

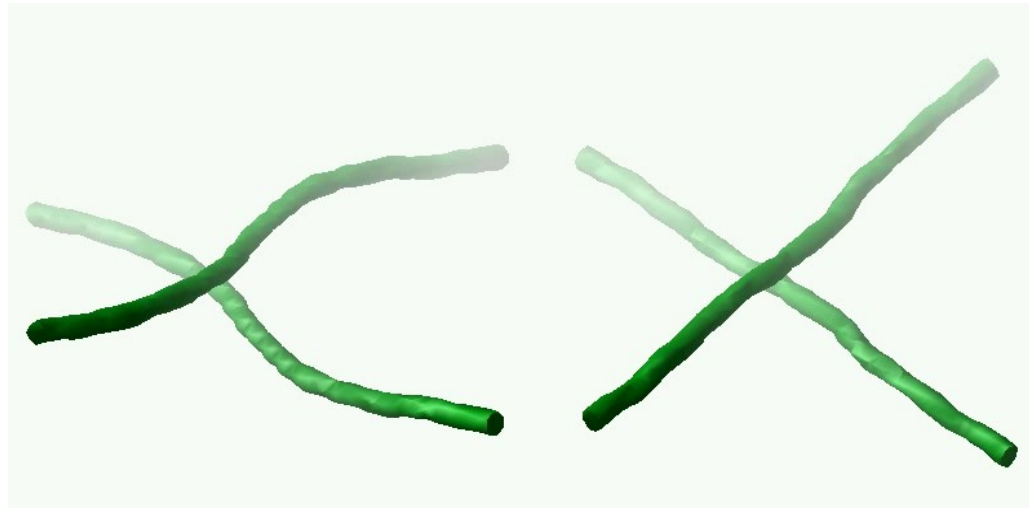
量子液体におけるトポロジカル欠陥 の非可換性および量子乱流への影響

小林未知数

京大院理

可換渦

非可換渦



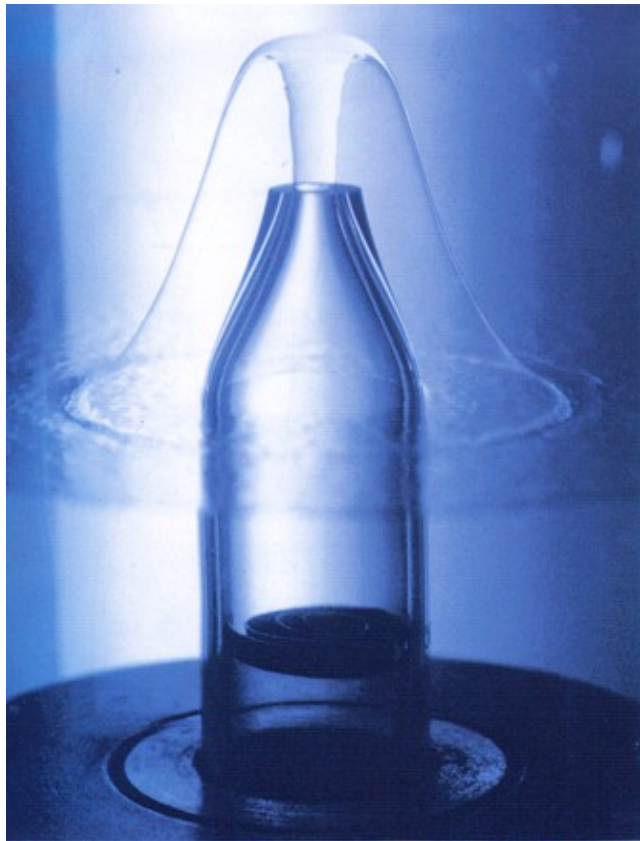
発表内容

1. 量子渦と量子乱流
2. スピノルBECにおけるトポロジカル欠陥
3. スピノルBECにおける量子乱流
4. まとめ

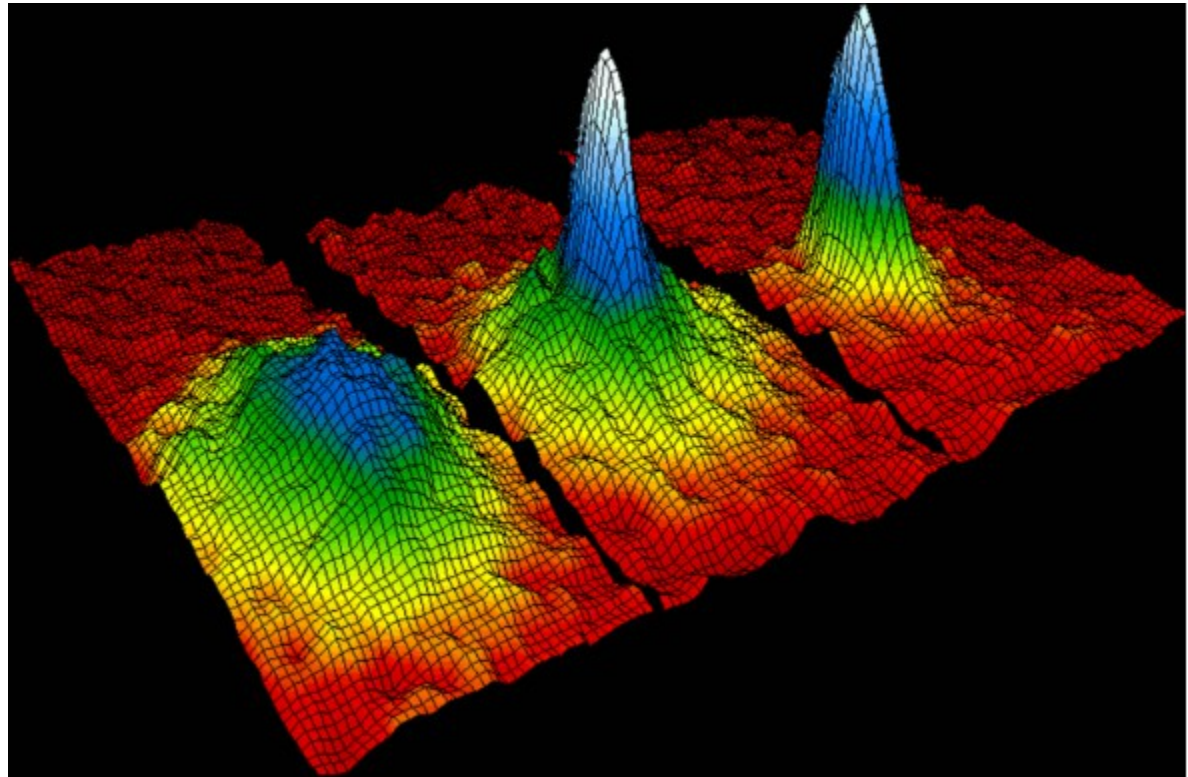
量子渦と量子乱流

量子流体と量子渦

超流動ヘリウム



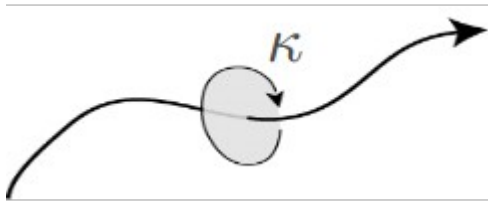
冷却原子気体
ボース・アインシュタイン凝縮



from Wikipedia

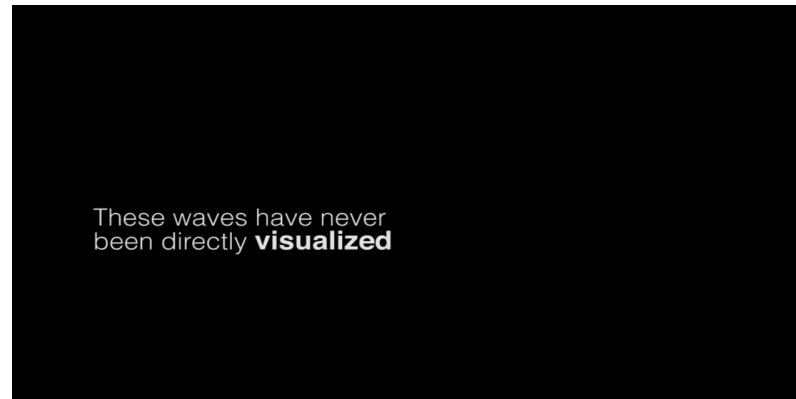
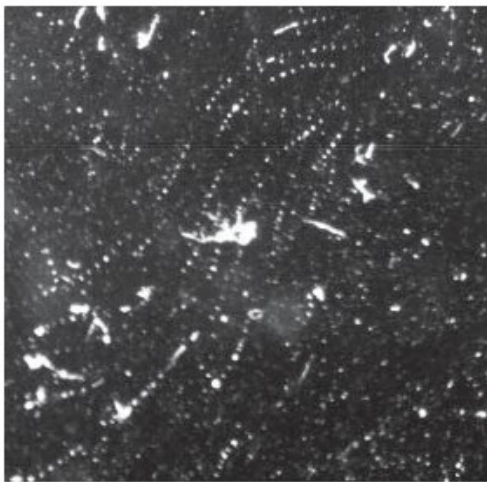
量子流体と量子渦

流体中の回転的な流れは量子渦が担っている



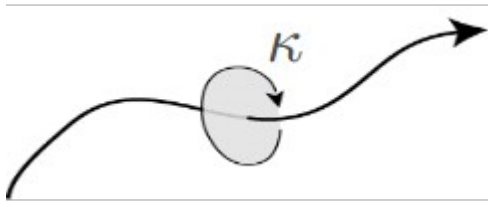
quantized circulation : $\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = h/m$

- 量子渦まわりの循環は量子化される
- 量子渦は非常に細く、渦糸近似が成り立つ
(^4He : $\sim \text{\AA}$ BEC : $\sim 0.1\mu\text{m}$)



