

# 冷却スピノル・ボース原子気体における Kosterlitz-Thouless転移

京都大学 小林 未知数

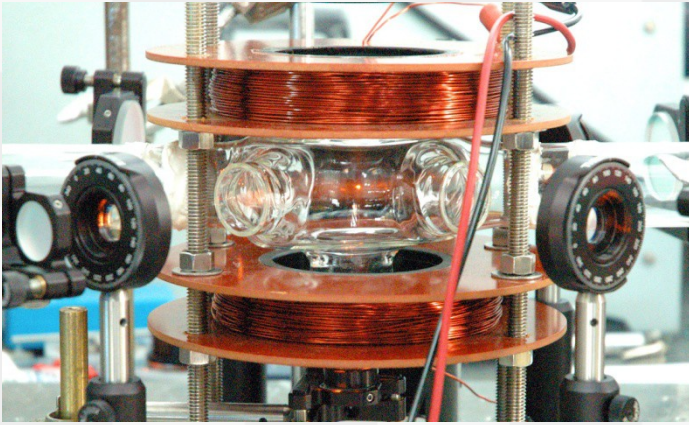
- 擬二次元冷却原子気体のKosterlitz-Thouless転移
- スピノルボース気体と渦のトポロジー
- 数値計算結果
- まとめ

2015年3月24日 日本物理学会第70回年次大会

# 擬二次元冷却原子気体の Kosterlitz-Thouless転移

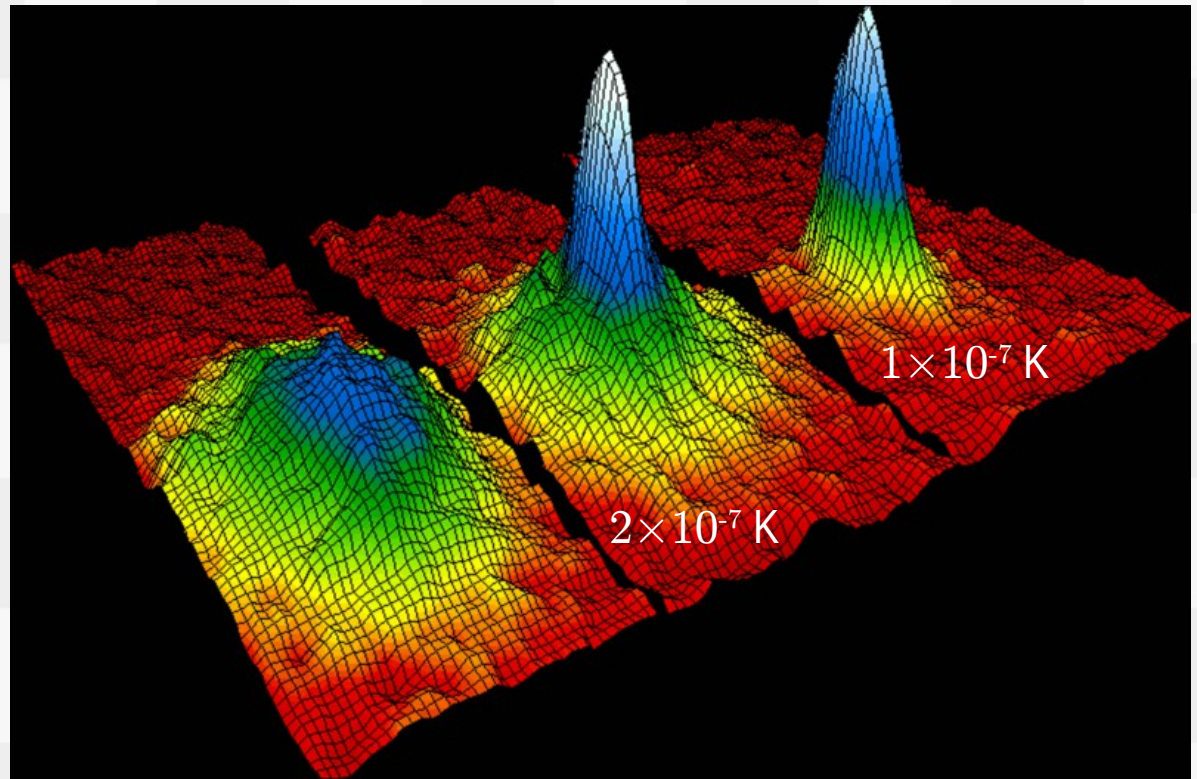
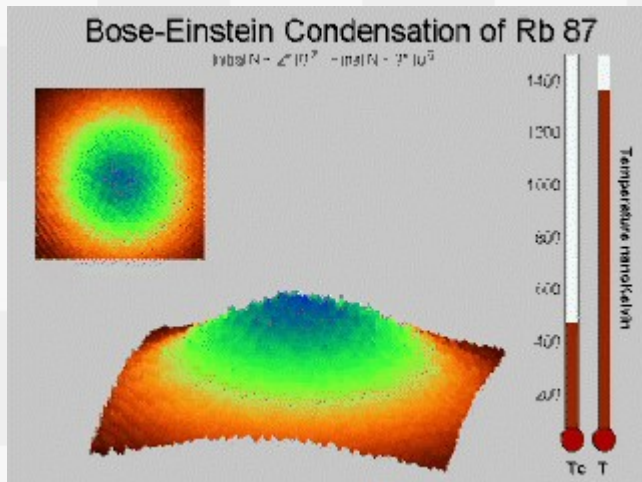
# 原子気体ボースアインシュタイン凝縮

## 原子のトラップ



1997年に成功した中性原子ボース・アインシュタイン凝縮：液体ヘリウムに続く、中性原子超流動系

## 凝縮の様子

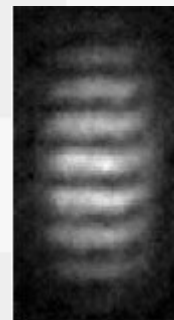
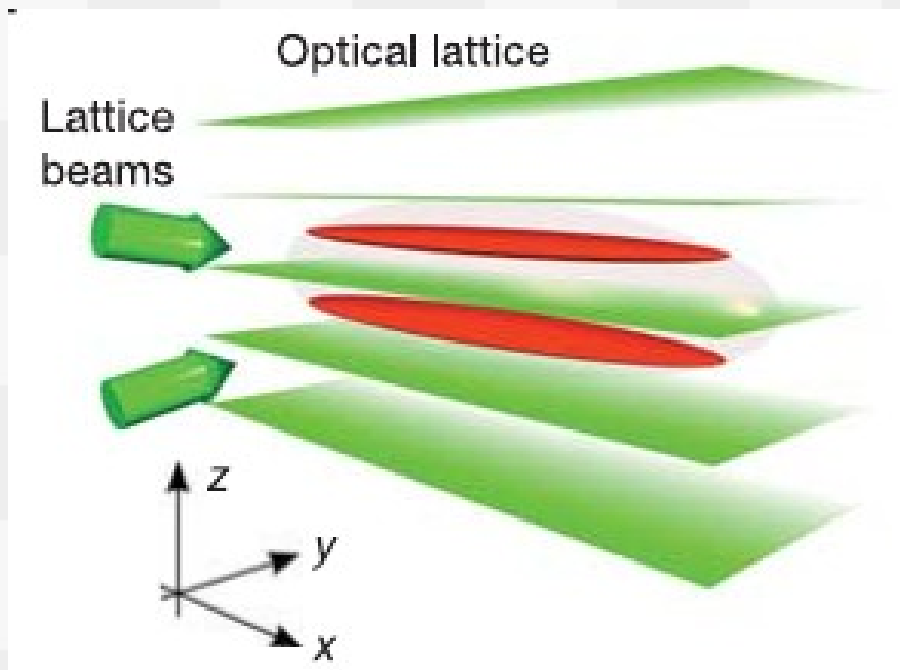


