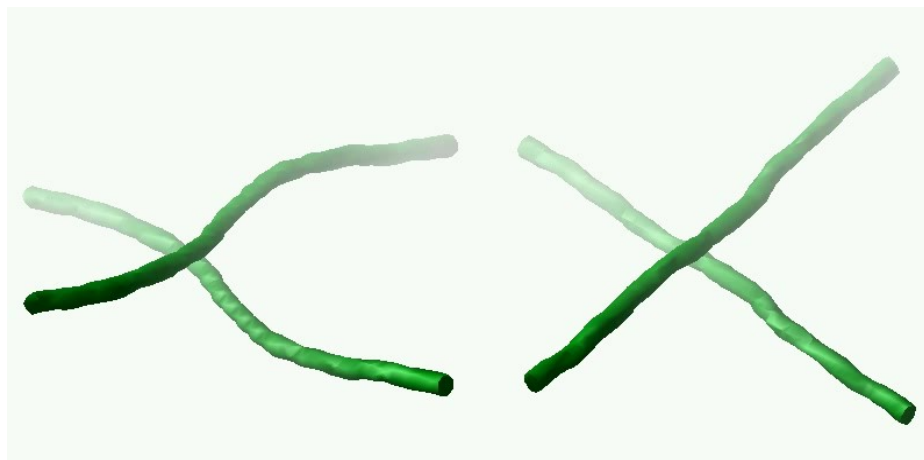


スピノル・ボース・アインシュタイン凝縮とヘリシティ

小林未知数 京大院理

可換渦

非可換渦

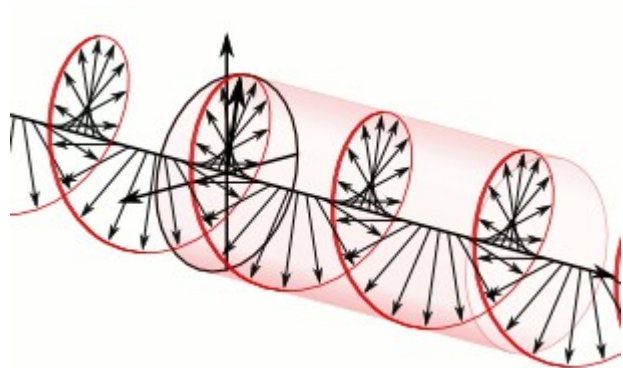


2016年3月19日 日本物理学会第71回年次大会
シンポジウム「ヘリシティ」

ヘリシティとは

P : Parity R : rotation T : time reversal

P broken \rightarrow カイラリティ $\left. \begin{array}{l} P \text{ broken} \\ R \times T \text{ unbroken} \end{array} \right\} \rightarrow$ ヘリシティ



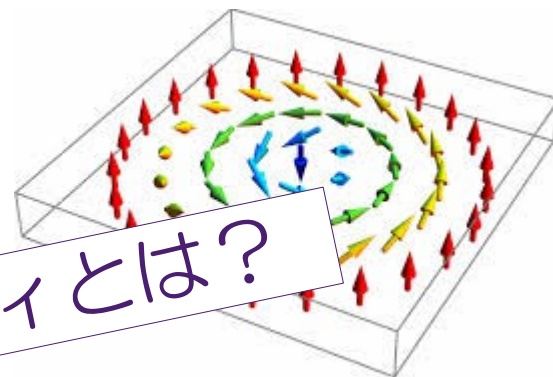
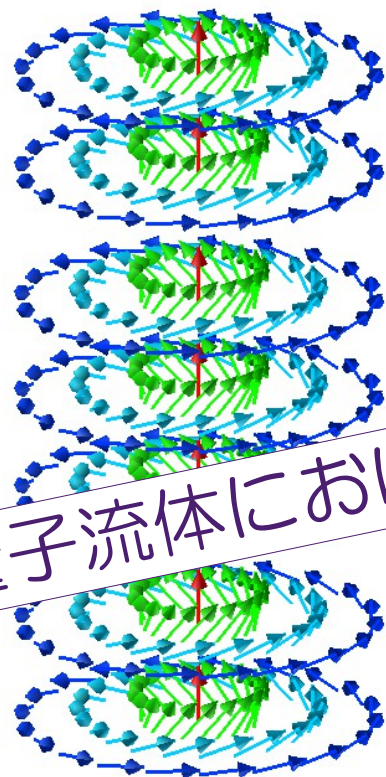
例：

円偏光した光 \rightarrow スピン
ラゲール・ガウス光 \rightarrow 軌道角運動量

ヘリシティとは

流体におけるヘリシティ

$$H = \int d^3x \underbrace{\mathbf{v}}_{\text{並進}} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{v})}_{\text{回転}} : \text{corkscrew-like flow}$$



量子流体におけるヘリシティとは？

カイラル磁性体中の
カイラルスカーミオンと
同じような構造

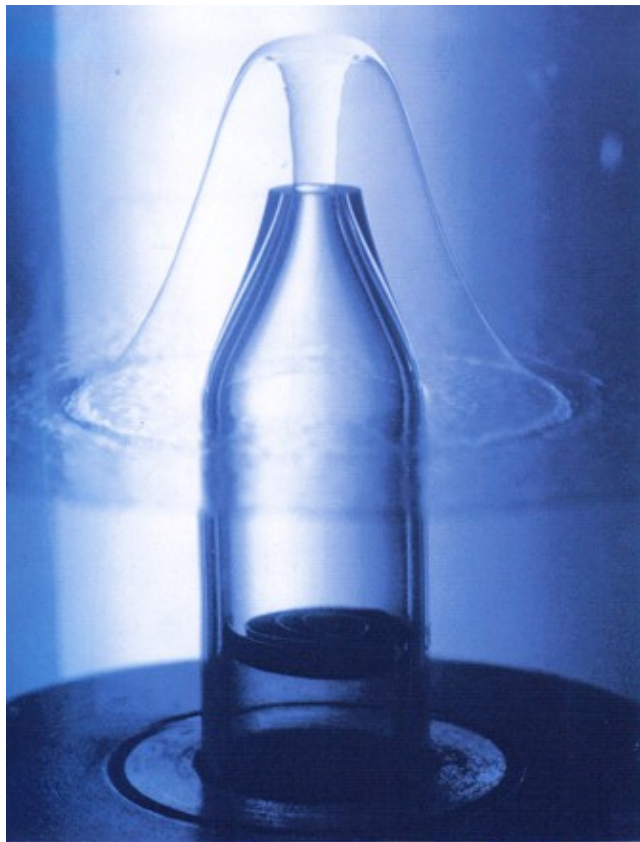
発表内容

1. ボース・アインシュタイン凝縮と量子渦
2. スカラーBECとヘリシティ
3. スピノルBECとヘリシティ
4. まとめ

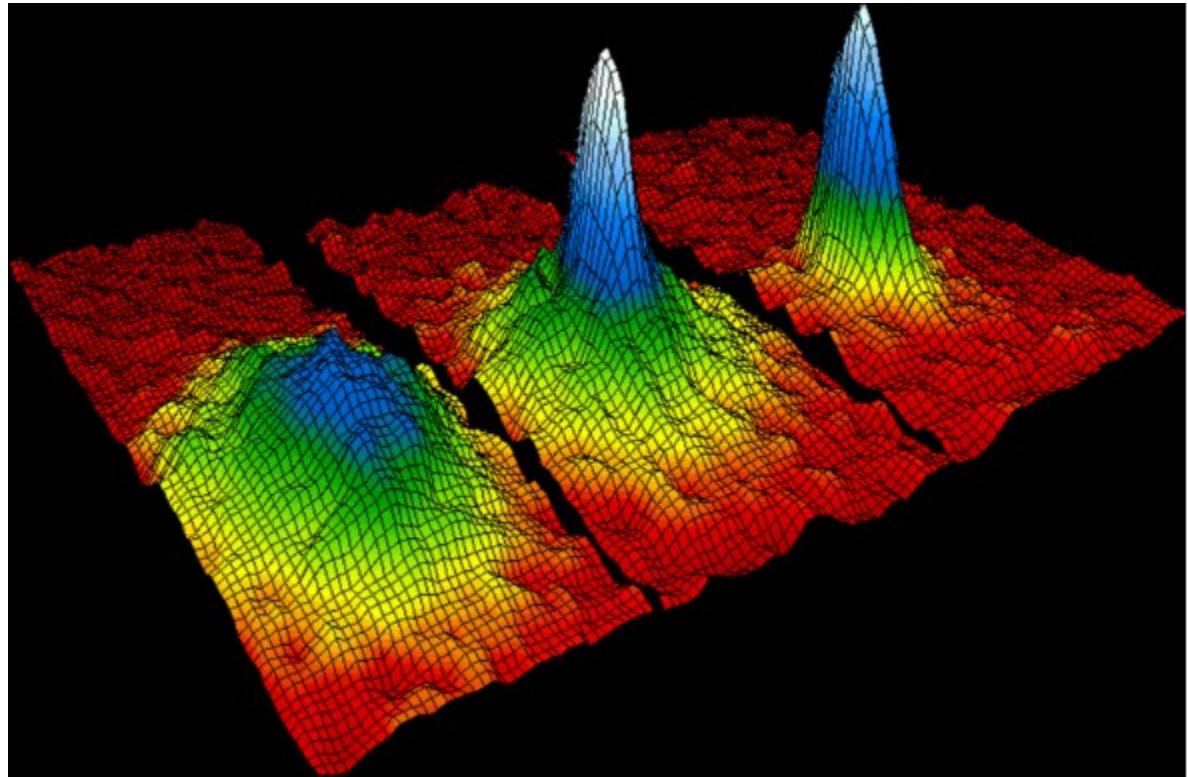
ボース・アインシュタイン 凝縮と量子渦

量子流体と量子渦

超流動ヘリウム



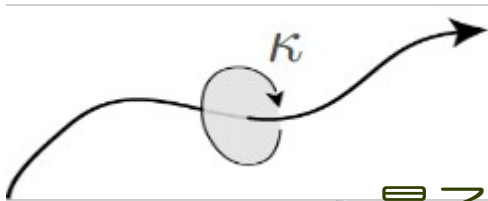
冷却原子気体
ボース・アインシュタイン凝縮



from Wikipedia

量子流体と量子渦

流体中の回転的な流れは量子渦が担っている



$$\text{quantized circulation : } \kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = h/M$$