量子流体と量子渦

流体中の回転的な流れは量子渦が担っている



quantized circulation : $\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = h/m$

- 量子渦まわりの循環は量子化される
- 量子渦は非常に細く、渦糸近似が成り立つ
(^4He : $\sim \text{\AA}$ BEC: $\sim 0.1\mu\text{m}$)



古典流体の渦とは対照的

- 循環は量子化されない
- 消えたり現れたりする不安定な存在

発達乱流に現れるコルモゴロフ則

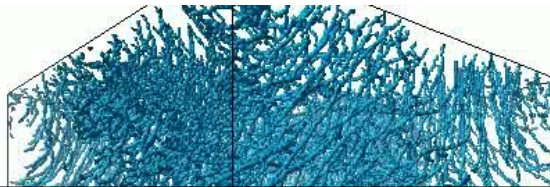
古典乱流：ナビエ・ストークス方程式

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - (1/\rho) \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

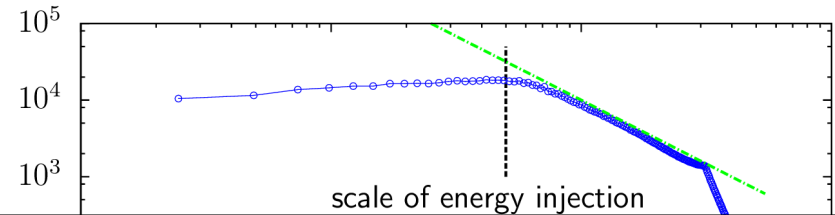
量子乱流：非線形シュレディンガー方程式

$$i \partial_t \Psi = [-\nabla^2 + |\Psi|^2] \Psi$$

両者は全く異なる
渦の性質も異なる

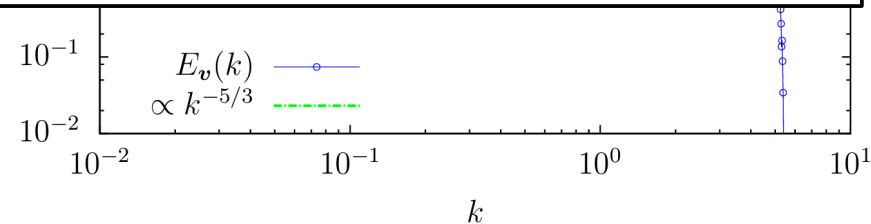
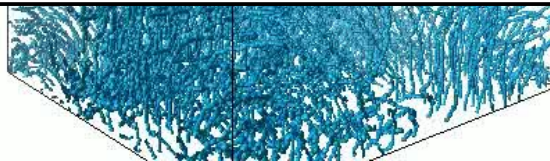


