spin-1 Ferro相と共通) $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 渦の存在



- 比熱のピークおよび渦密度のアレーニウス則が見えている \rightarrow KT転移を示唆
- Spin-1 BEC Ferro相とは定性的に異なっている！ Frustrationの効果？
- 渦のトポロジー(\mathbb{Z}_2 渦)だけでは決まらない可能性がある
- 3次元回転できる液晶は RP^2 の自由度があり、 \mathbb{Z}_2 渦が存在する:KT転移をするか否かの長い歴史があり、未決着