冷却スピナル・ボース原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移

# 冷却原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移の観測

一次元方向にレーザーによる周期ポテンシャルを作り、原子を閉じ込めることで、二次元的な原子気体集団を作る

⇒トラップから開放することで、干渉させる



温度が低いとき: 原子波の(普通の)干渉縞



温度上昇

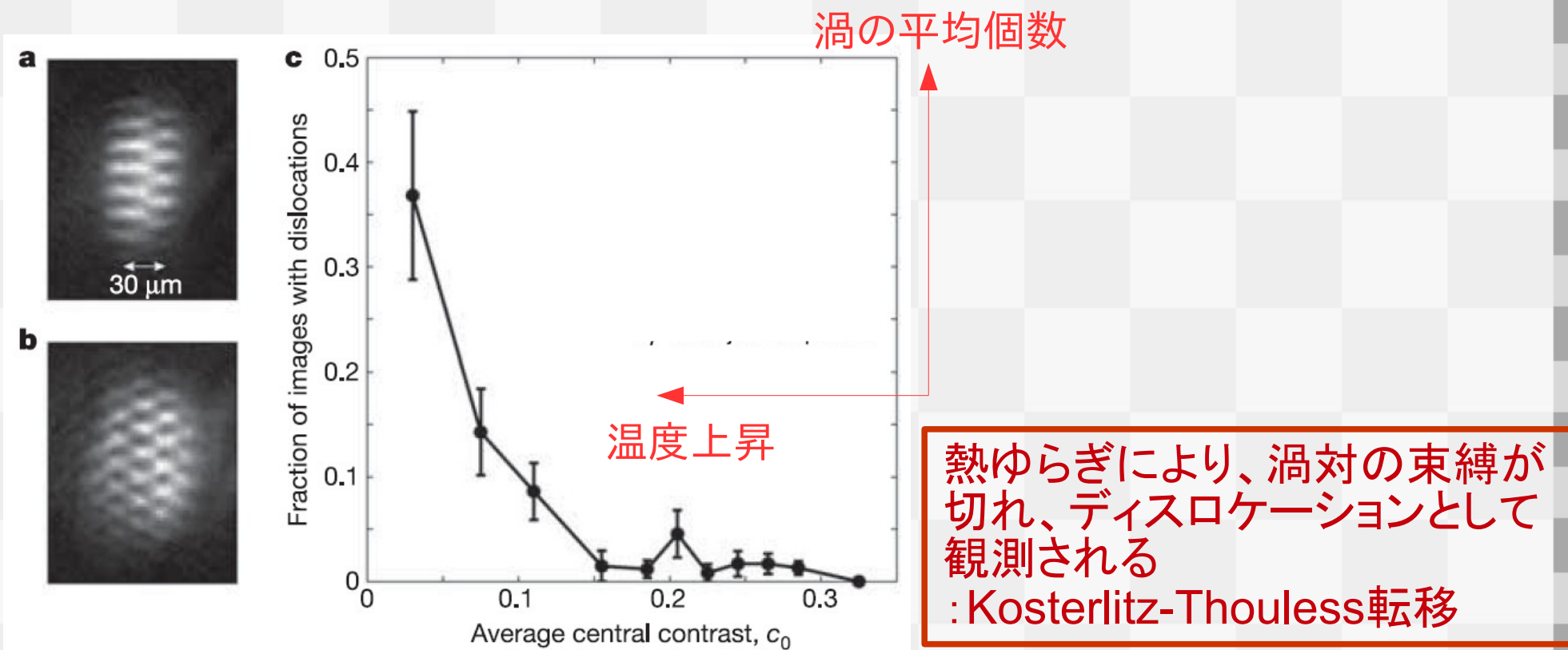


フォノンによる干渉縞のゆらぎ

Nature **441**, 1118 (2006)

# 冷却原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移の観測

温度をさらに上げることにより、干渉パターンのディスロケーションが現れる  
⇒量子渦のシグナル



Nature **441**, 1118 (2006)

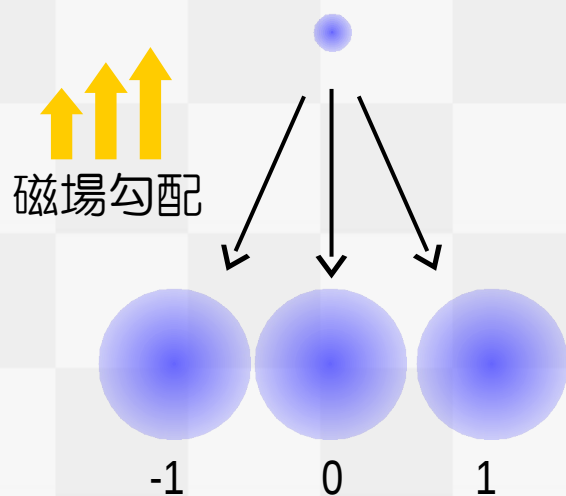
# スピノルボース気体と渦のトポロジ



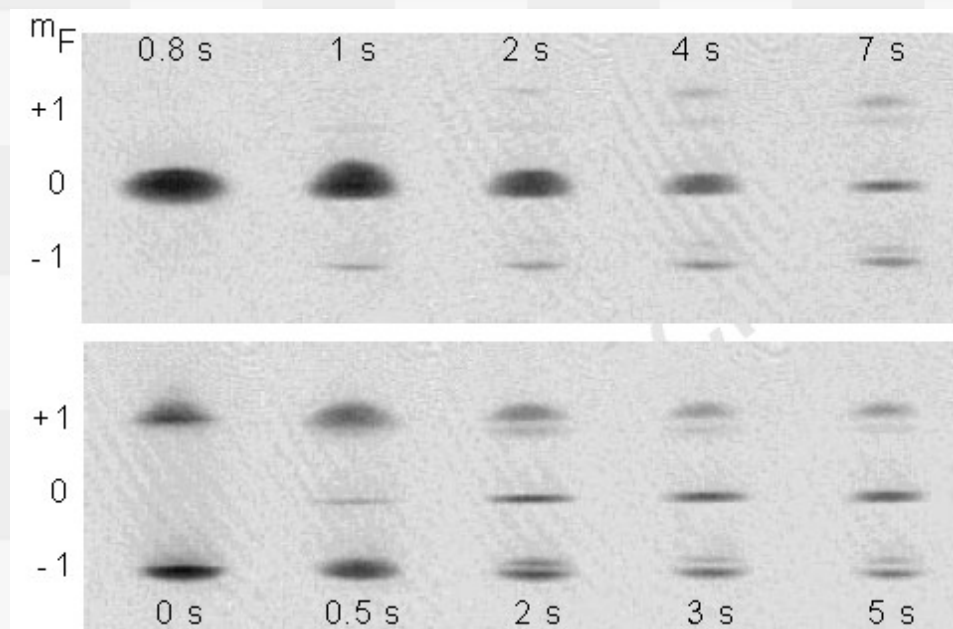
# スピン自由度を持つ原子気体

- 原子を磁場でトラップ: 原子のスピン自由度は凍結
- 原子をレーザーでトラップ: 原子のスピン自由度が生きている

スピン1のボース原子気体を考える ( $^{87}\text{Rb}$ ・ $^{23}\text{Na}$ ですでに実現)  
( $^{87}\text{Rb}$ : 強磁性  $^{23}\text{Na}$ : 反強磁性)



Stern-Gerlach実験により磁気量子数ごとに観測できる

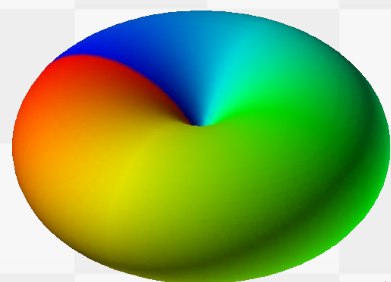


J. Stenger et al. Nature **396**, 345 (1998)

冷却スピノル・ボース原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移

# 多体状態と渦のトポロジー

強磁性状態:  $\Psi=(1,0,0)$

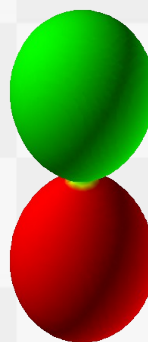


$Y_{11}(\theta, \phi)$

状態空間  
 $SO(3)$

位相・スピン結合回転  
(両者の回転は等価)

反強磁性状態:  $\Psi=(0,1,0)$



$Y_{10}(\theta, \phi)$

状態空間

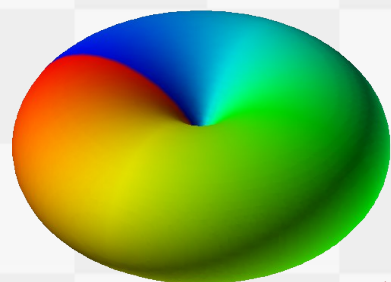
$$\frac{U(1) \times S^2}{\mathbb{Z}_2}$$

位相回転



# 多体状態と渦のトポロジー

強磁性状態:  $\Psi=(1,0,0)$

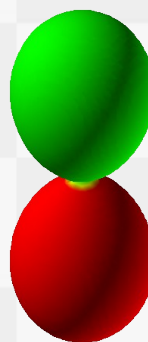


$$Y_{11}(\theta, \phi)$$

状態空間  
 $SO(3)$

位相・スピン結合回転  
(両者の回転は等価)