発達乱流

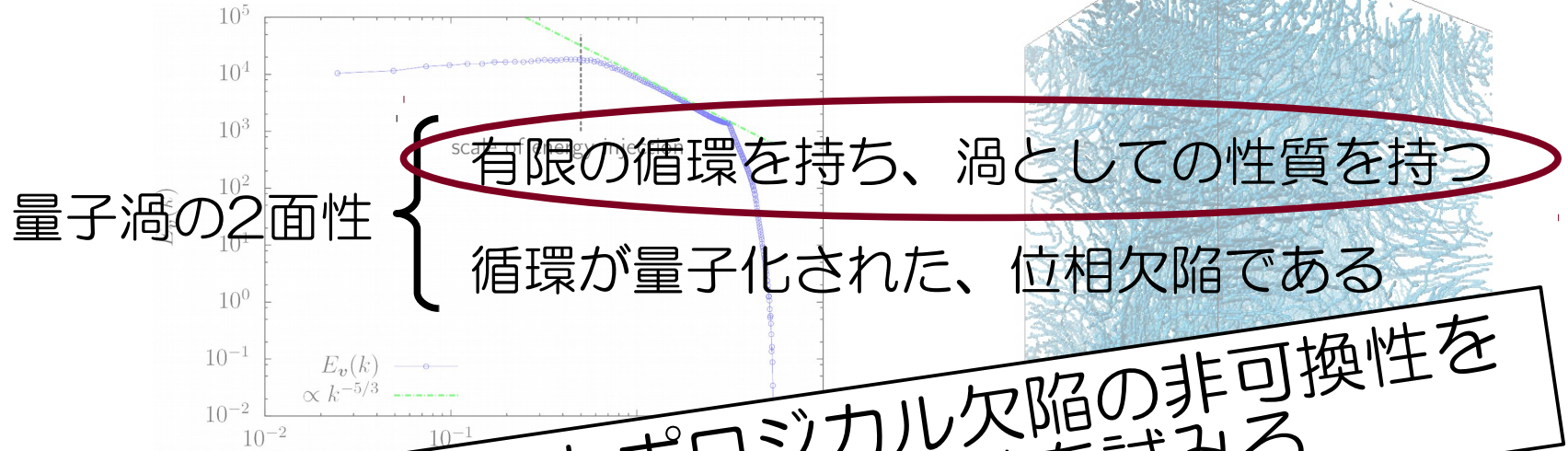


量子渦の渦としての振る舞いが古典乱流と同様のコルモゴロフ則を引き起こす

コルモゴロフ則 → 渦によって支配される乱流の普遍性クラス



発達乱流と量子渦



量子渦を含む、トポロジカル欠陥の非可換性を
用いた発達乱流の制御の可能性を試みる

トポロジカル欠陥において、量子渦の
制御が難しいと思われる



- 量子渦の量子性が現れる発達乱流は可能か？
- 量子渦の量子性により、発達乱流は制御可能か？

発達乱流と量子渦

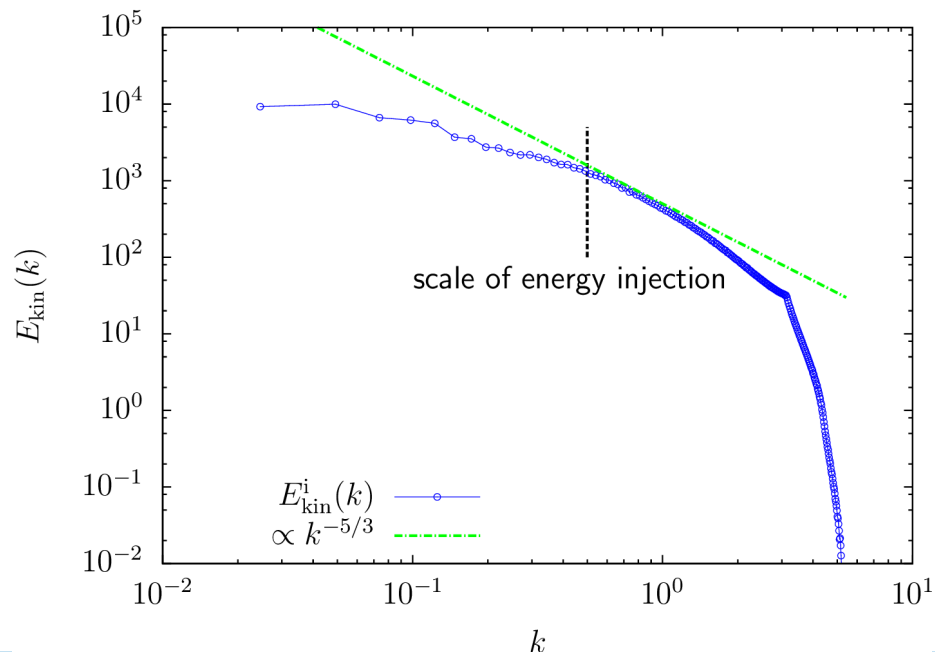
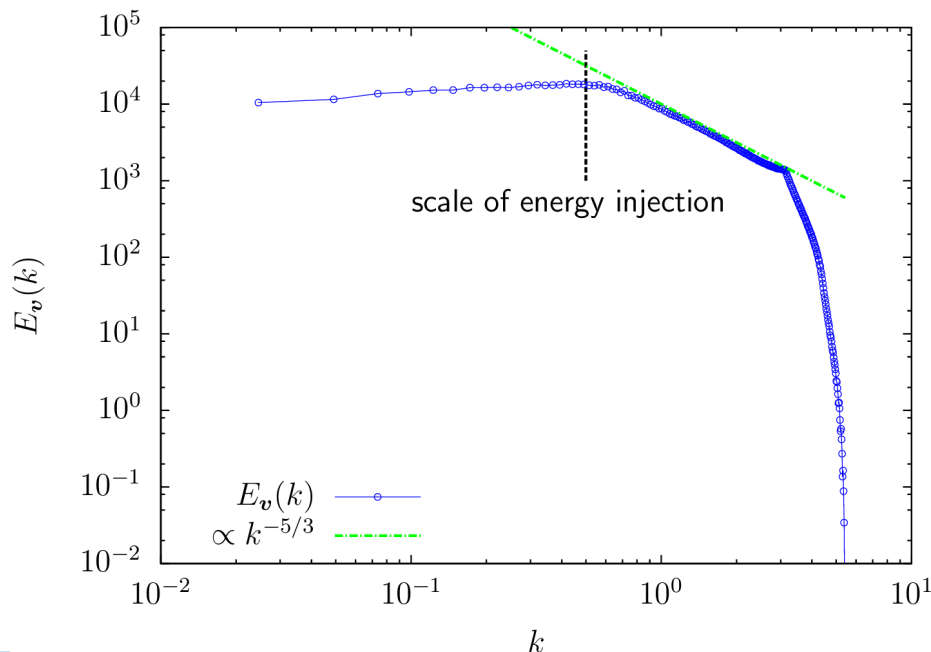
量子渦の2面性

有限の循環を持ち、渦としての性質を持つ

循環が量子化された、位相欠陥である

$$i\partial_t\psi = [-\nabla^2 + g|\psi|^2]\psi$$

$$-\partial_{tt}\psi = [-\nabla^2 + g|\psi|^2]\psi$$

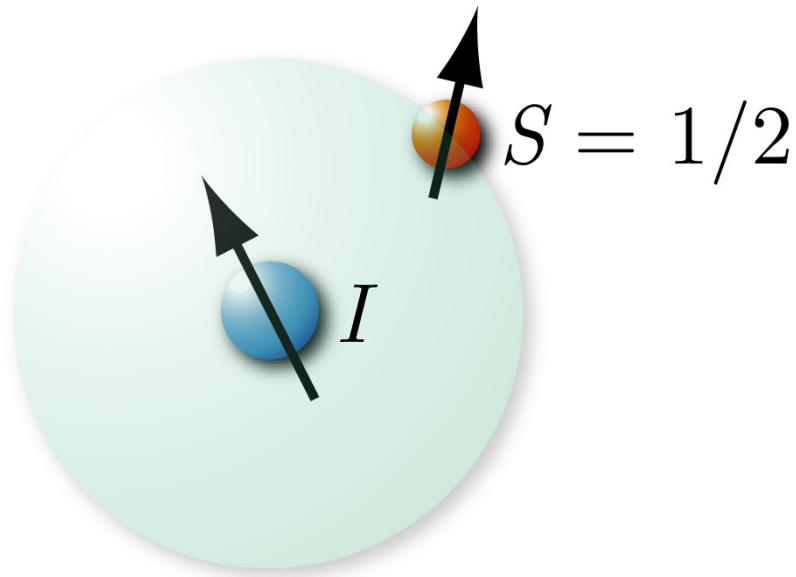


スピノルBECにおける トポロジカル欠陥

スピノルBEC

原子のスピン自由度が生きているような原子気体BECを考える

超微細相互作用により核と電子のスピンが結合する($F = I + S + L$)