- 量子渦まわりの循環は量子化される
- 渦芯は細い (4He : $\sim \text{\AA}$ BEC : $\sim 0.1\mu\text{m}$)

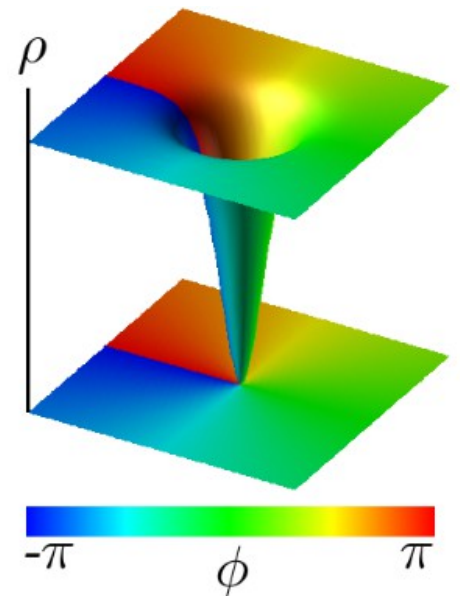
$U(1)$ 対称性の破れ (ボース凝縮) による
オーダーパラメーター ψ の出現

$$\psi = |\psi| e^{i\phi}$$

$$\rho = |\psi|^2 : \text{superfluid density}$$

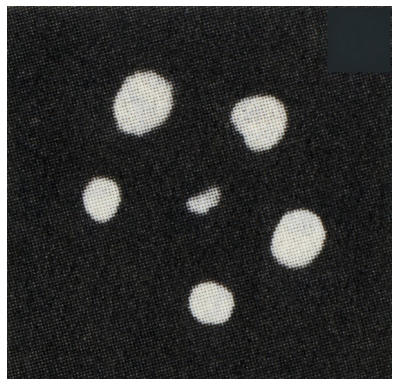
$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{2\pi} \nabla \phi : \text{superfluid velocity}$$

位相欠陥としての
量子渦

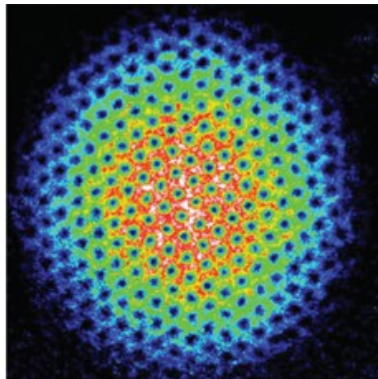


量子渦の生成

回転

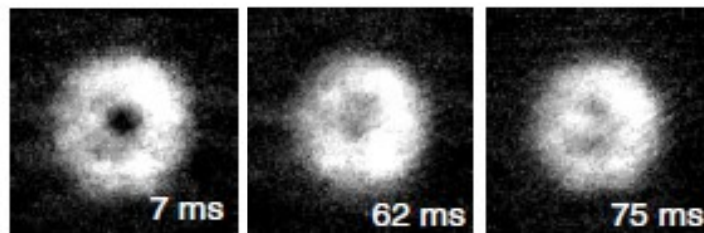


Yarmchuk et. al.
PRL **43** 214 (1979)



K. W. Madison et al.
PRL **86**, 4443 (2001)

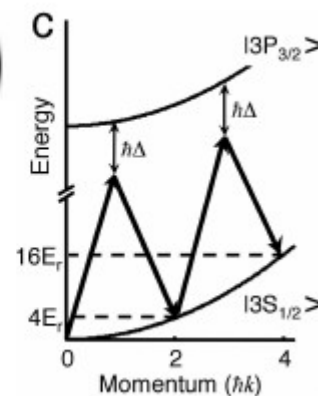
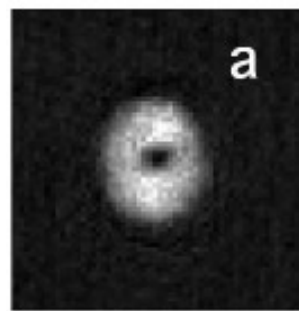
スピン流から質量流への変換 (phase imprint)



Y. Shin, et al. PRL **93**, 160406 (2004)

ラゲールガウス光との相互作用 (光のヘリシティ → 粒子の角運動量)

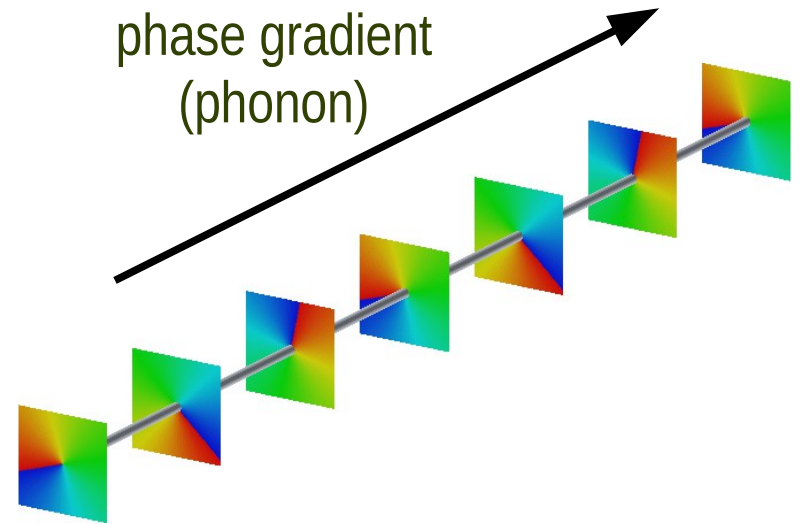
M. F. Andersen, et al.
PRL **97**, 170406 (2006)



スカラー-BECとヘリシティ

ヘリシティは量子渦に局在する

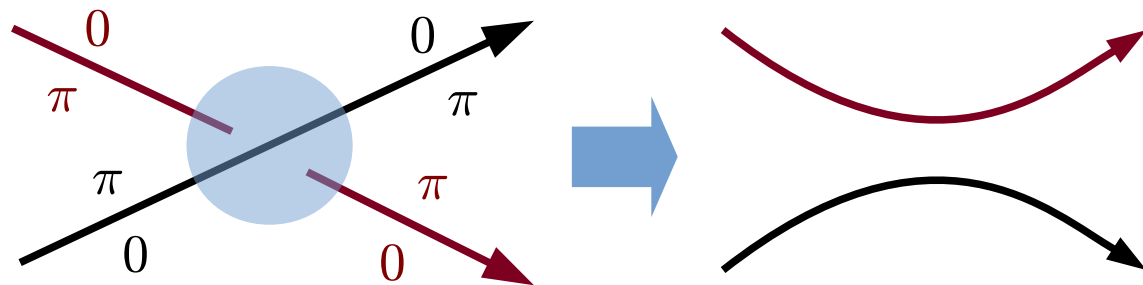
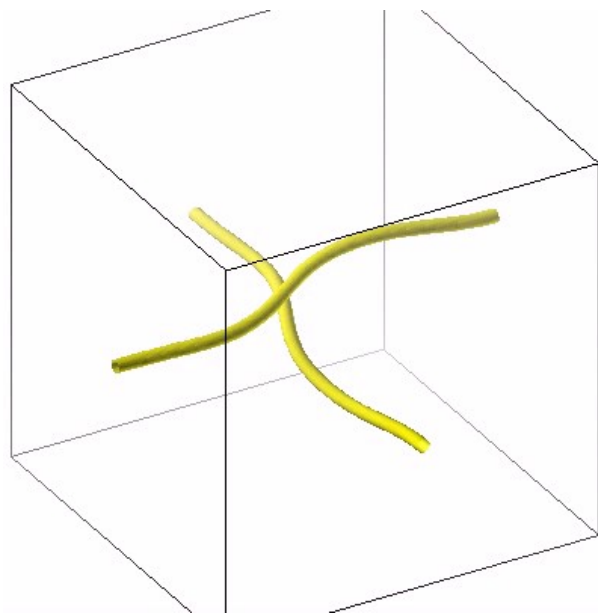
$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int d^3x \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}_0(z)) \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int dz \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} v_z(\mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^2 \int dz \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0(z)} \partial_z \phi(\mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^2 \{ \phi(\mathbf{r}_0(z_+)) - \phi(\mathbf{r}_0(z_-)) \} \end{aligned}$$



ヘリシティは渦芯に沿った渦芯近傍の位相変化量に相当する

ヘリシティ・再結合・ケルビン波

量子渦の再結合



- ケルビンの循環定理が破れる
- ヘリシティの保存が破れる
- ケルビン波が励起される

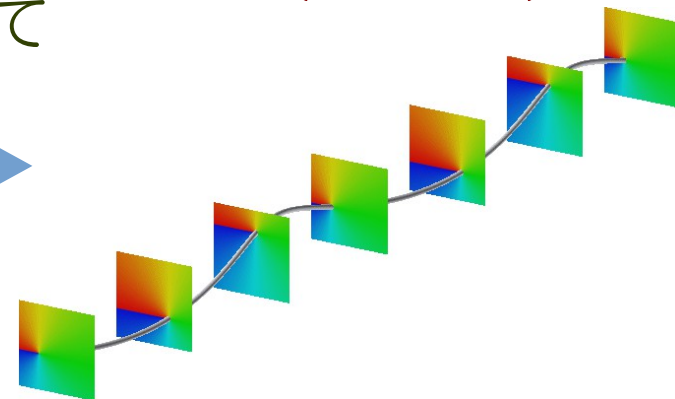
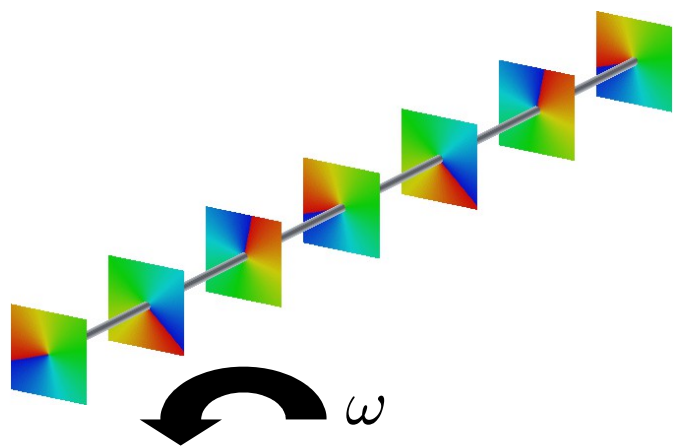
スカラーBECでは (外から与え続けると) 渦の再結合を通してヘリシティは保存量ではない (古典流体ではケルビンの循環定理が成り立たない) スカラーBECにおいてヘリシティは連続に増減する (スピノル・ボース・アインシュタイン凝縮とヘリシティ)