反強磁性状態:  $\Psi=(1,0,0)$



$$Y_{10}(\theta, \phi)$$

状態空間

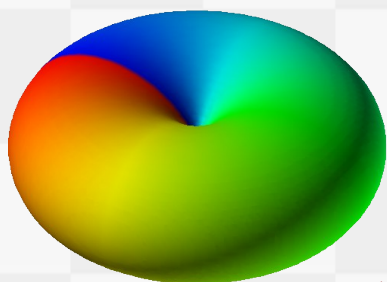
$$\frac{U(1) \times S^2}{\mathbb{Z}_2}$$

スピン回転  
(ネマティック液晶的)

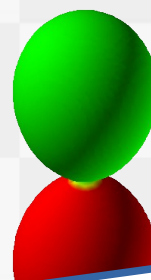
# 多体状態と渦のトポロジー

強磁性状態:  $\Psi=(1,0,0)$

反強磁性状態:  $\Psi=(1,0,0)$



状態空間  
 $SO(3)$



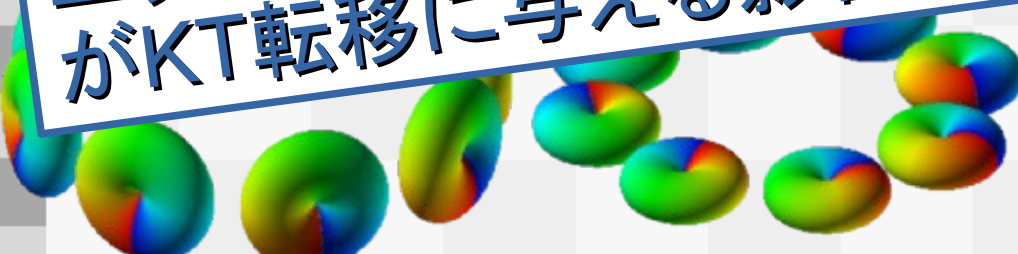
状態空間  
 $U(1) \times S^2$

$Y_{11}(\theta, \phi)$

位相・スピン結合回転

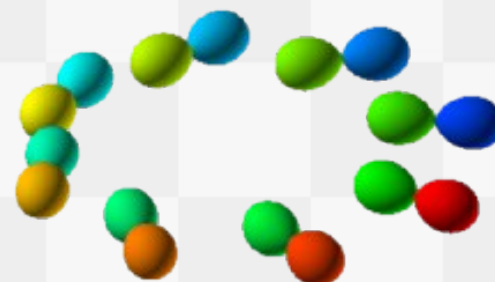
二次元系においてスピノルボース系の渦のトポロジーがKT転移に与える影響を調べる

(クワイク液晶的)



スピン渦

位相渦



半整数渦

両者は連続変形可能 ( $\mathbb{Z}_2$  渦)

位相部分:  $\mathbb{Z}$  渦的 スピン部分  $\mathbb{Z}_2$  渦的

冷却スピノル・ボース原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移

# 数值計算結果

# 平均場近似におけるスピノルボース系のハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[ \sum_{m=-1}^1 |\nabla\psi_m|^2 - \mu\rho + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 \right]$$

$\psi = (\psi_1, \psi_0, \psi_{-1})$  : mean-field for bosons

$\mu$  : chemical potential

$g_{0,1}$  : coupling constants

$g_1 > 0$  : antiferro     $g_1 < 0$  : ferro

$\rho = \sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2$  : density

$\mathbf{S} = \sum_{m,m'=-1}^1 \psi_m^* \mathbf{S}_{m,m'} \psi_{m'}$  : spin density

$$S_{m,m'}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{m,m'}^y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{m,m'}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# 平均場近似におけるスピノルボース系のハミルトニアン

$$H = \int d^2x \left[ \sum_{m=-1}^1 |\nabla\psi_m|^2 - \mu\rho + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}S^2 \right]$$

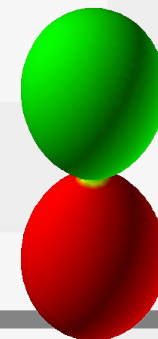
離散格子場におけるレプリカ交換Monte-Carlo法を用いて  
物理量の統計平均値を求める

$$\langle f \rangle = \int \sum_{m=-1}^1 (D\psi_m D\psi_m^*) f[\psi_m, \psi_m^*] e^{-H/T}$$

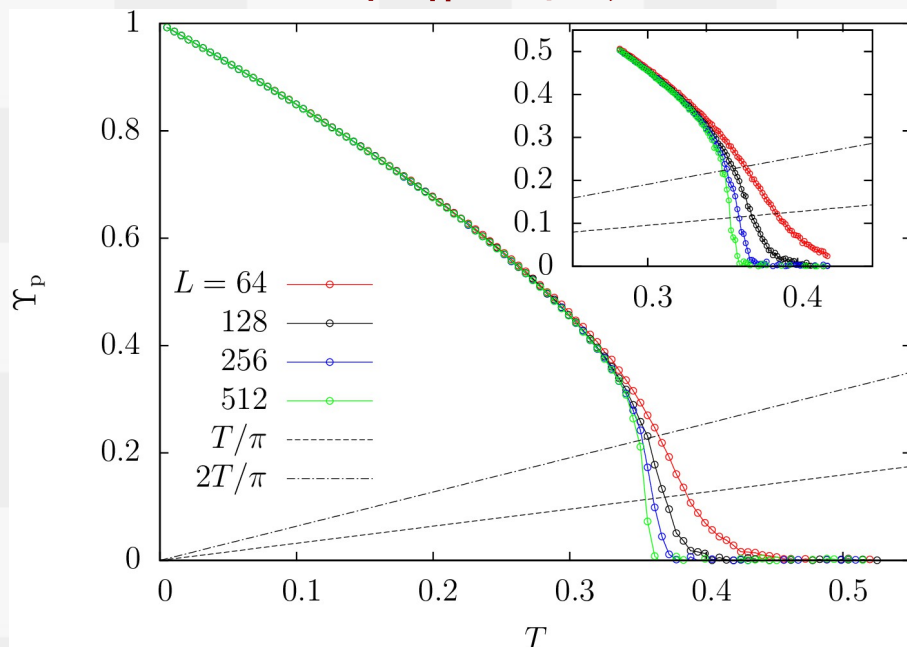
KT転移に関して興味ある物理量: 位相およびスピンひねりに対する  
helicity modulus

$$\Upsilon_{p,s} = \frac{F_{p,s}(\Delta) - F_{p,s}(0)}{\Delta^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{for } p : \psi(x+L) = \psi(x)e^{i\Delta} \\ \text{for } s : \psi(x+L) = \psi(x)e^{iS\Delta} \end{array} \right.$$
$$F_{p,s}(\Delta) = -T \log \langle e^{-H/T} \rangle_{p,s}$$

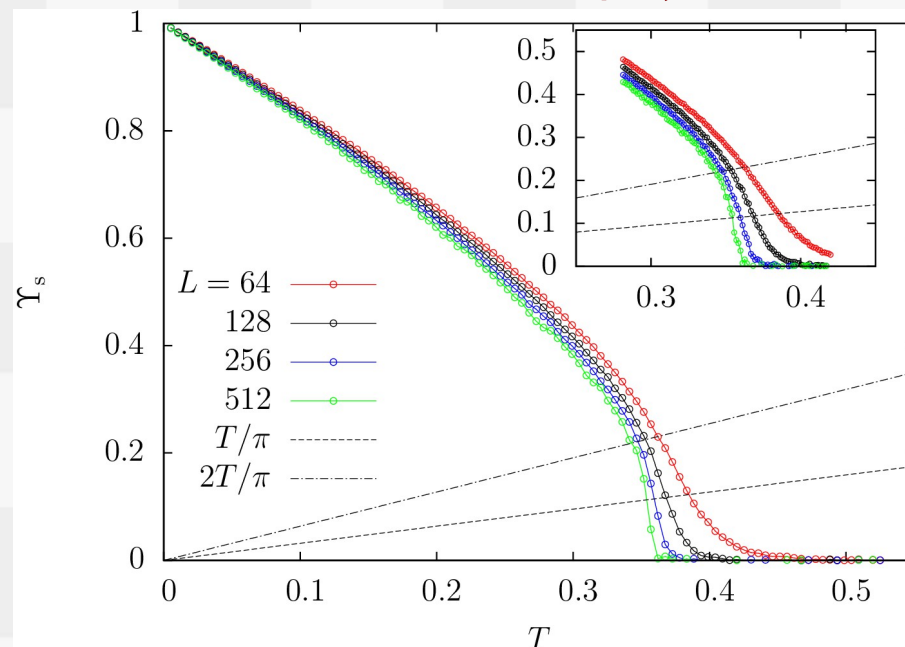
# 数値計算結果：反強磁性側 (位相： $\mathbb{Z}$ 渦 スピン $\mathbb{Z}_2$ 渦)