$^{87}\text{Rb}, ^{23}\text{Na}, ^7\text{Li}, ^{41}\text{K}$	$F = 1, 2$
^{85}Rb	$F = 2, 3$
^{133}Cs	$F = 3, 4$
^{52}Cr	$S = 3, I = 0$

スピノルBEC

原子のスピン自由度が生きているような原子気体BECを考える

$$\psi = (\psi_s \quad \psi_{s-1} \quad \cdots \quad \psi_0 \quad \psi_{-1} \quad \cdots \quad \psi_{-s})^T : \text{spin-}s \text{ system}$$

$$h = \sum_{s=-1}^1 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 : \text{spin-1}$$

$$h = \sum_{s=-2}^2 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 + \frac{g_2}{2}|A_{20}|^2 : \text{spin-2}$$

$$\rho = \psi^\dagger\psi : \text{density} \quad \mathbf{S} = \psi^\dagger\hat{\mathbf{S}}\psi : \text{spin density}$$

$$A_{20} = \sum_s (-1)^{-1}\psi_s\psi_{-s} : \text{singlet-pair density}$$

q : coefficient for quadratic Zeeman effect

スピノルBECのトポロジカル欠陥

- 面欠陥：磁壁・ドメインウォール
- 線欠陥：量子渦
- 点欠陥：モノポール

異なる種類の欠陥間の非可換性を通して、トポロジカルな相互作用が働く場合がある

- 磁壁 & 量子渦 → ブレーンソリトン (spin-1 ferro-Ising)
- 量子渦 & 量子渦 → 非可換量子渦 (spin-2 cyclic)
- ~~モノポール & 量子渦 → アリスリング (spin-1 polar)~~

スピノルBECのトポロジカル欠陥

- 面欠陥：磁壁・ドメインウォール
- 線欠陥：量子渦
- 点欠陥：モノポール

異なる種類の欠陥間の非可換性を通して、トポロジカルな相互作用が働く場合がある

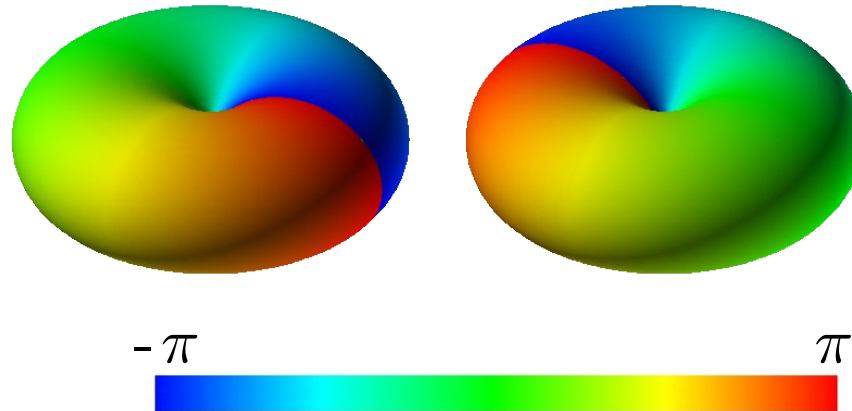
- 磁壁 & 量子渦 → ブレーンソリトン (spin-1 ferro-Ising)
- 量子渦 & 量子渦 → 非可換量子渦 (spin-2 cyclic)
- ~~モノポール & 量子渦 → アリスリング (spin-1 polar)~~

磁壁—量子渦乱流

$$h = \sum_{s=-1}^1 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2 \quad g_1 < 0 \quad q < 0$$

ferro-Ising phase

ground state : $(1 \ 0 \ 0)$ or $(0 \ 0 \ 1)$



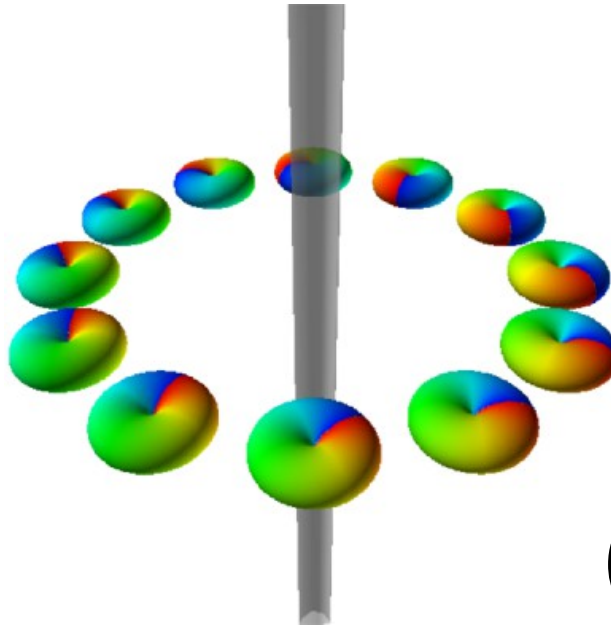
order-parameter manifold : $U(1) \times \mathbb{Z}_2$

磁壁—量子渦乱流

$$h = \sum_{s=-1}^1 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathcal{S}^2$$

$g_1 < 0 \quad q < 0$
ferro-Ising phase

量子渦



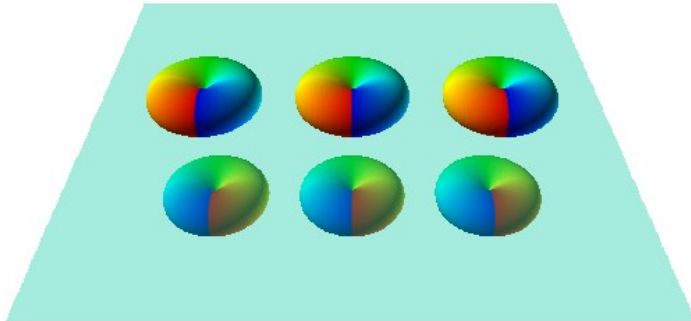
$$(e^{i\theta} \quad 0 \quad 0)$$

磁壁—量子渦乱流

$$h = \sum_{s=-1}^1 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathbf{S}^2$$

$g_1 < 0 \quad q < 0$
ferro-Ising phase

磁壁



$$\sqrt{\frac{1}{1+e^{2z}}} (1 \quad 0 \quad e^z) \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & z \rightarrow -\infty \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & z \rightarrow \infty \end{cases}$$