ヘリシティ・再結合・ケルビン波

流体ヘリシティ
(位相勾配)

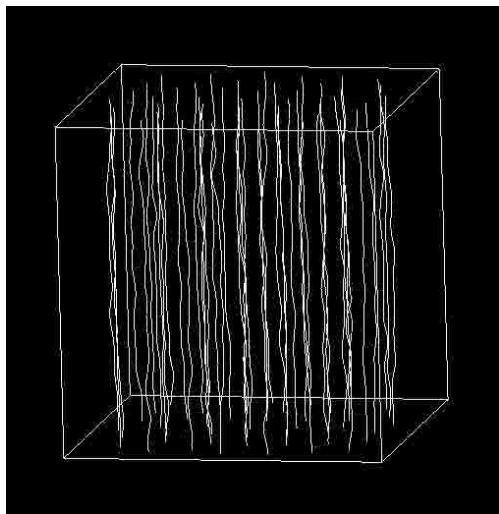
ケルビン波
(並進勾配)

再結合を通して
変換



ネットなヘリシティからケルビン波が励起され、
再結合を通して渦のヘリシティが増加する
(Donnelly-Glaberson instability)

M. Tsubota et. al PRL **90**, 205301 (2003)

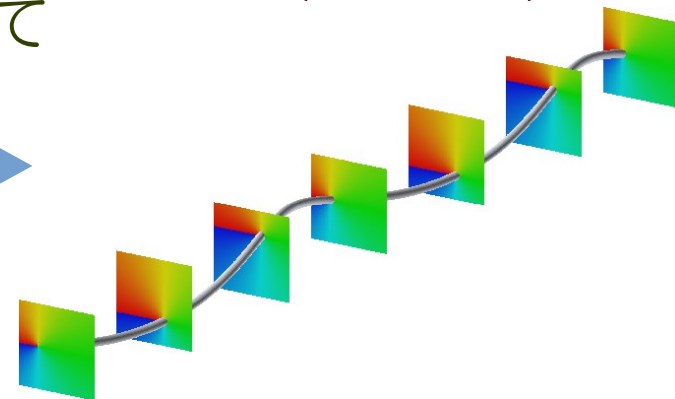
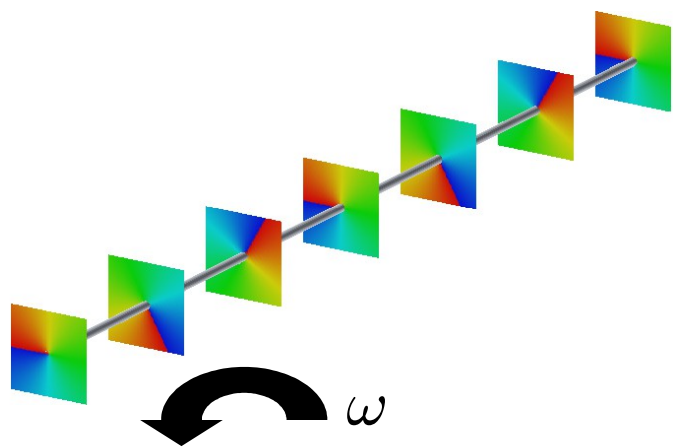


ヘリシティ・再結合・ケルビン波

流体ヘリシティ
(位相勾配)

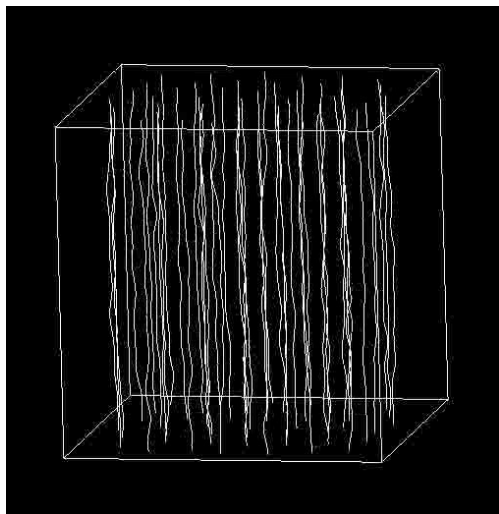
ケルビン波
(並進勾配)

再結合を通して
変換



ネットなヘリシティからケルビン波が励起され、
再結合を通して渦のヘリシティが増加する
(Donnelly-Glaberson instability)

M. Tsubota et. al PRL **90**, 205301 (2003)

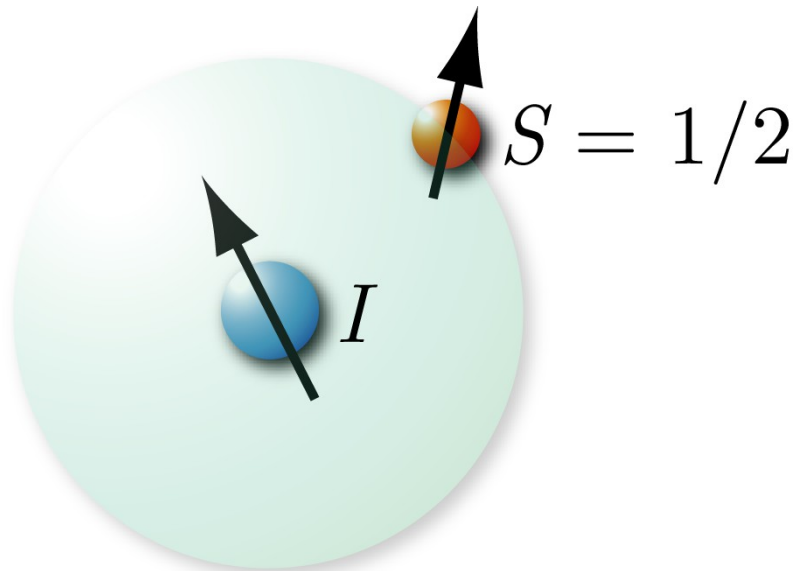


スピノルBECとヘリシティ

スピノルBEC

原子のスピン自由度が生きているような原子気体BECを考える

超微細相互作用により核と電子のスピンが結合する($F = I + S + L$)

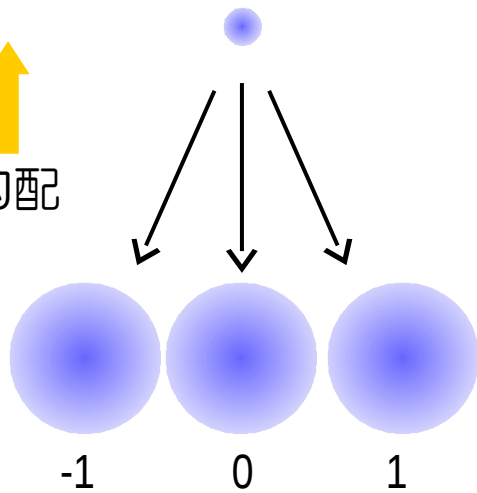


^{87}Rb , ^{23}Na , ^7Li , ^{41}K	$F = 1, 2$
^{85}Rb	$F = 2, 3$
^{133}Cs	$F = 3, 4$
^{52}Cr	$S = 3, I = 0$

スピノルBEC

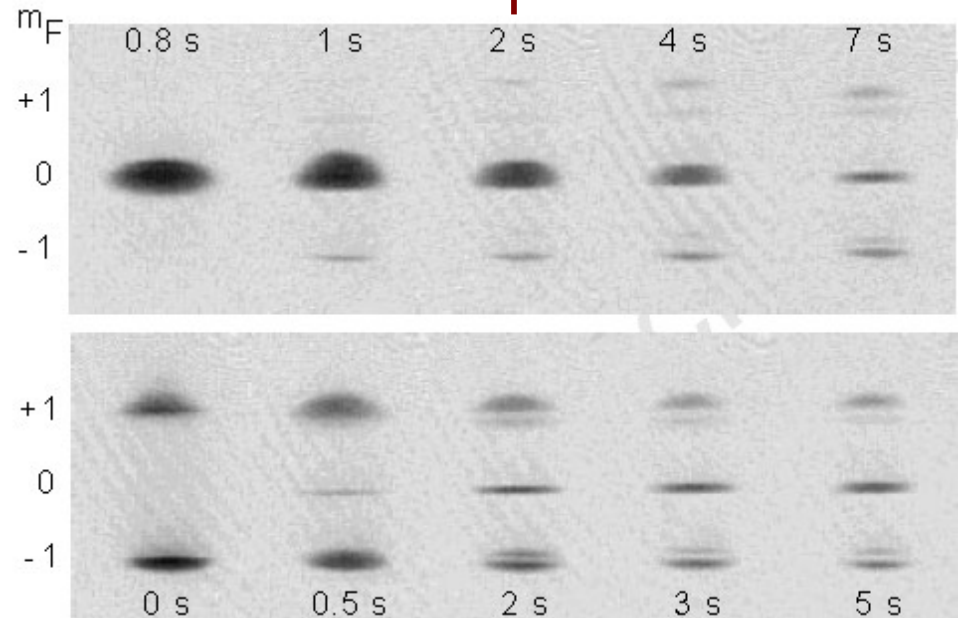
$$^{87}\text{Rb} (I = 3/2, S = 1/2, L = 0) \rightarrow F = 1, 2$$