位相ひねり

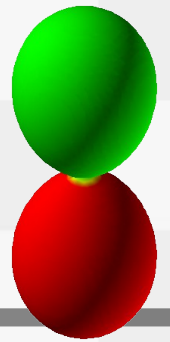


スピンひねり

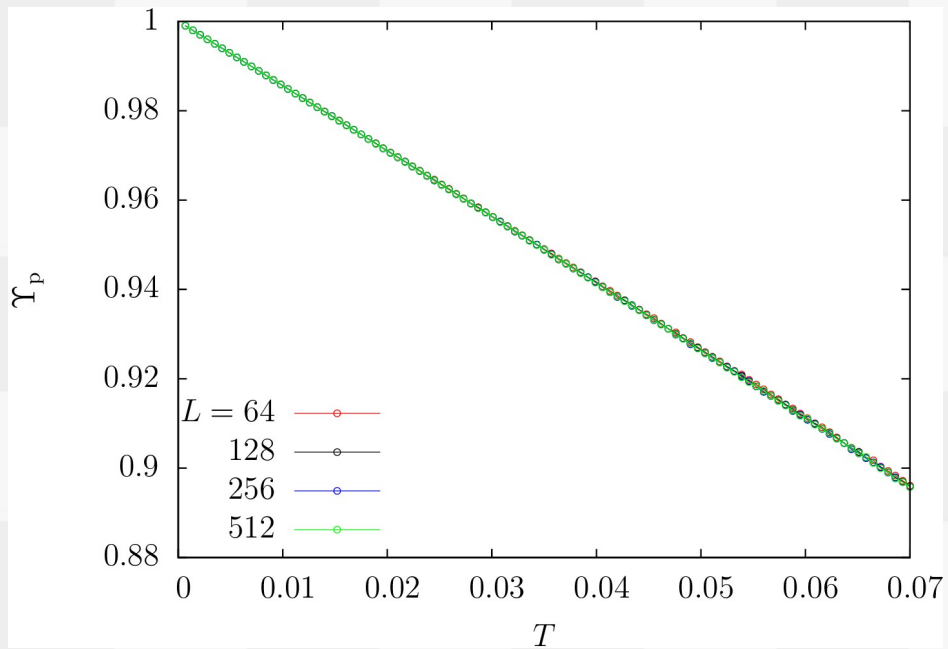


- 位相: 低温でシステムサイズに依存しなくなる $\Rightarrow$ KT転移の兆候が見えている
- ユニバーサルジャンプは明らかに $T_{KT}/\pi$ よりも大きい(ほぼ2倍: 渦のfluxが半整数であるという事実と一致している)。
- スピン: 低温の全領域でシステムサイズに依存している。
- $L \rightarrow \infty$ で消失? KT転移の明確な兆候が見えない

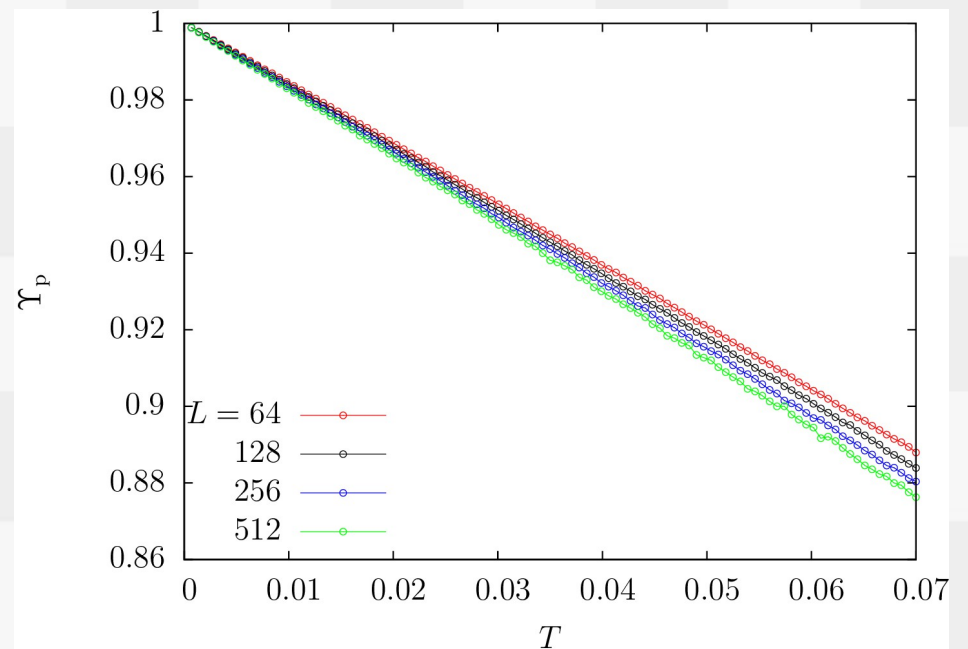
# 数値計算結果（低温側拡大）



位相ひねり

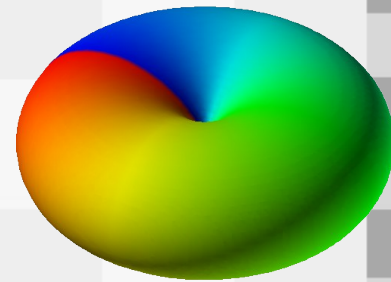


スピンひねり

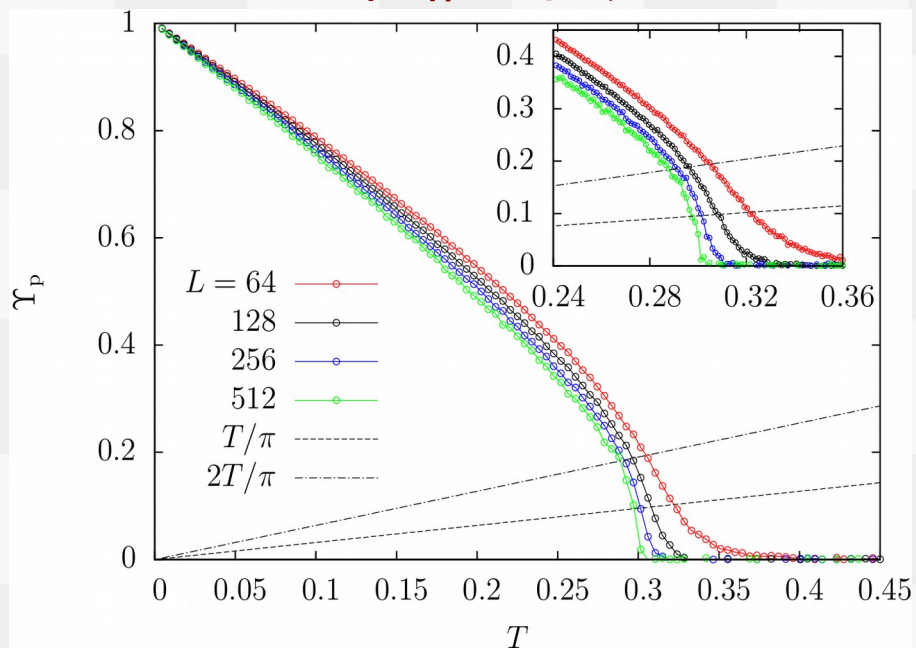




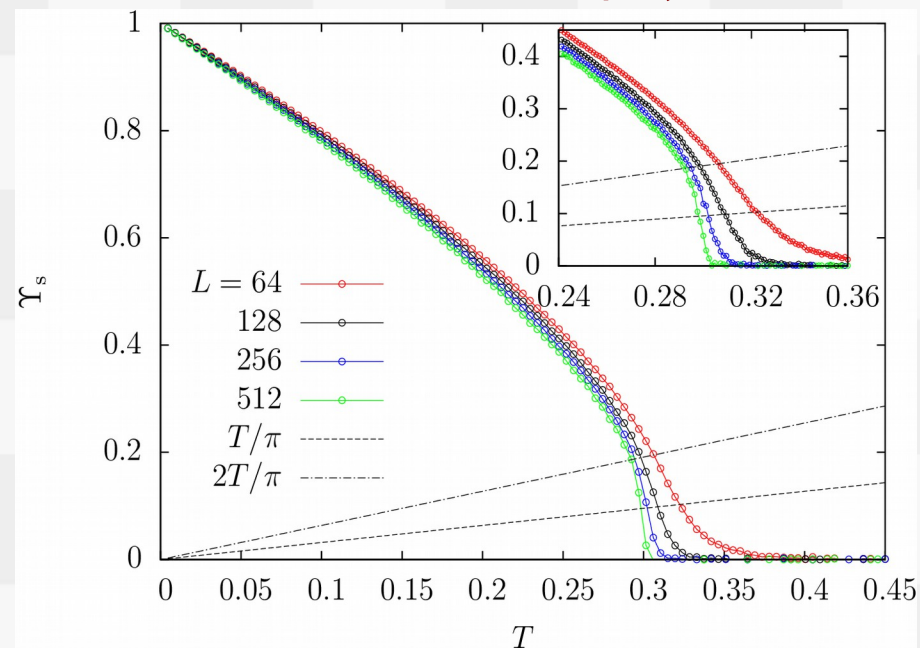
# 数値計算結果: 強磁性側 ( $\mathbb{Z}_2$ 渦)