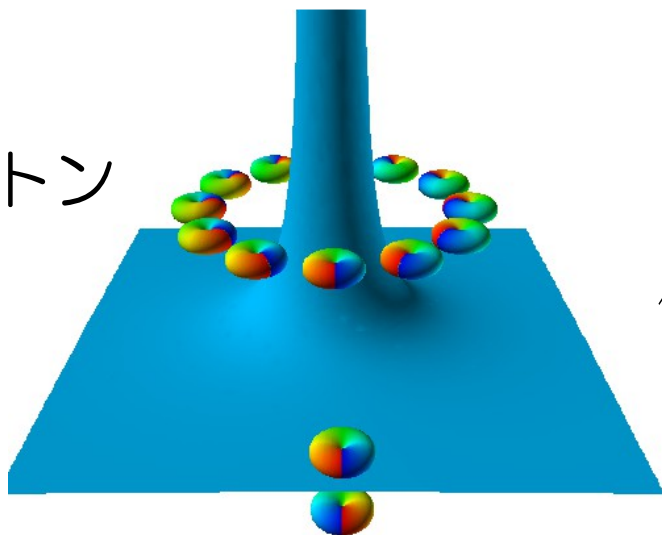
磁壁—量子渦乱流

$$h = \sum_{s=-1}^1 (|\nabla\psi_s|^2 + qs^2|\psi_s|^2) + \frac{g_0}{2}\rho^2 + \frac{g_1}{2}\mathcal{S}^2$$

$$g_1 < 0 \quad q < 0$$

ferro-Ising phase

ブレーンソリトン



$$\sqrt{\frac{1}{1+e^{2z}}} (f(r)e^{i\theta} \quad 0 \quad e^z)$$

バルク中の渦が磁壁で消えてブレーンソリトンとなる
→磁壁上における回転流を与える

バルクの回転流 (3D) : 量子渦

磁壁上の回転流 (2D) : ブレーンソリトン

磁壁—量子渦乱流

非線形シュレディンガー方程式における
量子乱流シミュレーション

$$(i - \gamma)\partial_t\psi = -\nabla^2\psi + \frac{\delta h_{\text{int}}}{\delta\psi^\dagger}$$



局所ガリレイ変換

$$(i - \gamma)\partial_t\psi = [-\nabla^2 + (i - \gamma)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla]\psi + \frac{\delta h_{\text{int}}}{\delta\psi^\dagger}$$

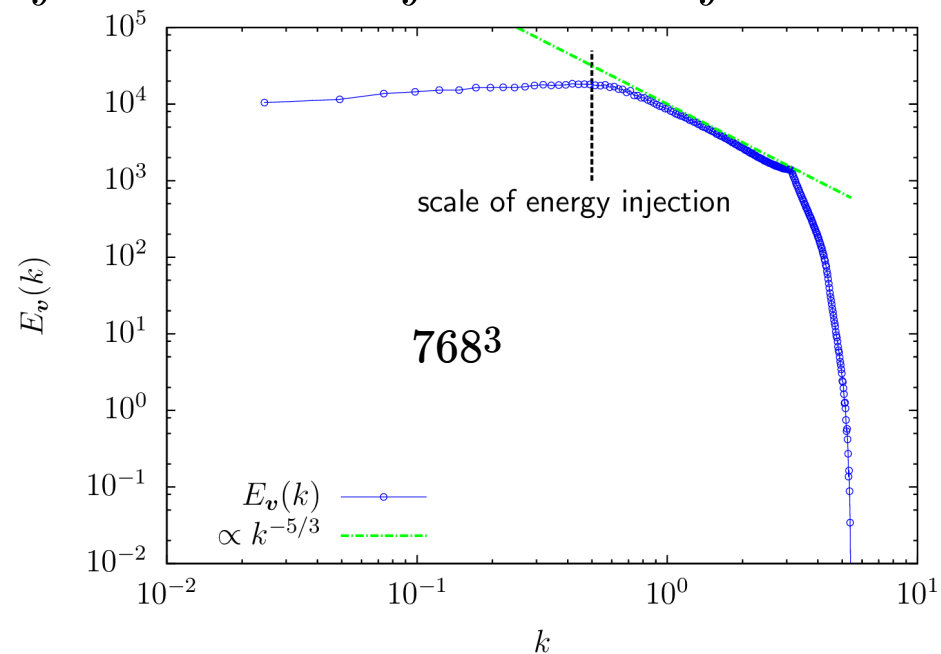
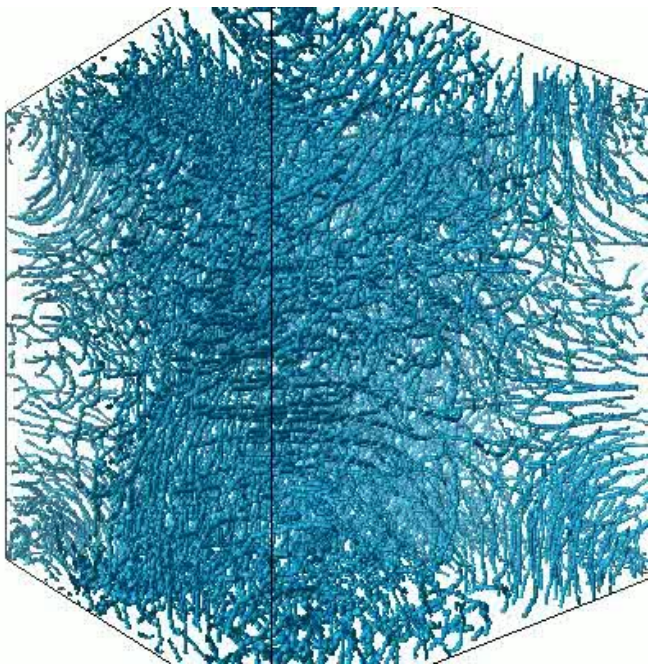
- 空間的に滑らかに変化する $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (かつ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$)
- $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ に対するアンサンブル平均

磁壁—量子渦乱流

$$(i - \gamma)\partial_t\psi = [-\nabla^2 + (i - \gamma)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla]\psi + \frac{\delta h_{\text{int}}}{\delta\psi^\dagger}$$

スカラー-BEC

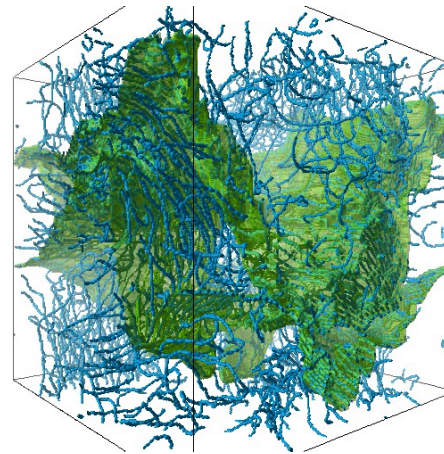
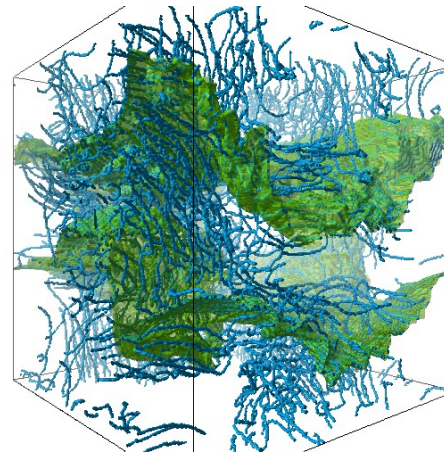
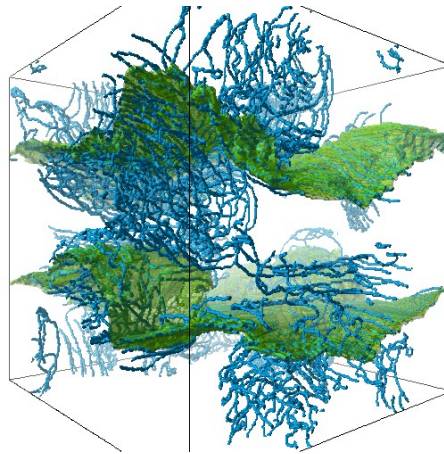
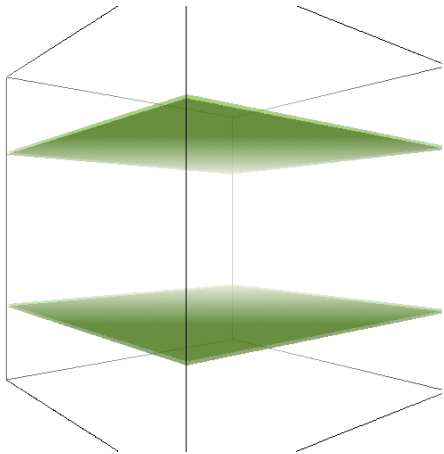
$$\int d\mathbf{x} \|\psi\|\nabla\varphi|^2 / \int d\mathbf{x} |\psi|^2 = \int dk E_v(k)$$