↑↑↑
磁場勾配



Stern-Gerlach experiment

$F = 1$ experiment

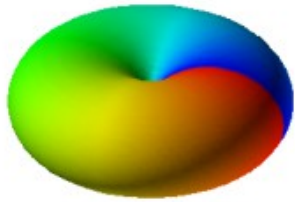


J. Stenger et al. Nature **396**, 345 (1998)

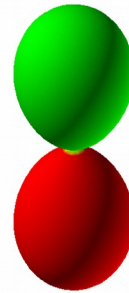
スピノルBECの基底状態と対称性

球面調和関数を用いて、スピン空間における基底状態を可視化する

$$\psi = (\psi_1 \quad \psi_0 \quad \psi_{-1})^T : \text{spin-1 system}$$

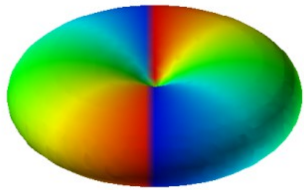


強磁性状態
 $(1 \ 0 \ 0)^T$



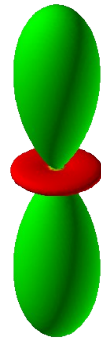
ポーラー状態
 $(0 \ 1 \ 0)^T$

$$\psi = (\psi_2 \quad \psi_1 \quad \psi_0 \quad \psi_{-1} \quad \psi_{-2})^T : \text{spin-2 system}$$



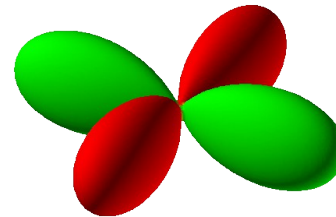
強磁性状態

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

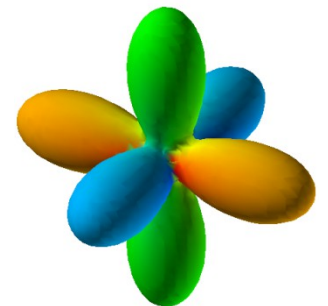


ネマティック状態

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$



サイクリック状態

$$\frac{1}{2} (i \ 0 \ \sqrt{2} \ 0 \ i)^T$$

スピノルBECのトポロジカル欠陥

スピノルBECでは量子渦だけでなく、高次のホモトピーで分類できるトポロジカル欠陥が存在する。

		π_1	π_2	π_3
スピン1	強磁性	\mathbb{Z}_2 渦	-	スカーミオン
	ポーラー	半整数量子渦	モノポール	ホップオン
スピン2	強磁性	\mathbb{Z}_4 渦	-	スカーミオン
	ネマティック	半整数量子渦	モノポール	ホップオン
		1/4渦	-	スカーミオン
	サイクリック	非可換量子渦	-	スカーミオン

高次のホモトピーで特徴づけられる欠陥は、トポロジカルに安定なヘリシティを持つ→トポロジカルチャージがヘリシティで特徴づけられる

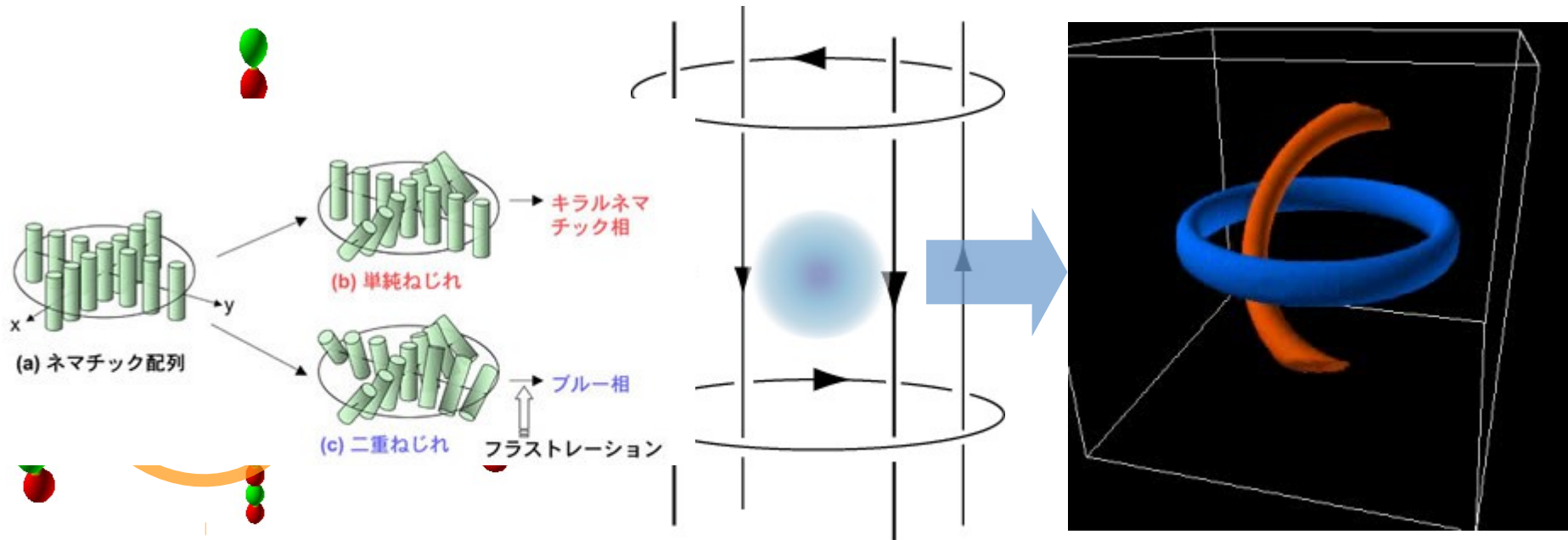
スピノルBECのトポロジカル欠陥

スピノルBECでは量子渦だけでなく、高次のホモトピーで分類できるトポロジカル欠陥が存在する。

		π_1	π_2	π_3
スピン1	強磁性	\mathbb{Z}_2 渦	-	スカーミオン
	ポーラー	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
スピン2	強磁性	\mathbb{Z}_4 渦	-	スカーミオン
	ネマティック	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
		$1/4$ 渦	-	スカーミオン
	サイクリック	非可換量子渦	-	スカーミオン

ポーラー状態におけるホップオン

Y. Kawaguchi et. al. PRL **100** 180403, (2008)



- 液晶のブルー相で実現されるホップオンと同じ構造
- 質量流ではなく、スピン流に対するスピンヘリシティ (=トポロジカルチャージ=Linking number) を持つ
- トポロジカルに安定 (ケルビン波等に崩壊しない)

スピノルBECのトポロジカル欠陥

2種類の量子渦循環を用いることによって、トポロジカルに安定なヘリシティが得られる→vorton

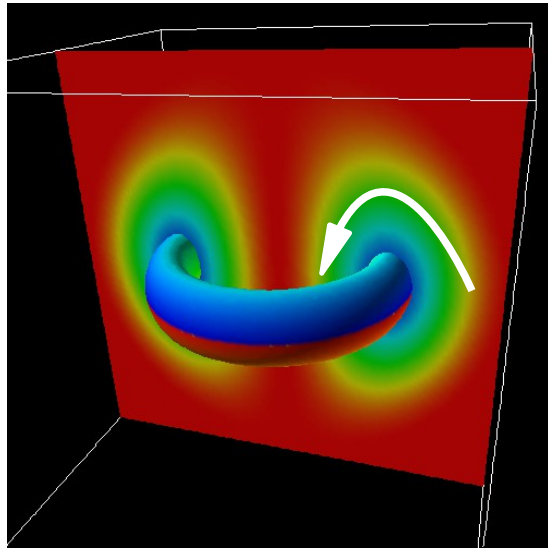
		π_1	π_2	π_3
スピン1	強磁性	\mathbb{Z}_2 渦	-	スカーミオン
	ポーラー	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
スピン2	強磁性	\mathbb{Z}_4 渦	-	スカーミオン
	ネマティック	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
			$1/4$ 渦	-
	サイクリック	非可換量子渦	-	スカーミオン

2成分BECにおけるvorton

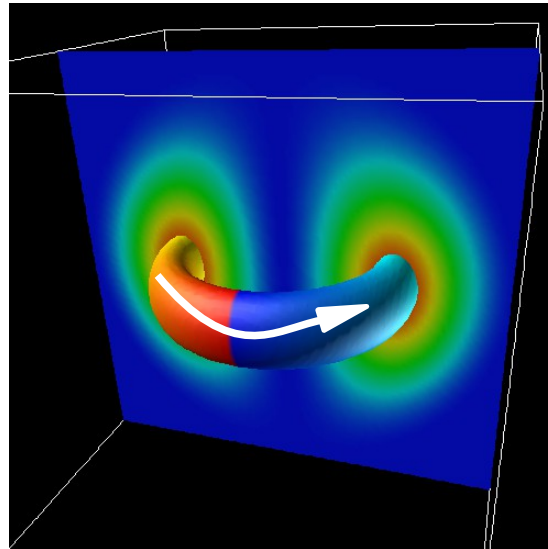
$\psi = (\psi_A \ \psi_B)^T$: pseudo spin-1/2 system

ψ_A 成分の渦輪：渦芯を ψ_B 成分が埋めるような構造

ψ_A



ψ_B



渦芯において ψ_B 成分の位相が渦輪に沿って 2π 変化する

⇒スカラーBECの渦と異なって消滅できない

$$\mathbf{v} = \frac{\rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B}{\rho_A + \rho_B} \Rightarrow \int d^3x \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \neq 0$$

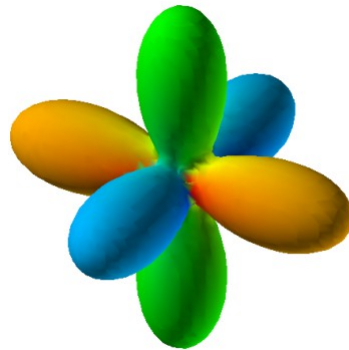
スピノルBECのトポロジカル欠陥

非可換量子渦による、第3のトポロジカルに安定なヘリシティがある

		π_1	π_2	π_3
スピン1	強磁性	\mathbb{Z}_2 渦	-	スカーミオン
	ポラー	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
スピン2	強磁性	\mathbb{Z}_4 渦	-	スカーミオン
	ネマティック	半整数量子渦	モノポール	ホッピオン
		1/4渦	-	スカーミオン
	サイクリック	非可換量子渦	-	スカーミオン

サイクリック状態における非可換量子渦

ground state : $\frac{1}{2} (i \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 0 \quad i)$