位相ひねり



スピンひねり



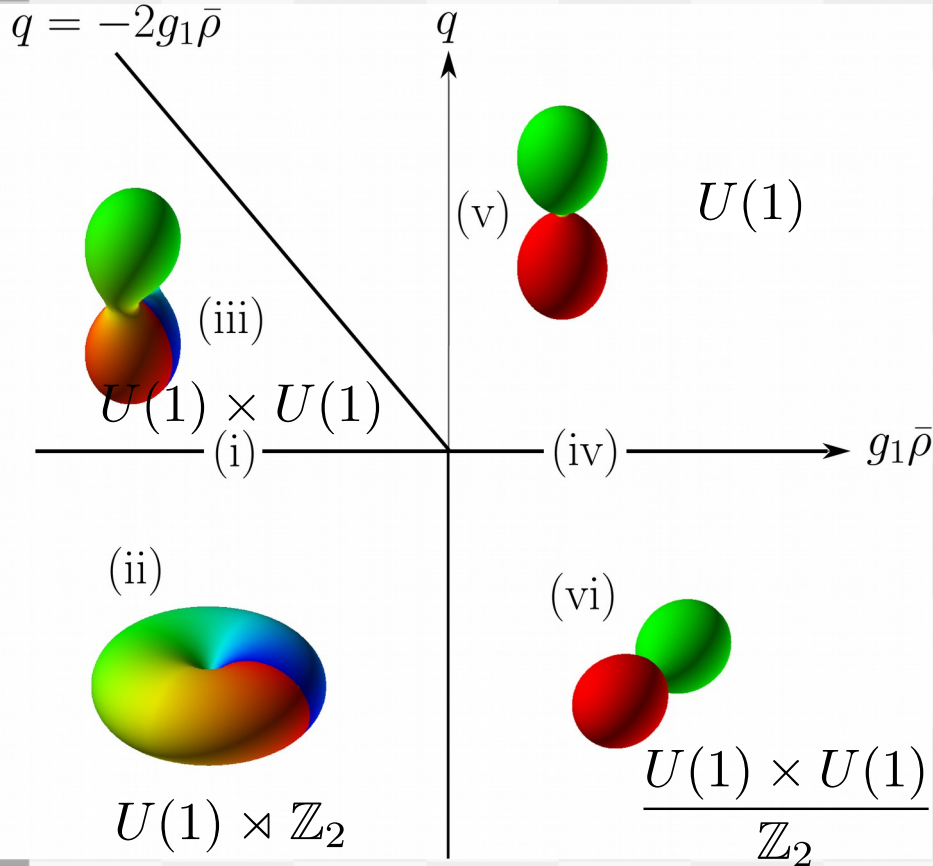
- 位相・スピンともに低温の全領域でシステムサイズに依存している。
- $L \rightarrow \infty$ で消失? KT転移の明確な兆候が見えない

# まとめ

- スピン1のスピノルボース系において、強磁性側では位相・スピンの結合した $\mathbb{Z}_2$ 渦が、反強磁性側では位相部分が $\mathbb{Z}$ 、スピン部分が $\mathbb{Z}_2$ となる渦が現れる。
- Helicity modulusを計算したところ、 $\mathbb{Z}_2$ 渦に対応した部分は、低温のすべての温度領域において、システムサイズに依存し、KT転移の兆候が見えなかった。
- KT転移の兆候が現れる、反強磁性側の位相部分は、ユニバーサルジャンプが、通常のおよそ倍となる。これは渦のfluxが半分となっているという事実と一致している。
- 磁場やレーザーによって誘起される、2次ゼーマン効果を考慮することにより、更に多彩なトポロジを持った渦が現れ、それに伴った興味深いKT転移の兆候も見えている(今回は発表していない)。

# 相互作用・2次ゼーマン相図

$$H = \int d^2x \left[ \sum_{m=-1}^1 (|\nabla\psi_m|^2 + qm^2|\psi_m|^2) - \mu\rho + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 \right]$$



(ii) スピンがz方向に平行もしくは反平行:  
Ising的⇒KT転移(位相)と2次相転移(スピン)が同じ温度で起こる(KTジャンプは倍!)

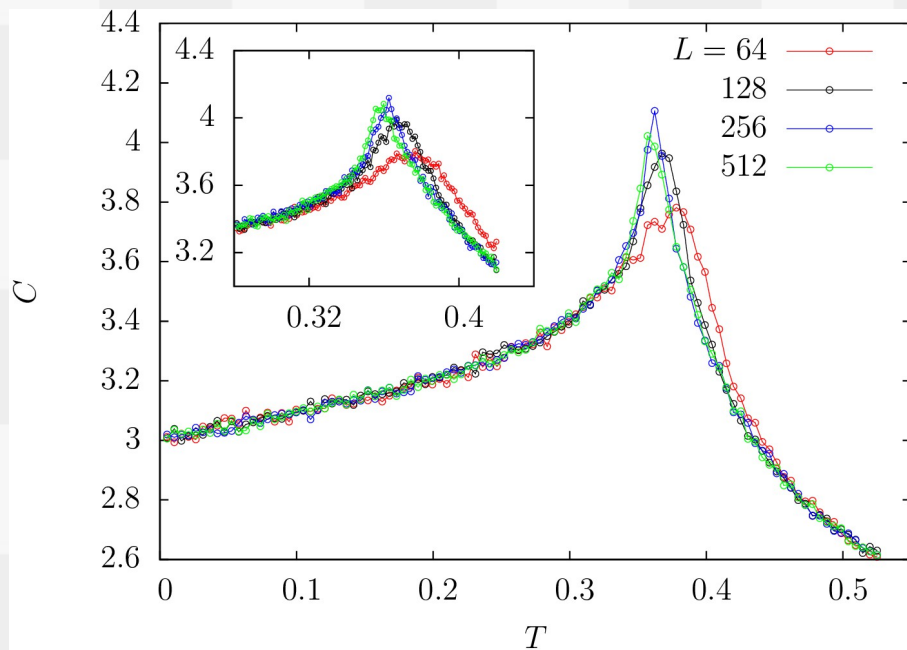
(iii) スピンはxy面内に向く:XY的⇒位相のKT転移とスピンのKT転移が異なる温度で起こる(ジャンプは通常)

(v) スピンの自由度はz軸上に凍結⇒位相のみがKT転移(ジャンプは通常)

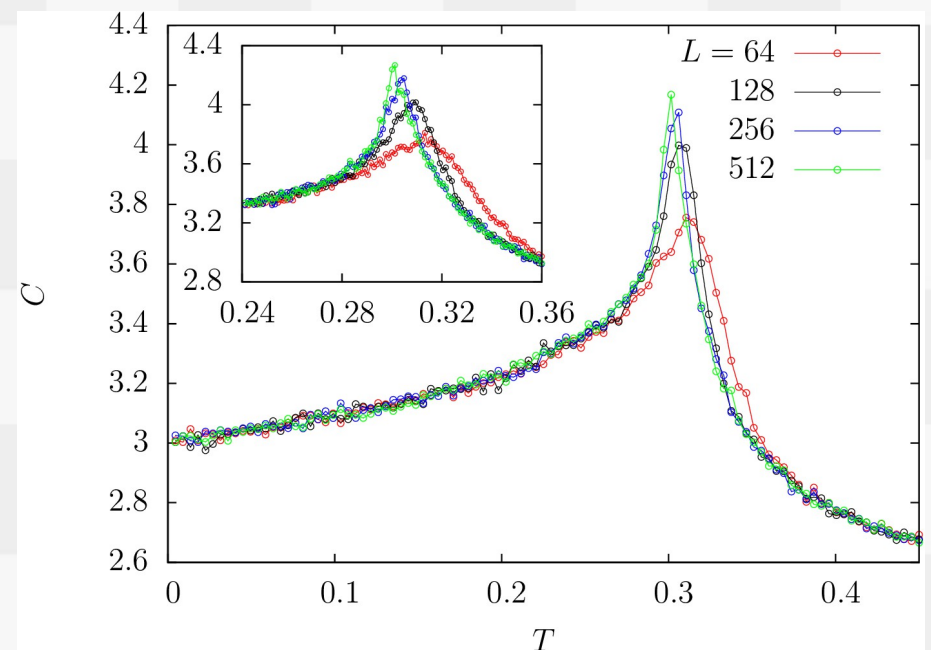
(vi) スピンの自由度はxy面内に凍結⇒位相のKT転移とスピンのKT転移が同じ温度で起こる(ジャンプは倍)