磁壁—量子渦乱流

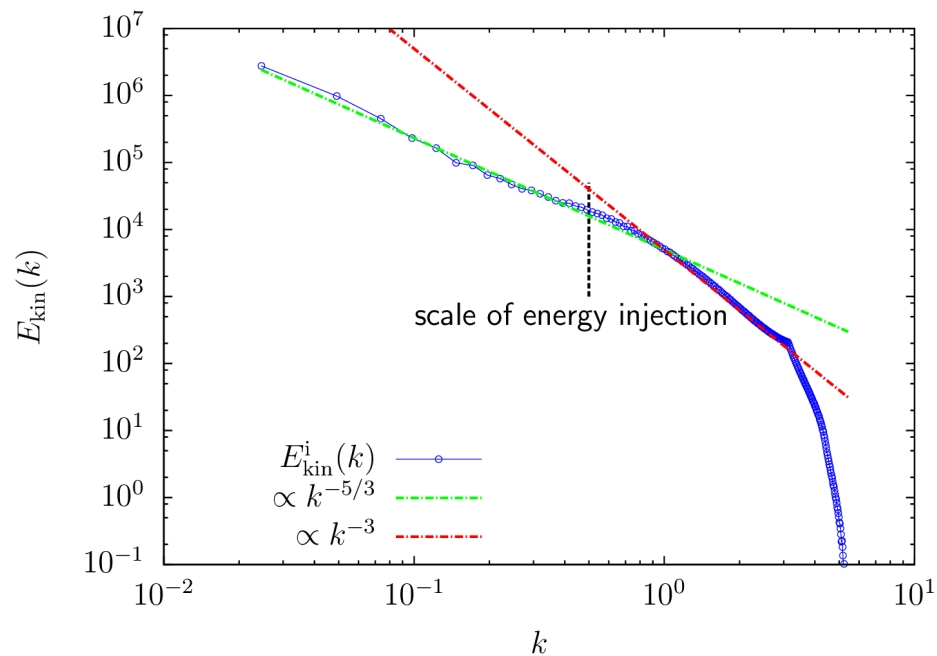
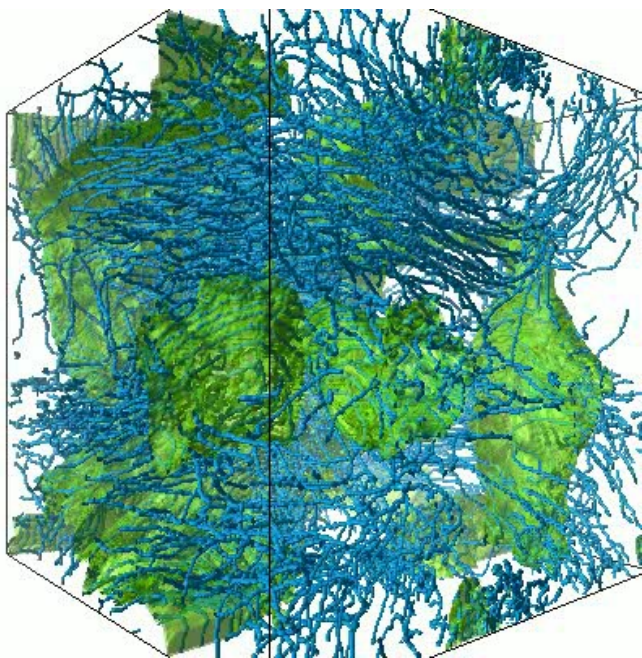
$$(i - \gamma)\partial_t\psi = [-\nabla^2 + (i - \gamma)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla]\psi + \frac{\delta h_{\text{int}}}{\delta\psi^\dagger}$$

ferro-ising



磁壁—量子渦乱流

$$(i - \gamma)\partial_t\psi = [-\nabla^2 + (i - \gamma)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla]\psi + \frac{\delta h_{\text{int}}}{\delta\psi^\dagger}$$



外力よりも大きなスケールにおけるコルモゴロフ則
および小さなスケールにおける k^{-3} の振る舞い

スピノルBECのトポロジカル欠陥

- 面欠陥：磁壁・ドメインウォール
- 線欠陥：量子渦
- 点欠陥：モノポール

異なる種類の欠陥間の非可換性を通して、トポロジカルな相互作用が働く場合がある

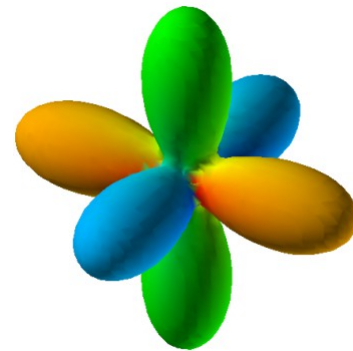
- 磁壁 & 量子渦 → ブレーンソリトン (spin-1 ferro-Ising)
- 量子渦 & 量子渦 → 非可換量子渦 (spin-2 cyclic)
- ~~モノポール & 量子渦 → アリスリング (spin-1 polar)~~

非可換量子渦乱流

$$h = \sum_{s=-2}^2 |\nabla \psi_s|^2 + \frac{g_0}{2} \rho^2 + \frac{g_1}{2} \mathbf{S}^2 + \frac{g_2}{2} |A_{20}|^2 \quad g_1 > 0 \quad g_2 > 0$$