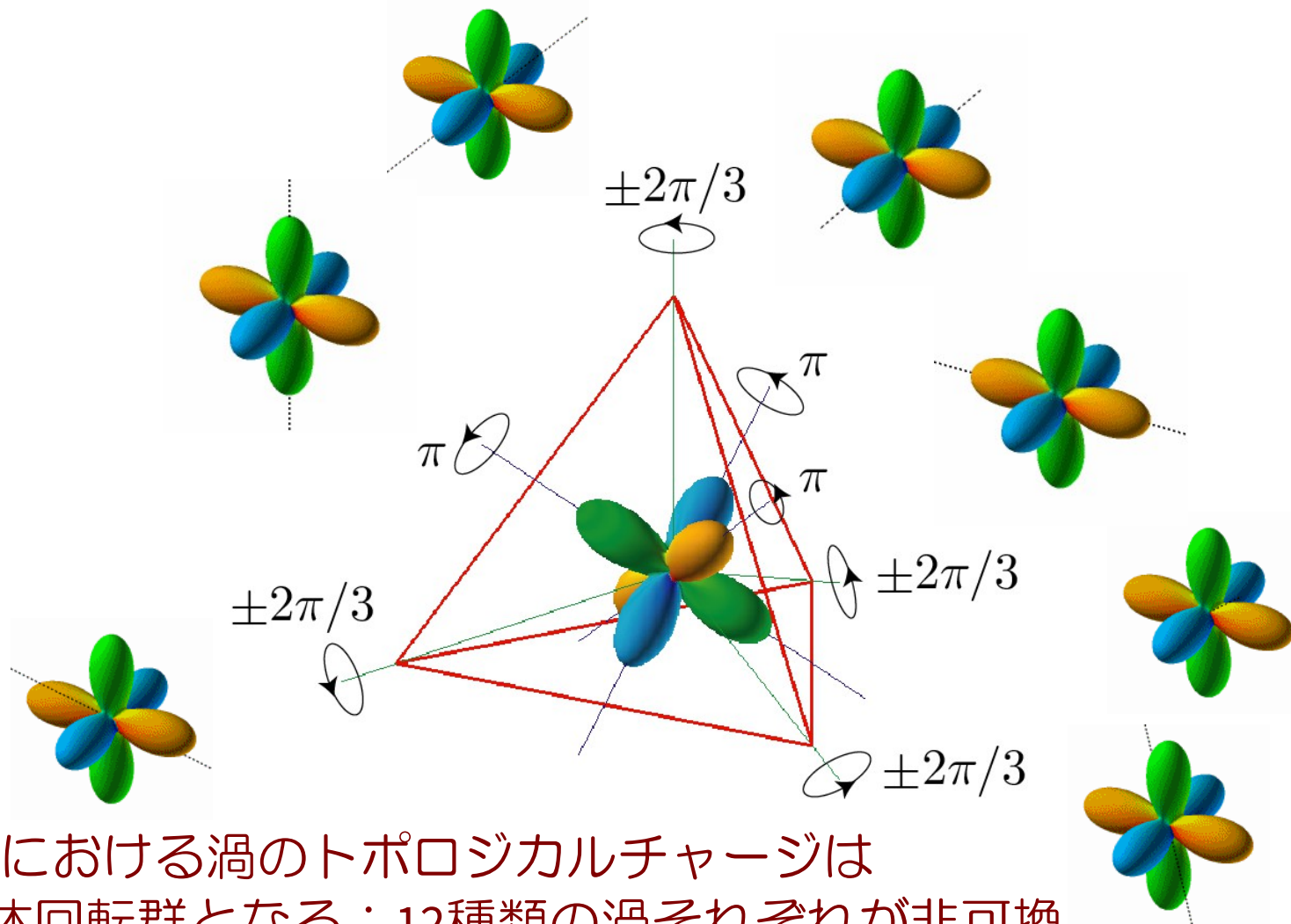


スピン空間における
三つ組状態



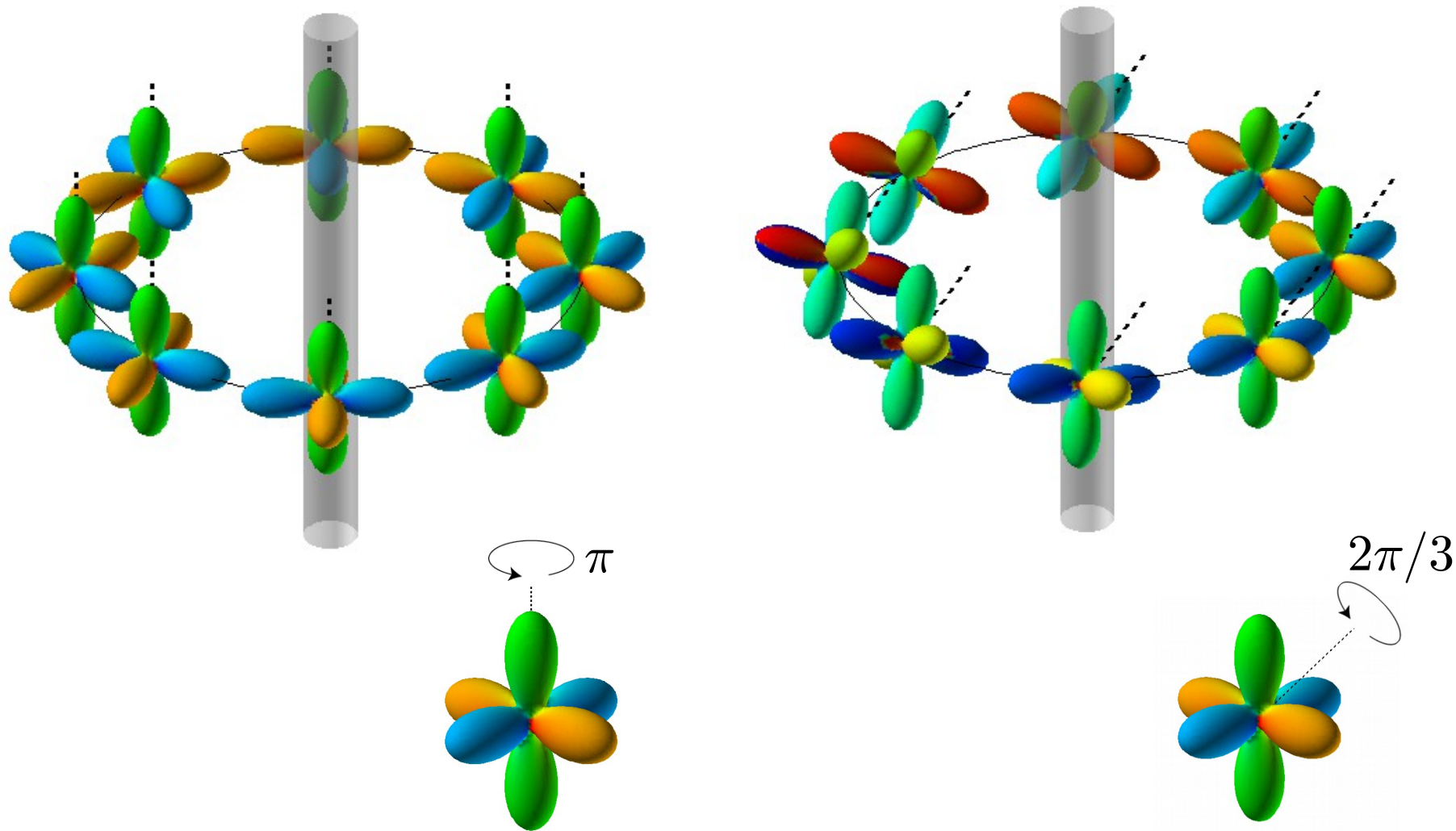
order-parameter manifold : $\frac{U(1) \times SO(3)}{T}$ 正四面体回転群