# 比熱の計算

反強磁性側



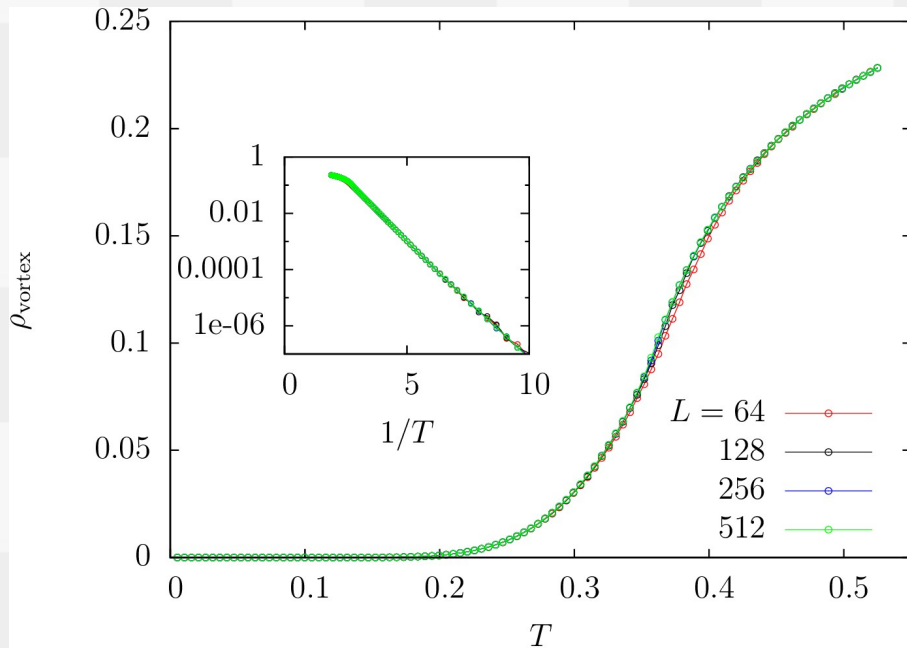
強磁性側



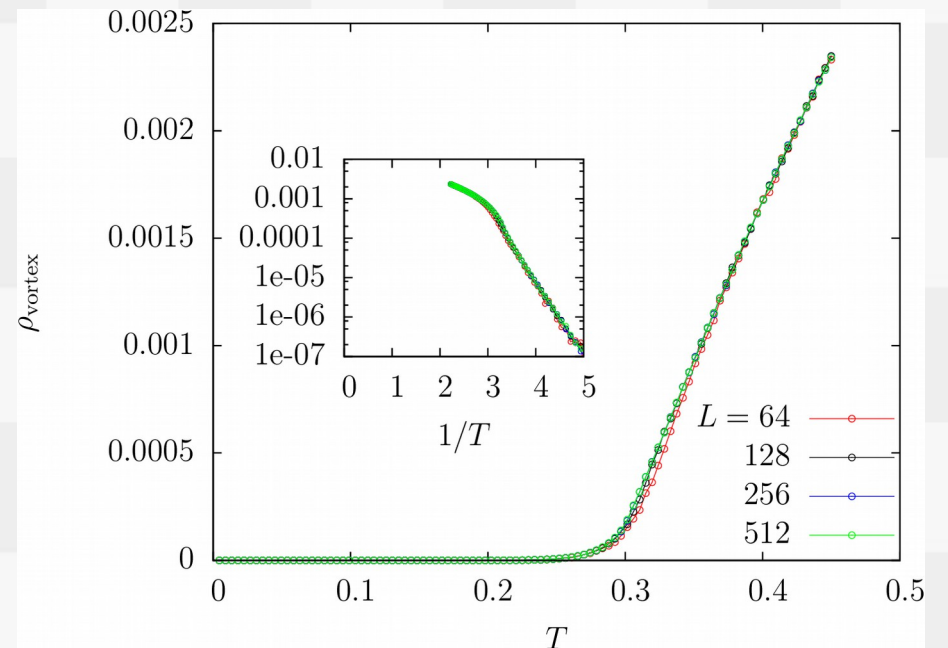
KT転移の有無に関わらず、比熱のピークは存在する  
(大抵のモデルはそう)

# 渦密度の計算

反強磁性側



強磁性側



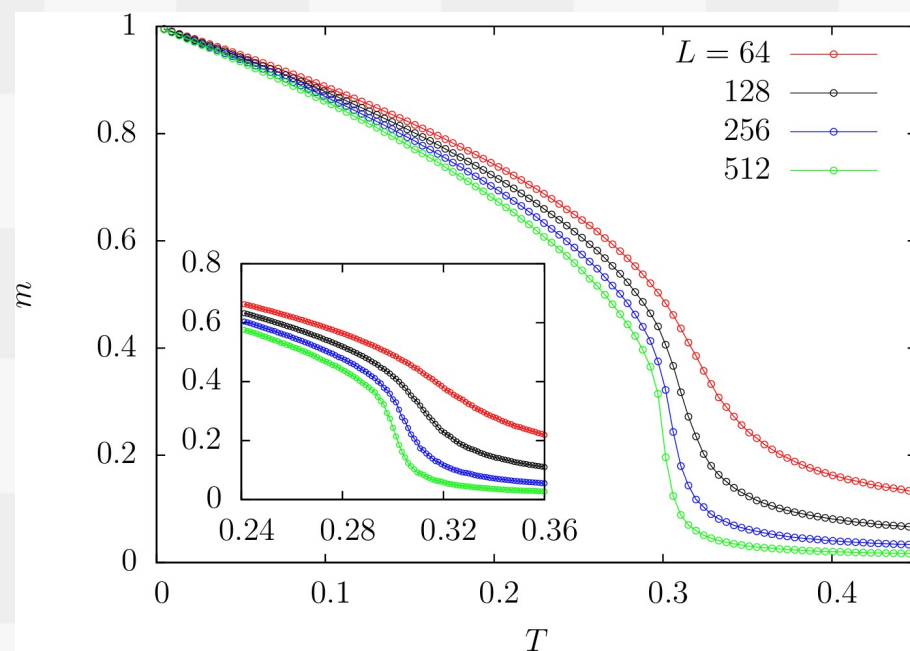
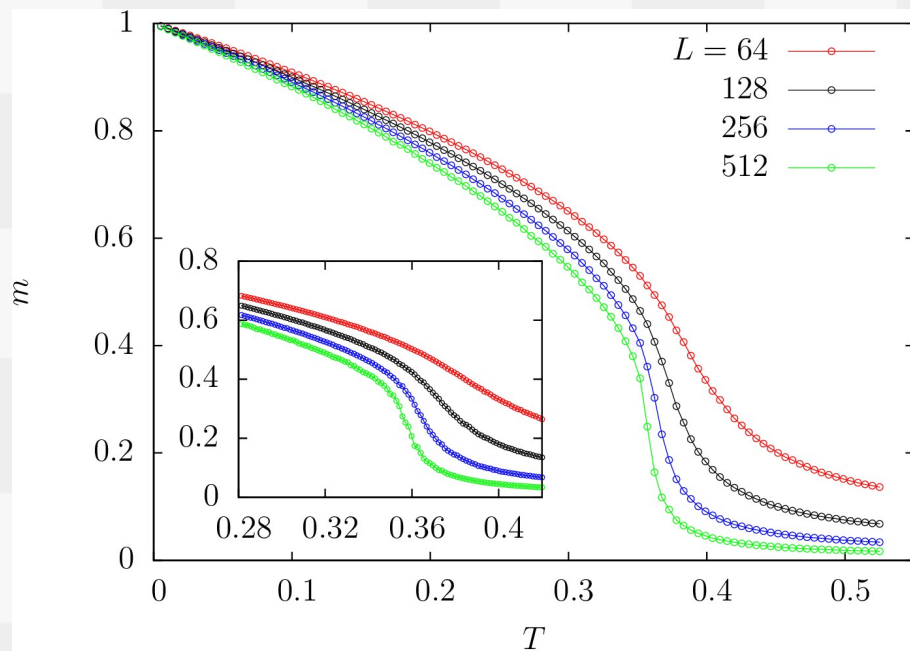
比熱のピーク付近で、渦密度のアレーニウスプロットが折れ曲がる  
(3次元XY模型でも同じの兆候が見える: 折れ曲がる温度と相転移点には有意な差がある)