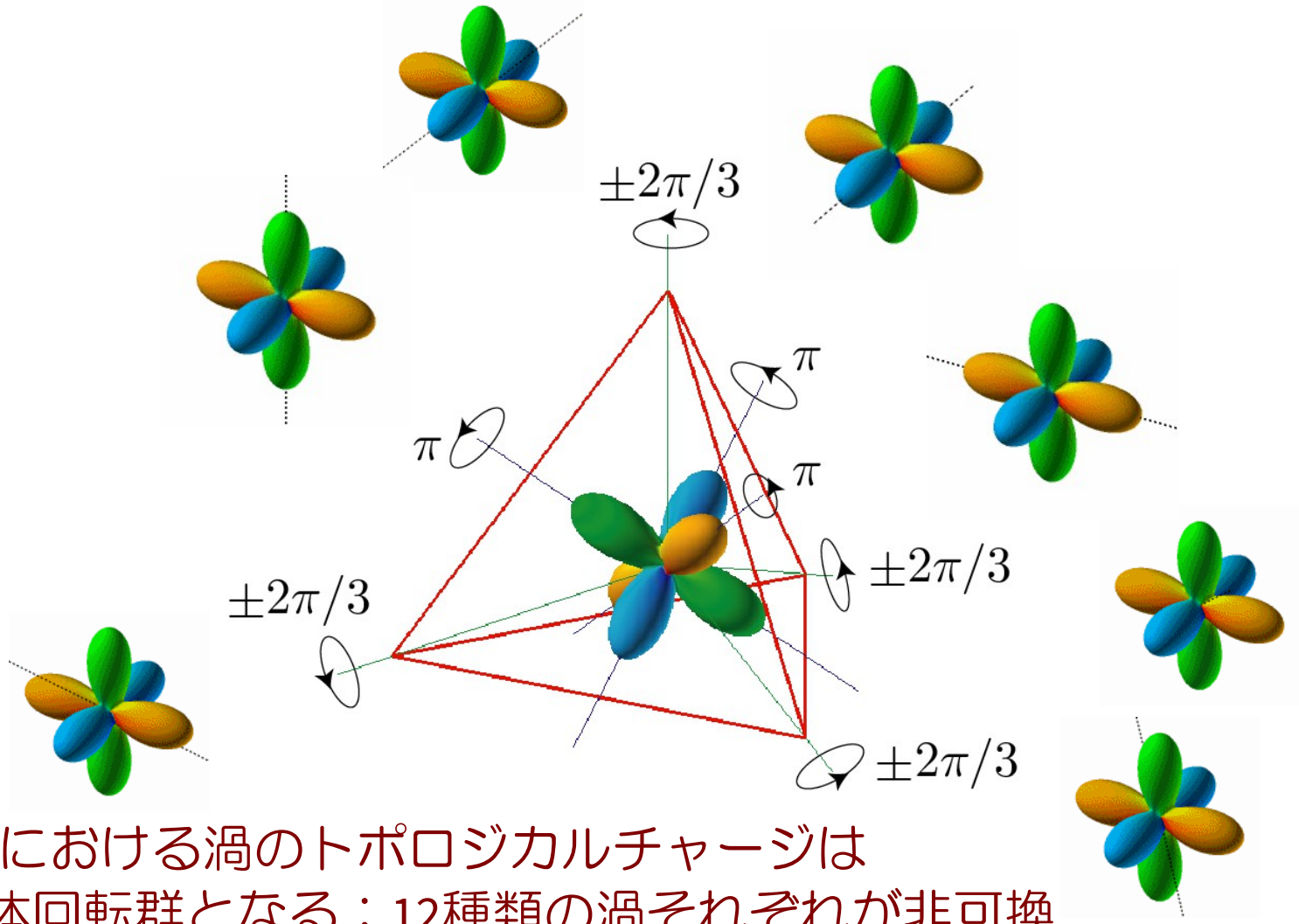
cyclic

ground state : $(i \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 0 \quad i) / 2$