サイクリック状態における非可換量子渦



cyclic相における渦のトポロジカルチャージは
正四面体回転群となる：12種類の渦それぞれが非可換

サイクリック状態における非可換量子渦

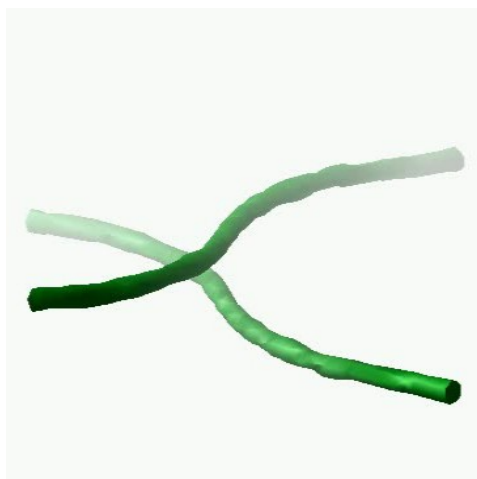


量子渦の衝突

非線形シュレディンガー方程式における渦の衝突ダイナミクス

可換なペア

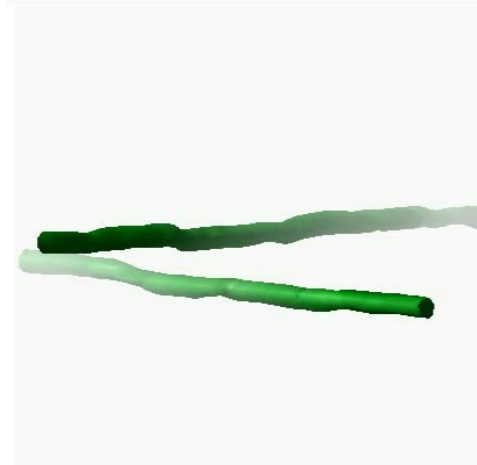
非可換渦なペア



再結合



Langmuir 渦

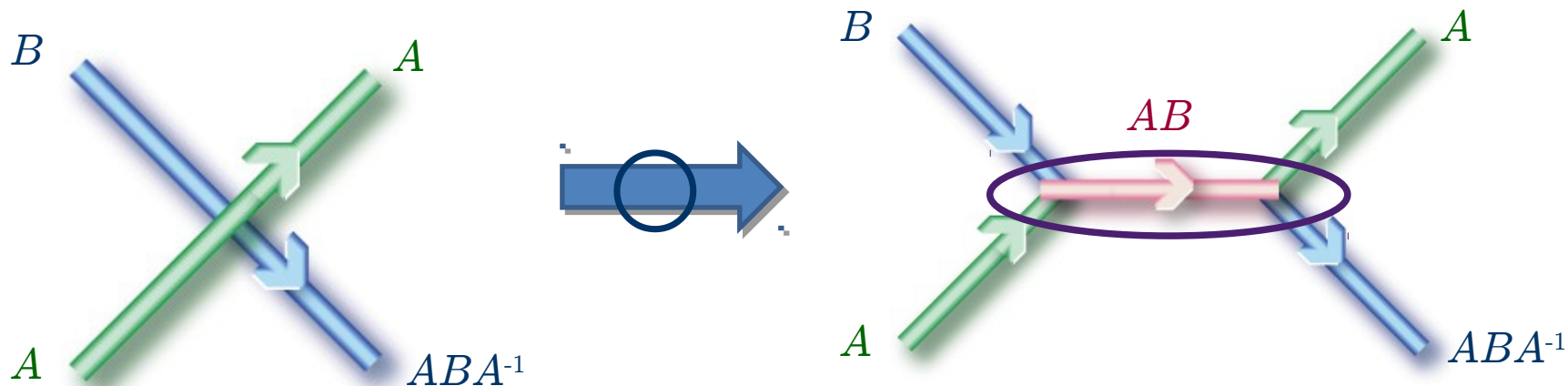


すり抜け

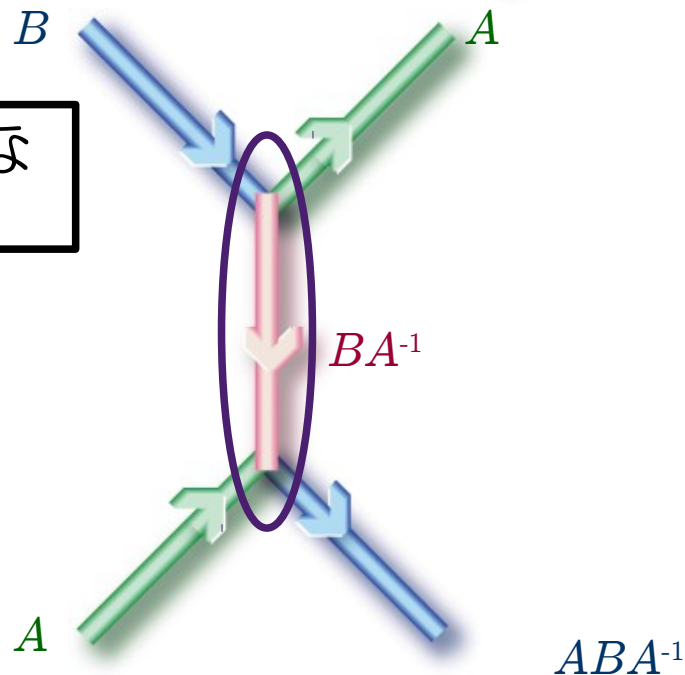
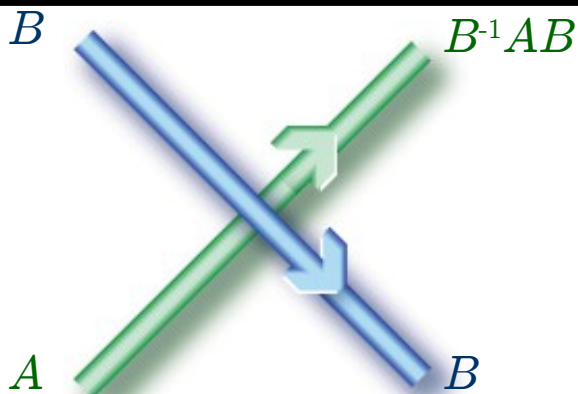
渦の非可換性に応じて、渦間に新しい渦 (Langmuir 渦) が形成される

⇒Langmuir 渦によってヘリシティからケルビン波への崩壊が阻止される

量子渦の衝突

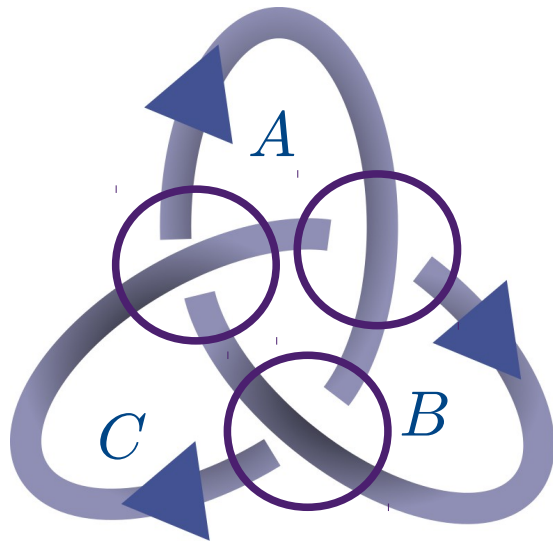


ラング渦の近傍に、トポロジカルに安定なヘリシティが局在する



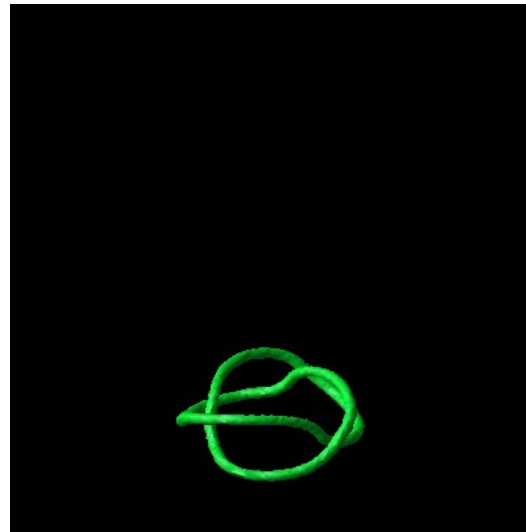
新しいトポロジカル構造：結び目渦

向き付き三葉結び目
(parity broken)



局在ヘリシティ

A, B, C が可換



結び目は非保存
(ケルビン波を
放出して崩壊)

A, B, C が非可換



結び目は保存

- ヘリシティが結び目のlinking numberに等しい
- 非可換渦にはlinking numberが保存量として存在する

Knotted vortex in water



D. Kleckner and W. T. M. Irvine, *Nature Phys* **9**, 253 (2013)

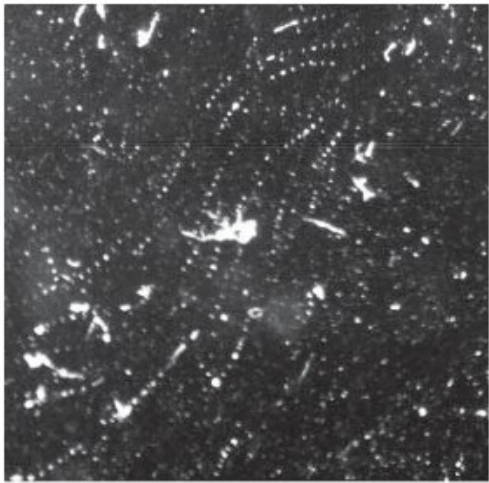
まとめ

量子流体中では、渦に局在したヘリシティが存在する

- スカラーBEC：ヘリシティは再結合を通してケルビン波へと崩壊し、非保存量である
- スピノルBEC：3次元構造の欠陥 (π_2 , π_3 で分類される欠陥、vorton)に加え、非可換量子渦の結び目がトポロジカルに安定な構造となり、ヘリシティによって特徴づけられる。
- 非可換量子渦はラング渦の生成によって、ヘリシティのケルビン波への崩壊が阻止され、非可換量子渦の結び目の不変量 (linking number) がヘリシティとなる。

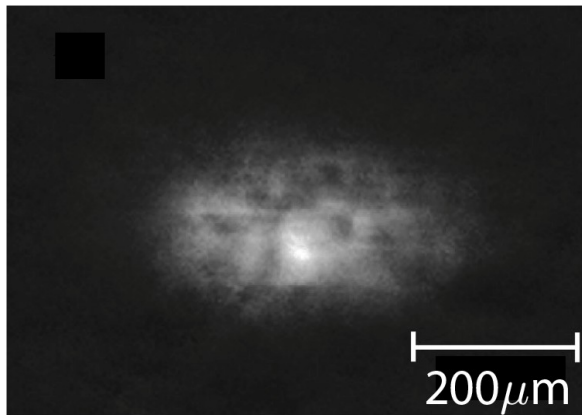
量子乱流とヘリシティ

量子渦によって構成される量子乱流



These waves have never
been directly **visualized**

Lathrop group
from Youtube



PRL 103, 045301 (2009)