# 位相のオーダーパラメータの計算

$$m = \sqrt{\left\langle \sum_m \left| \frac{1}{L^2} \int d^2x \psi_m \right|^2 \right\rangle}$$

反強磁性側

強磁性側



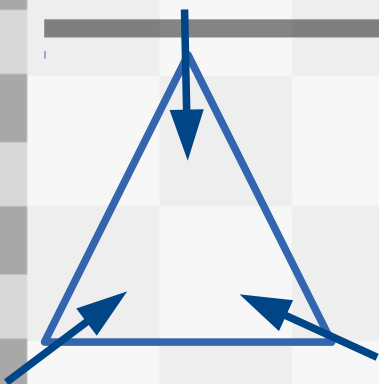
$\mathbb{Z}_2$ 渦に対するhelicity modulusと同様、 $L \rightarrow \infty$ で0になる

冷却スピノル・ボース原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移

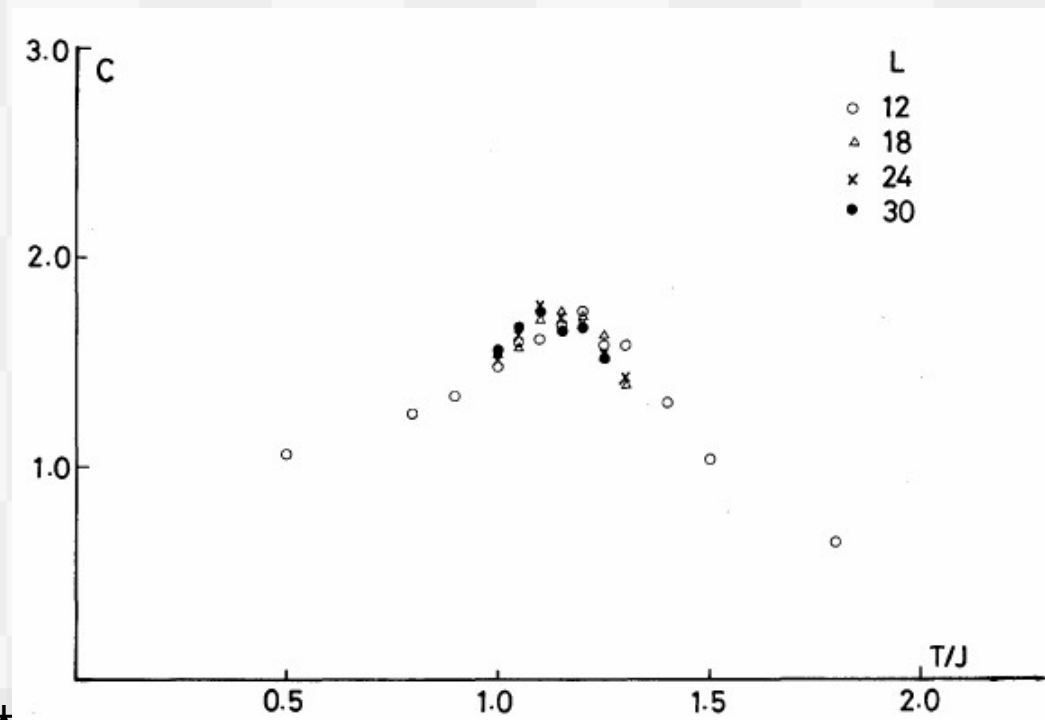
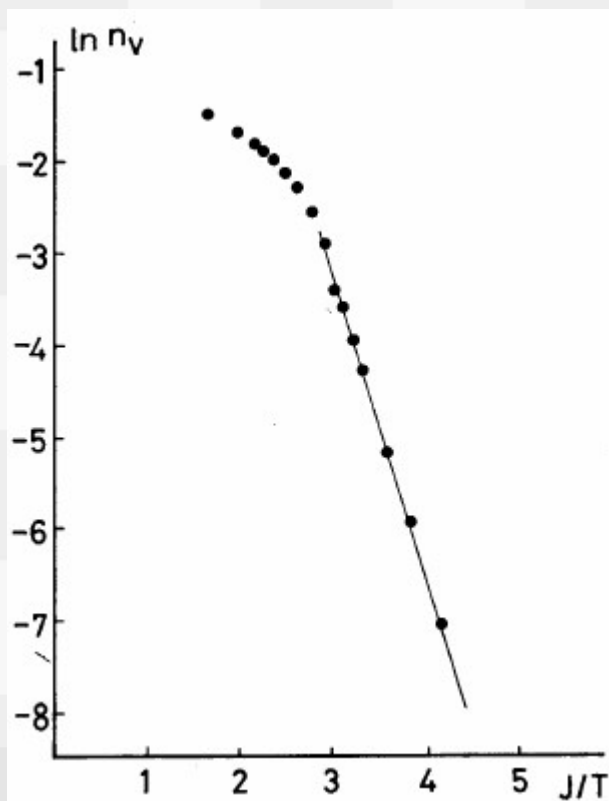
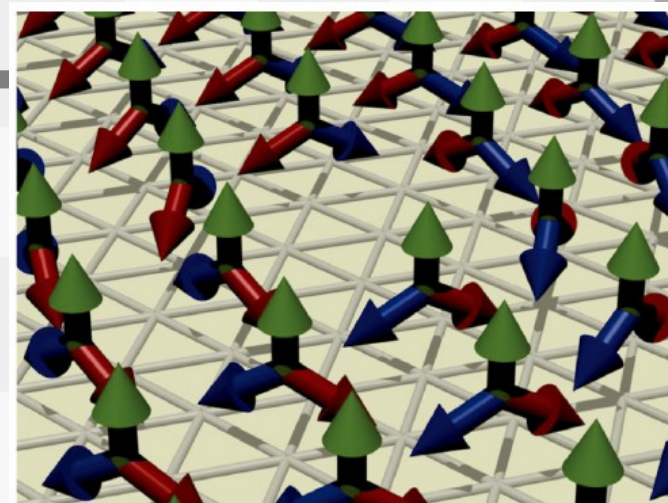


# 三角格子上反強磁性Heisenbergスピン系

H. Kawamura and S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **53** 4138 (1984).



1つの3角形ユニットで $120^\circ$ 構造をとる  
 $SO(3)$ の回転自由度 (spin-1 Ferro相と共通)  $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 渦の存在