order-parameter manifold : $\frac{U(1) \times SO(3)}{\mathbb{Z}_2}$ 正四面体回転群

非可換量子渦乱流



cyclic相における渦のトポロジカルチャージは
正四面体回転群となる：12種類の渦それぞれが非可換

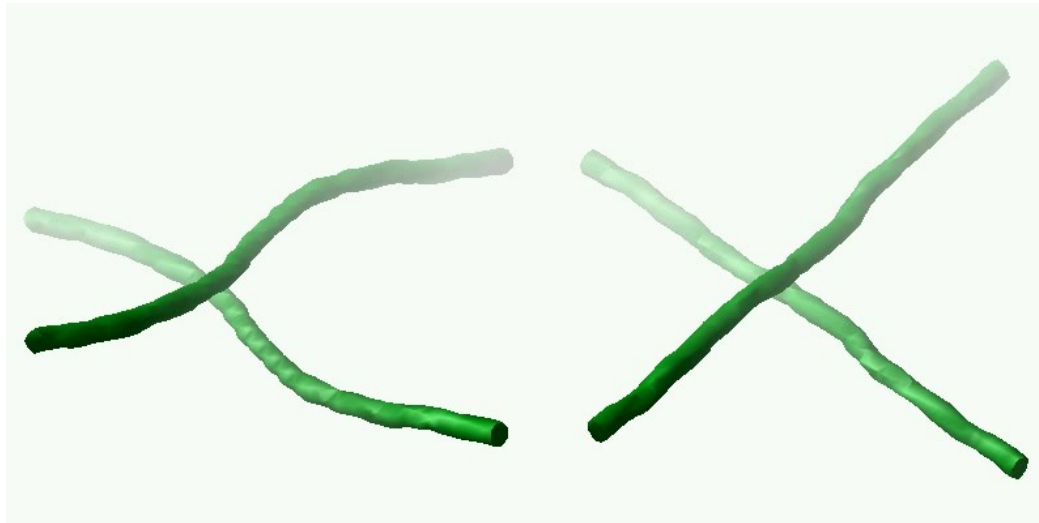
量子流体におけるトポロジカル欠陥の非可換性および量子乱流への影響

非可換量子渦乱流

渦の衝突ダイナミクス

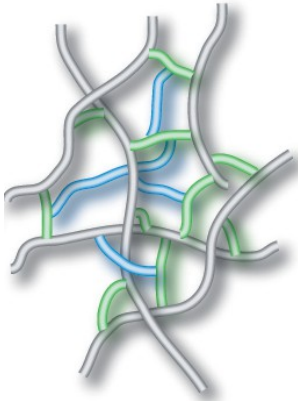
可換なペア

非可換渦なペア

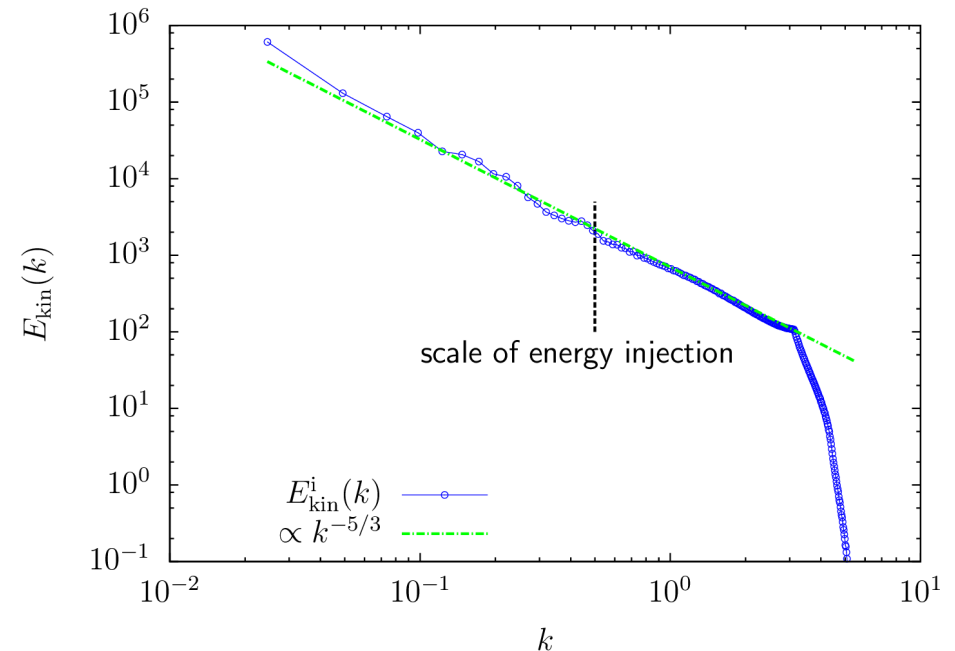
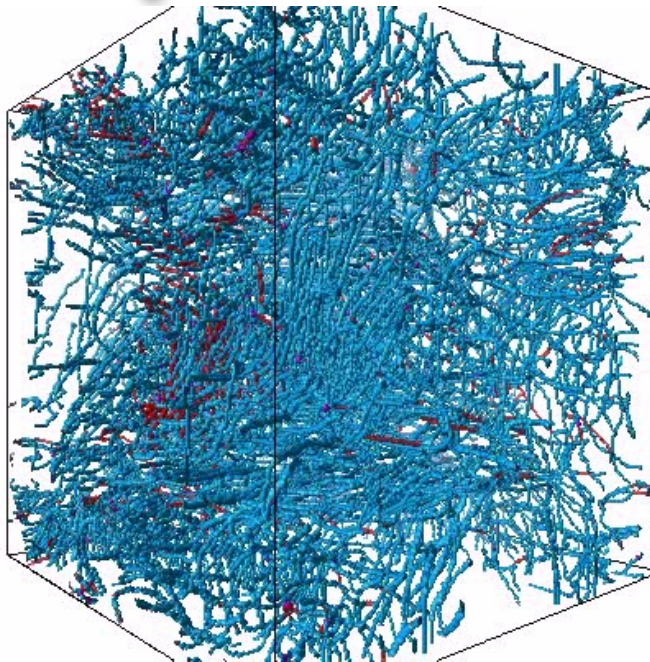


渦の非可換性に応じて、渦と渦の間に新しい渦が形成される

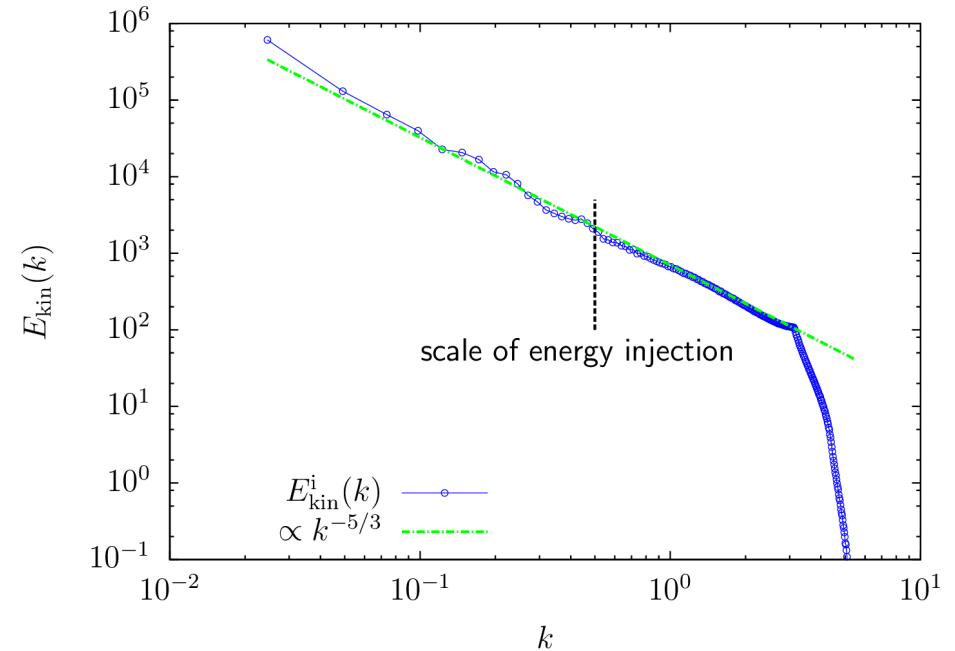
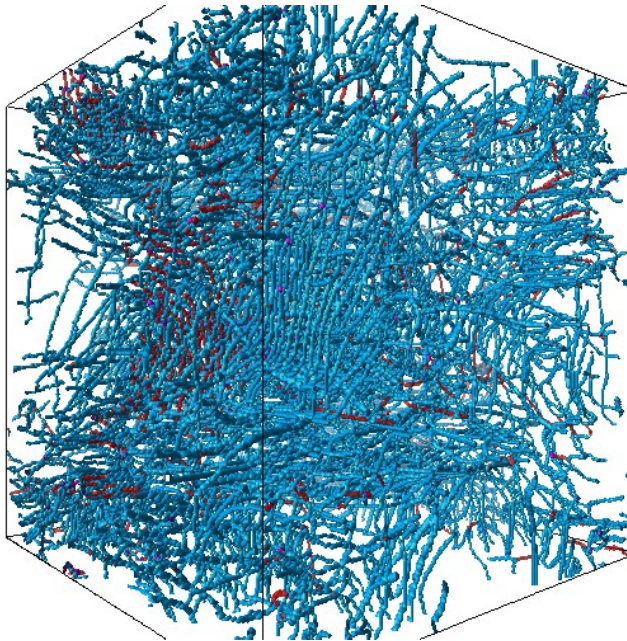
非可換量子渦乱流



乱流状態では渦の大規模なネットワーク構造が期待される



非可換量子渦乱流



外力よりも大きなスケールまでコルモゴロフ則が満たされる
(渦のネットワーク形成による逆カスケード?)

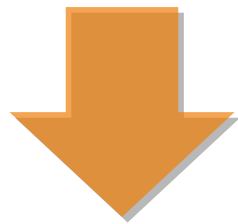
まとめ

量子渦と非可換な相互作用をするトポロジカル欠陥が発達乱流の統計性に与える影響を調べた

- 磁壁と量子渦 → $k^{-5/3}$ (低波数) と k^{-3} (高波数) との共存
- 量子渦同士 (非可換渦) → 長いレンジに渡る $k^{-5/3}$
- 量子渦とモノポール → 平均モノポール間距離を境に異なるスペクトル
- 量子渦と可換 → スカラー-BECと同じ
- 今後の課題: エネルギーフラックスの統計性

量子乱流研究の新時代

超流動ヘリウムで実現される量子乱流は低温物理学において重要なトピックスの一つだった



量子乱流において古典乱流との類似性が発見された

- 量子乱流：量子渦が示す普遍構造
- 乱流を量子渦の視点から要素還元的に理解できる

量子乱流研究分野は低温物理学を超えて新しい時代を迎えようとしている