量子乱流とヘリシティ

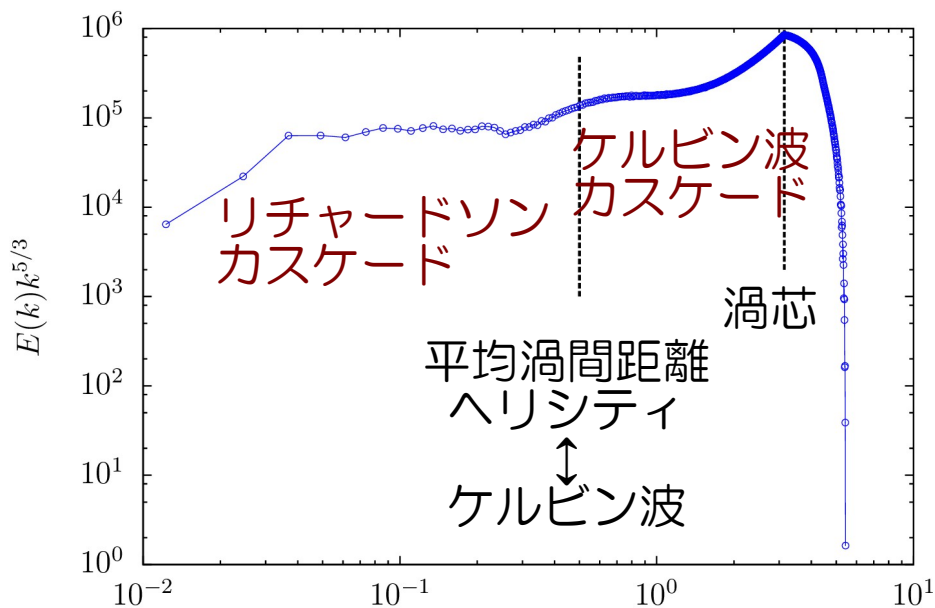
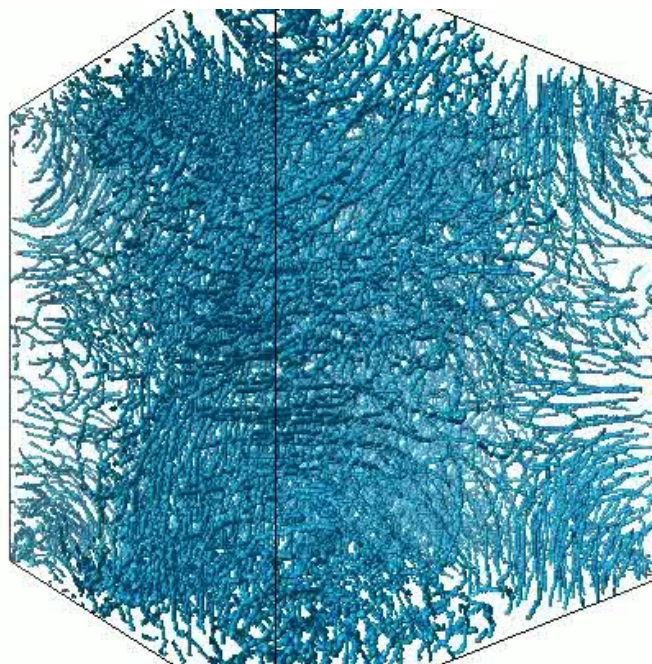
古典乱流：ナビエ・ストークス方程式

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - (1/\rho) \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

量子乱流：非線形シュレディンガー方程式

$$i \hbar \partial_t \Psi = [- (\hbar^2 / 2 M) \nabla^2 + g_0 |\Psi|^2] \Psi$$

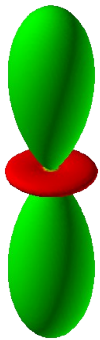
両者は全く異なる
渦の性質も異なる



ケルビン波カスケードの存在

Spin-2 BECの基底状態

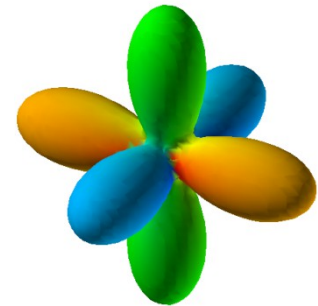
$$H = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{s=-2}^2 |\nabla\psi_s|^2 + \frac{1}{2}(g_0\rho^2 + g_1\mathbf{S}^2 + g_2|A_{20}|^2) \right\}$$



Uniaxial Nematic
(非磁性)

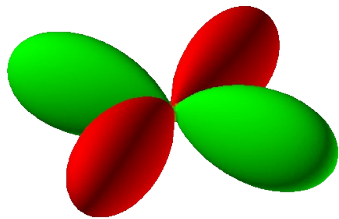
g_1

Cyclic
(非磁性)



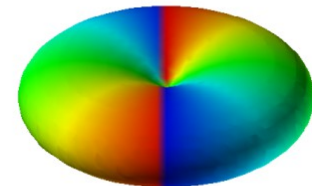
^{87}Rb

Biaxial Nematic
(非磁性)



$$g_2 = 4 g_1$$

Ferromagnetic
(強磁性)

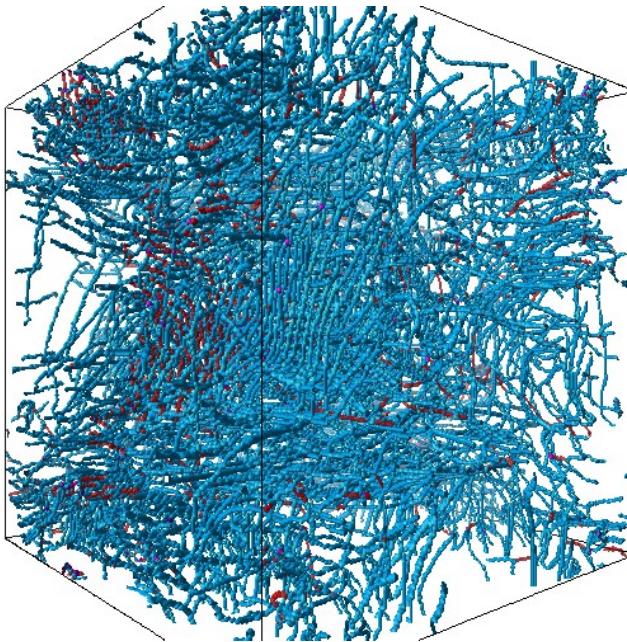


g_2

渦の結び目不変量

winding number of vortex : $\Rightarrow \int d^2x \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbb{Z}$: circulation

linking number of non-Abelian vortex : $\Rightarrow \int d^3x \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \in \mathbb{Z}$: helicity

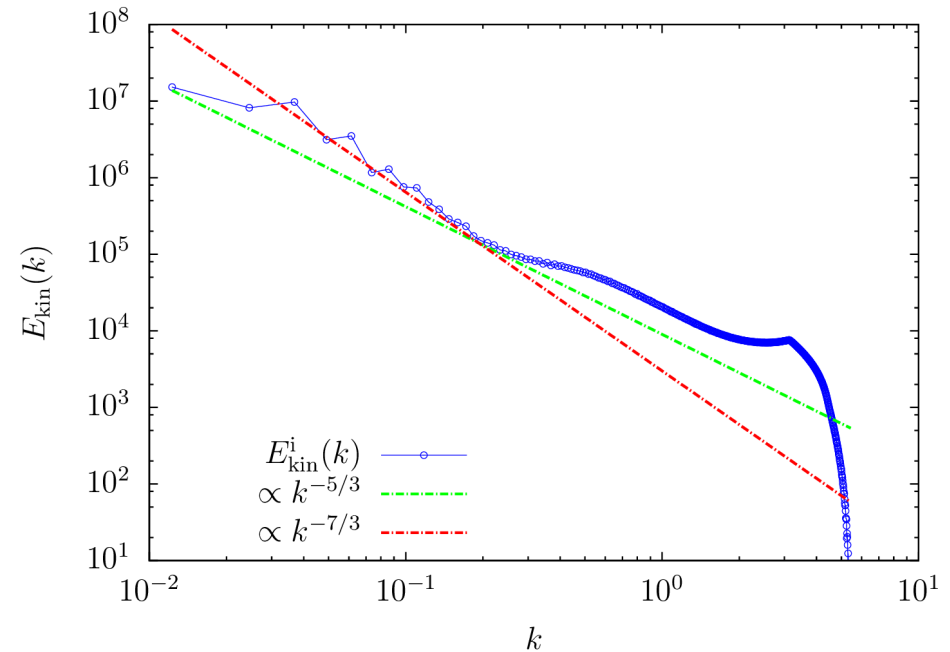
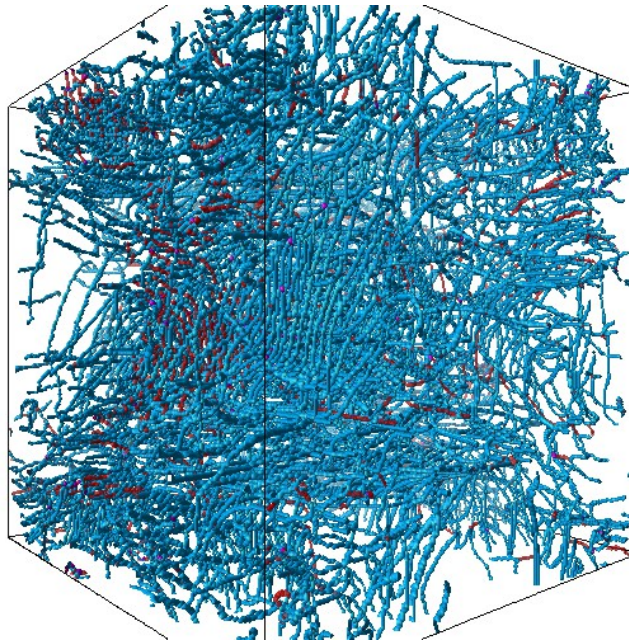