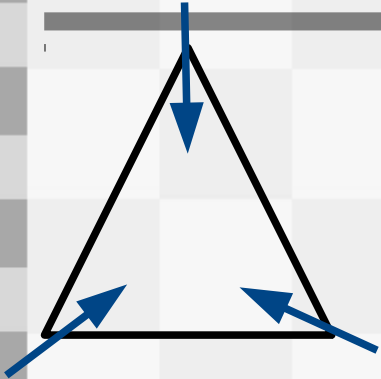


原子気体におけるKosterlitz-Thouless転移

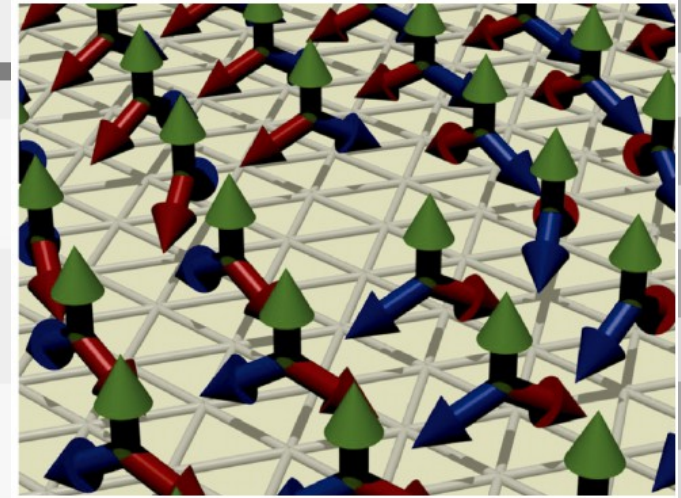


# 三角格子上反強磁性Heisenbergスピン系

H. Kawamura and S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **53** 4138 (1984).



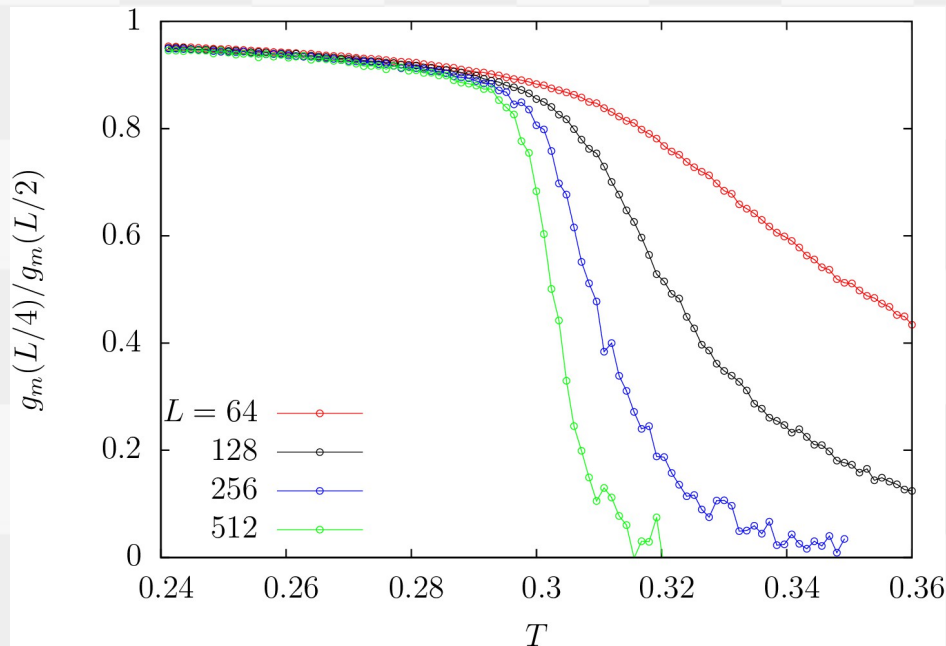
1つの3角形ユニットで $120^\circ$ 構造をとる  
 $SO(3)$ の回転自由度(spin-1 Ferro相と共通) $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 渦の存在



- 比熱のピークおよび渦密度のアレーニウス則が見えている $\rightarrow$ KT転移を示唆
- Spin-1 BEC Ferro相とは定性的に異なっている！ Frustrationの効果？
- 渦のトポロジー( $\mathbb{Z}_2$ 渦)だけでは決まらない可能性がある
- 3次元回転できる液晶は $RP^2$ の自由度があり、 $\mathbb{Z}_2$ 渦が存在する:KT転移をするか否かの長い歴史があり、未決着

# 相関関数比の計算

## 強磁性側



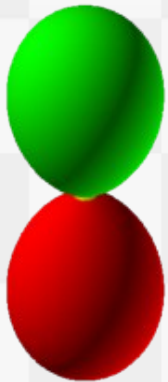
$$g_m(r) = \left\langle \sum_m \int d^2x \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right\rangle$$

相関関数比が低温側でシステムサイズに依存しなくなる:KT相同様、低温で臨界状態になっていることを示唆している  
⇒KT転移ではないがhelicity modulusではない何か別の物理量に特異性が現れているのかもしれない

# 二次ゼーマン効果の影響 (反強磁性側)

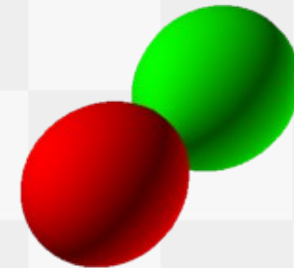
$$H = \int d^2x \left[ \sum_{m=-1}^1 (|\nabla\psi_m|^2 + qm^2|\psi_m|^2) - \mu\rho + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 \right]$$

$q > 0$   
スピン回転できない

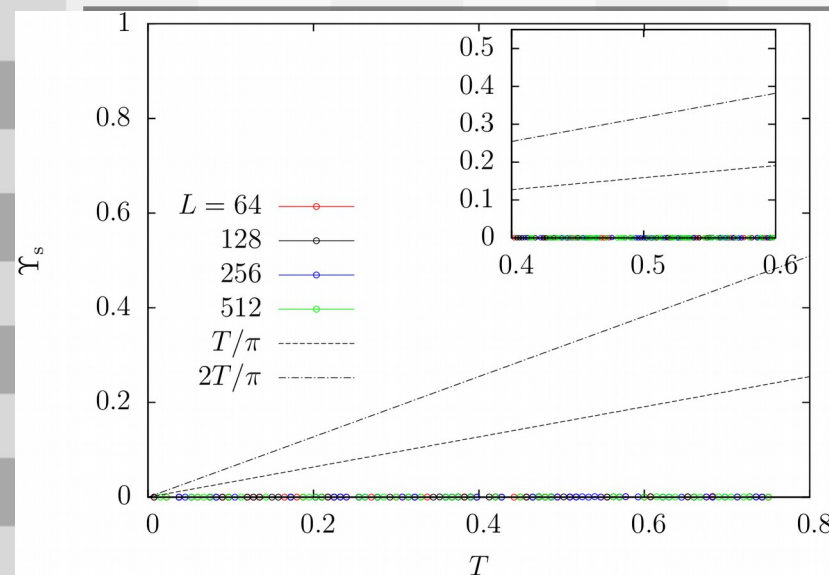


$q = 0$   
三次元スピン回転

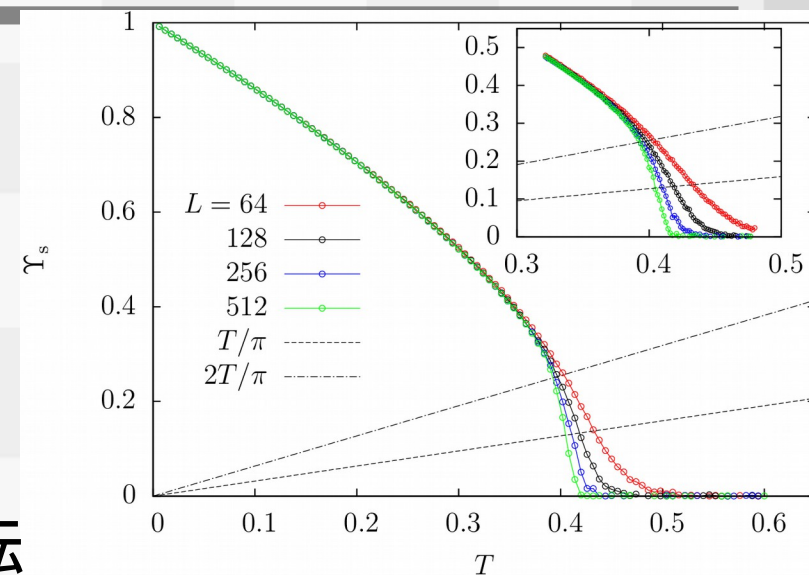
$q < 0$   
XY面内のスピン回転



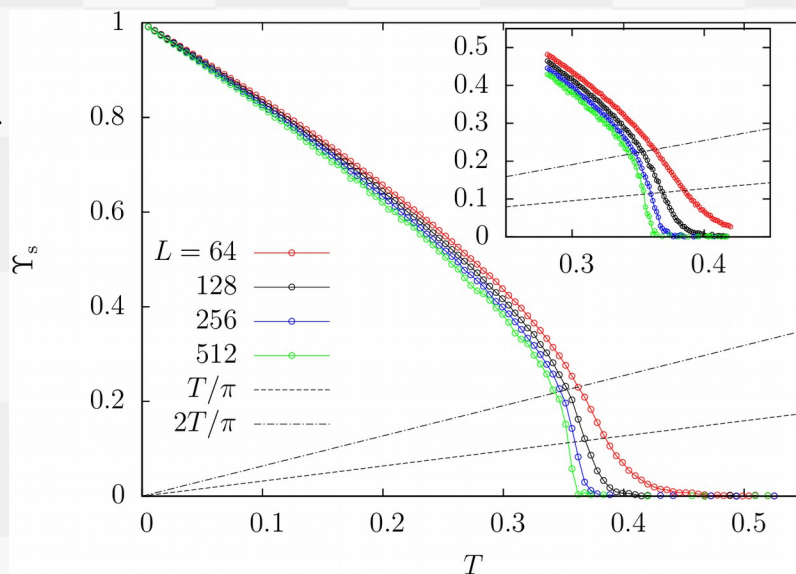
# 二次ゼーマン効果の影響 (反強磁性側)



$q=0$   
三次元スピン回転



$q>0$   
スピン回転自由度なし



$q<0$   
XY面内のスピン回転