結び目不変量の逆カスケード

\Rightarrow 乱流中に非可換量子渦の大規模な結び目構造が形成される

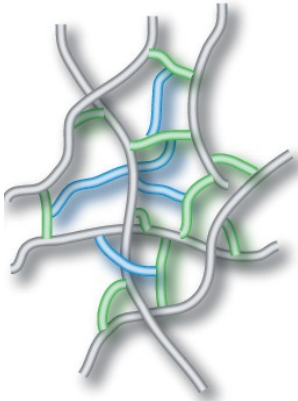
$$E(k) \propto k^{-7/3}$$

非可換量子渦乱流

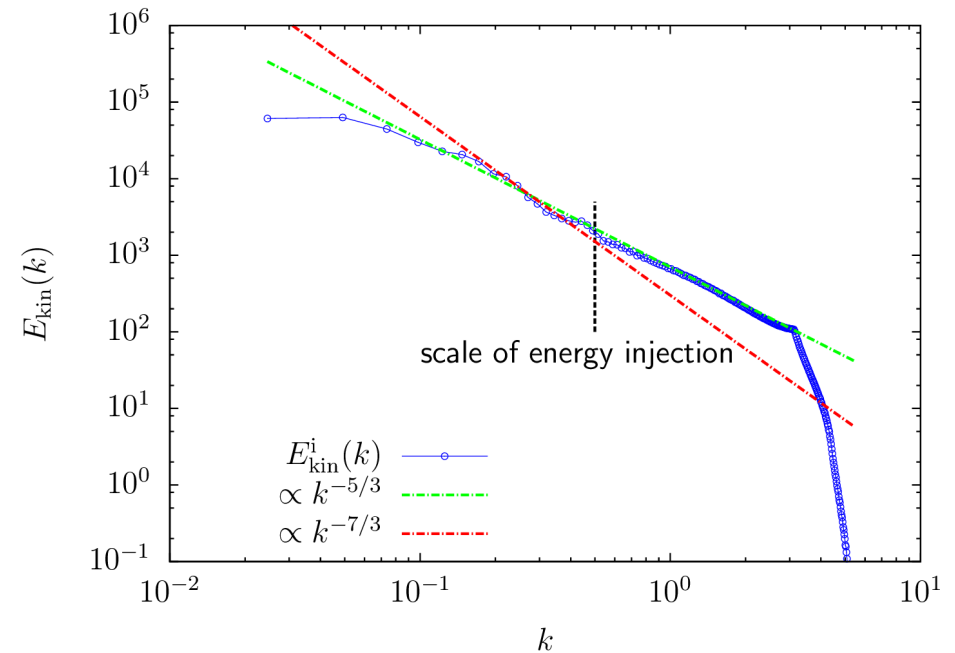
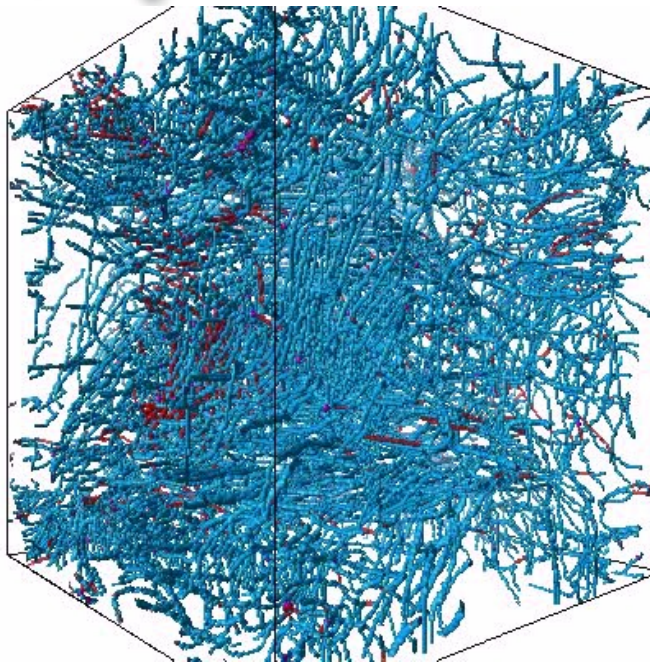


現時点で、低波数領域の冪の正確な値は決定できない
⇒さらに統計精度を高める必要がある

非可換量子渦乱流

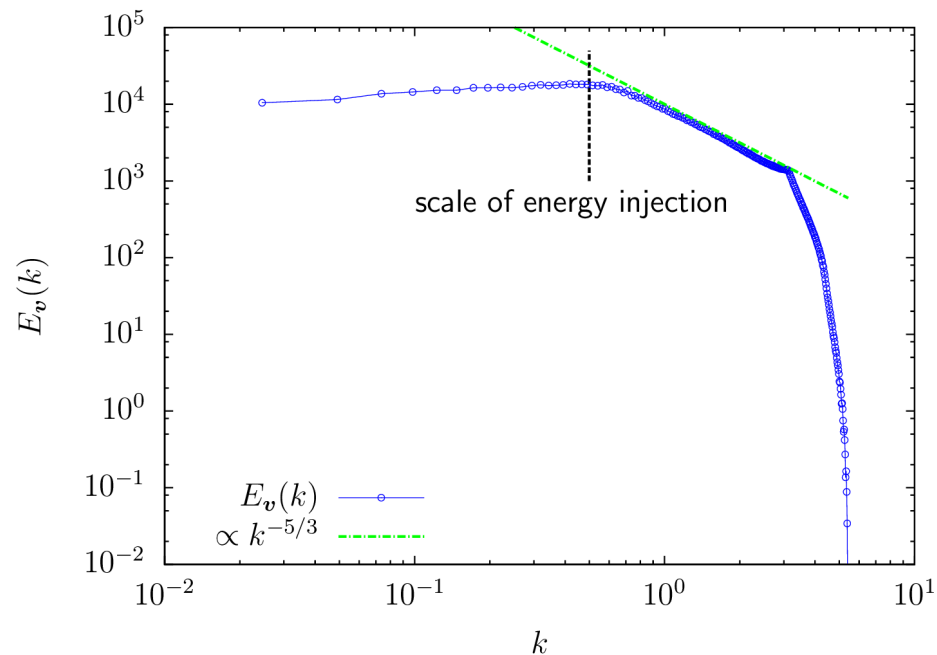


乱流状態では渦の大規模なネットワーク構造が期待される

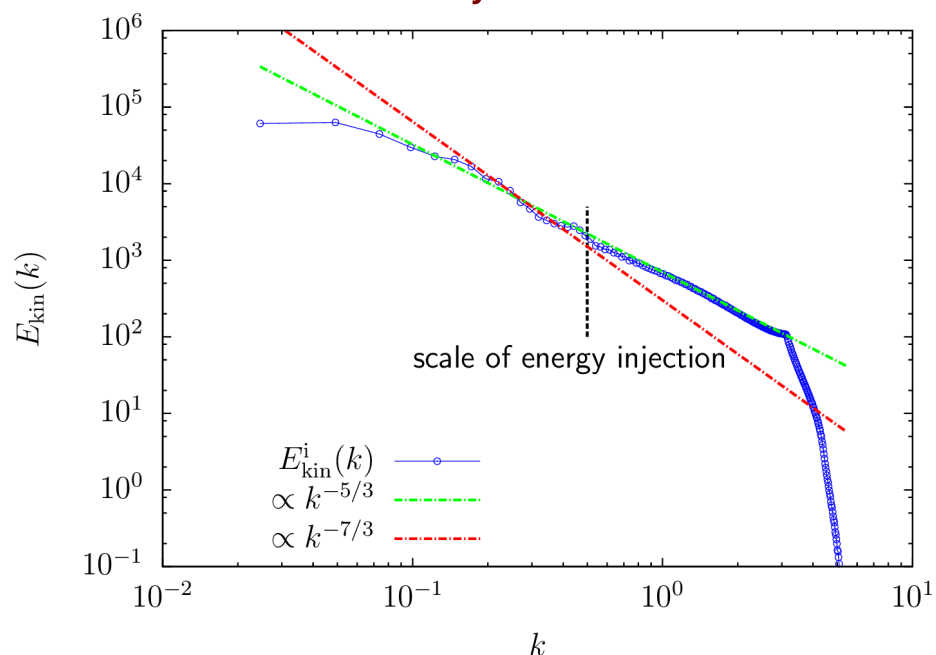


非可換量子渦乱流

Scalar BEC



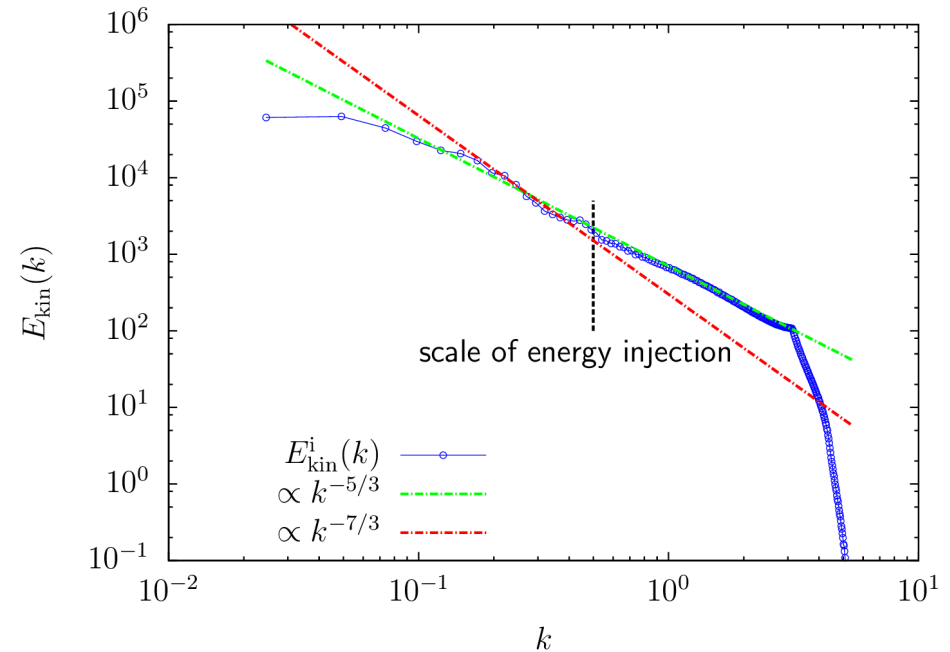
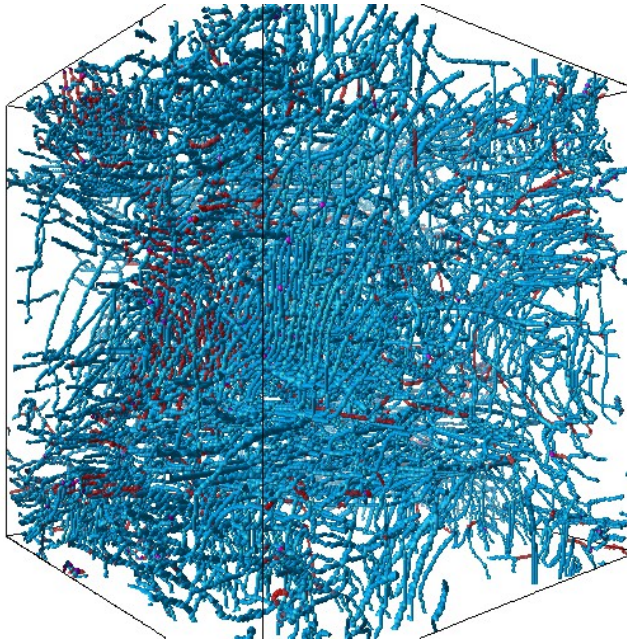
Cyclic BEC



外力よりも大きなスケールにおける冪的振る舞い
(渦のネットワーク形成による逆カスケード?)

指数: $-5/3 \sim -7/3$ (カスケードする物理量に依存)

非可換量子渦乱流



Large scaleにおける保存量：エネルギー $\Rightarrow -5/3$

渦の結び目不変量 $\Rightarrow -7/3$