

ランダムポテンシャル中におけるボース流体のボース・
アインシュタイン凝縮と超流動、および極低温における
量子乱流のダイナミクスと統計則

(Bose-Einstein Condensation and Superfluidity of Bose fluid
in a Random Potential, and Dynamics and Statistical Law
of Quantum Turbulence at Ultra Low Temperatures)

理学研究科
数物系専攻

平成 17 年度

小林 未知数
(KOBAYASHI Michikazu)

謝辞

本研究を進めるにあたりまして、多くの方々の協力と支援をいただきました。この場を借りて感謝の意を表したいと思います。坪田誠先生には指導教官として本研究全般にわたるご指導、ご鞭撻をいただき、心より感謝いたします。一部共同研究者として、そして研究全般にわたって、貴重な援助と助言をいただきました飯田武先生に感謝いたします。そして温かくご指導をして頂きました鈴木正人先生をはじめ、ともに学び数多くの議論におつきあいして下さいました素励起物理学研究室の皆様へ感謝いたします。有益な議論をして下さいました本大学大学院超低温物理学研究室の畑徹先生、矢野英雄先生、そして研究室の皆様へ感謝いたします。慶應義塾大学の白濱圭也先生、Birmingham大学のW. F. Vinen先生、名古屋工業大学の後藤俊幸先生には本研究に関わる数多くの貴重な助言をいただいたことに感謝いたします。三谷陽氏、笠松健一氏、荒木恒彦氏、藤野聡一郎氏にはともに研究に励み、親しくお付き合いしていただいたことに感謝いたします。数値計算を行うにあたって、その環境を整備して頂きました理学部LAN運営委員会の先生方に感謝いたします。西岡圭太氏には研究室の計算機を長年管理していただくとともに、筆者に計算機に関する数多くの手ほどきをしていただいたことに感謝いたします。Risto Hänninen氏には研究室の計算機を管理するにあたって数多くの助言をいただいたことに感謝いたします。最後に、長年にわたって筆者を温かく見守っていただいた両親に感謝の意を表します。

参考論文

1. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Kolmogorov Spectrum of Quantum Turbulence*, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005).
2. M. Tsubota and M. Kobayashi, *Kolmogorov Spectrum of the Gross-Pitaevskii turbulence*, J. Phys. Chem. Sol. **66** 1498 (2005).
3. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Kolmogorov Spectrum of Superfluid Turbulence: Numerical Analysis of the Gross-Pitaevskii Equation with a Small-Scale Dissipation*, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005).
4. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity of Strongly Correlated Bose Fluid in a Random Potential*, J. Low Temp. Phys. **138**, 189 (2005).
5. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Superfluid-Insulator Transition of a Bose-Einstein Condensation in a Periodic Potential and its Interference Pattern*, J. Low. Temp. Phys. **134**, 665 (2004).
6. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Bose-Einstein condensation and superfluidity of dirty Bose gas*, Physica B **329-333**, 212 (2003).
7. M. Kobayashi, M. Tsubota and T. Iida, *Superfluidity of disordered Bose systems: numerical analysis of the Gross-Pitaevskii equation with random potential*, Physica B **329-333**, 210 (2003)
8. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Bose-Einstein condensation and superfluidity of a dilute Bose gas in a random potential*, Phys. Rev. B **66**, 174516 (2002).

論文要旨

2.17 K 以下で液体 ^4He が引き起こす超流動は超伝導と同様、マクロなスケールで量子状態が出現する現象であり、これらの現象を理解することは量子統計力学と低温物理学両方における最重要課題の1つである。超流動は通常、巨視的な数の粒子が1粒子の基底状態を占有することで起こるボース・アインシュタイン凝縮によって引き起こされると考えられているが、両者は必要条件でも十分条件でもなく、超流動とボース・アインシュタイン凝縮の正確な関係は完全には分かっていない。本研究では超流動とボース・アインシュタイン凝縮の両方が関わる2つのトピックスに注目し、理論的に議論した。

超流動とボース・アインシュタイン凝縮の関係を調べるための系として注目されていたのがランダムポテンシャル中におけるボース流体である。ボース・アインシュタイン凝縮体はランダムネスによってポテンシャルの極小に局在し、もはや超流動としては振る舞わなくなり、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動を分離することができるであろうと考えられてきた。実験には多孔質ガラス中の液体 ^4He が用いられ、液体 ^4He の注入量が少ない希薄領域において Reppy 達が、注入量が多いときや高圧といったような強相関領域において Plantevin 達や山本達が超流動やボース・アインシュタイン凝縮の観測を行っており、バルクの液体 ^4He とは著しく異なる多くの振る舞いが報告されてきた。これに関して、ランダムポテンシャル中における3次元ボース流体のモデルを用いて解析を行い、平衡状態においてボース・アインシュタイン凝縮や超流動がランダムネスによってどのような影響を受けるのかを調べた。その結果、希薄領域と強相関領域両方において実験結果を、フリーパラメーターを用いることなく定量的に説明するとともに、このような系においてボース・アインシュタイン凝縮が超流動なしに存在しうること、および局在したボース・アインシュタイン凝縮状態という新しい相が存在することを理論的に明らかにした。

超流動が持つ最も顕著な特性の1つに量子渦がある。これはボース・アインシュタイン凝縮によって形成される巨視的波動関数の一価性によって導かれる。量子渦はこの巨視的波動関数の位相欠陥であり、その周りの循環が量子化されている。また、量子渦は安定に存在できる、その存在を明確に定義できる、芯が非常に細い、という点で通常の粘性流体における渦とは著しく異なっている。量子渦が複雑に絡み合い、乱流状態となった超流動乱流、および絶対零度近傍において量子効果のみが姿を現す量子乱流は、古典乱流と違って、その要素である量子渦が明確に定義されるため、流体力学最大の問題である乱流を要素還元的に理解できる理想的なプロトタイプとなる可能性がある。これに関して、絶対零度近傍におけ

る巨視的波動関数のダイナミクスを最も簡単に記述するグロス・ピタエフスキー方程式を用いて、量子乱流の数値シミュレーションを行い、その統計的性質を解析することによって、古典乱流との関係を調べた。その結果、外部からのエネルギー注入がない減衰乱流、エネルギー注入がある定常乱流のいずれの場合においても、古典乱流に類似した慣性領域が存在すること、そして慣性領域においてエネルギースペクトルがコルモゴロフ則を示すことを発見した。コルモゴロフ則は古典乱流における最も重要な統計則であり、この結果によって量子乱流が古典乱流と類似の統計性を持つことが示された。

Abstract

Below 2.17 K, liquid ^4He enters an inviscid superfluid state. Superfluidity is a macroscopic quantum phenomenon like superconductivity, and understanding them has been a major goal of quantum statistical physics and low temperature physics. Although superfluidity is usually thought to be caused by the Bose-Einstein condensate state of liquid ^4He in which a macroscopic number of particles occupies a single particle ground state, the relation between the Bose-Einstein condensation and superfluidity has not been completely understood; the one is neither necessary nor sufficient for the other. In this work, concentrating on some of interesting relations between them, we theoretically discuss the following topics.

The Bose system in a random potential has been thought to be a good example for studying the relation between the Bose-Einstein condensation and superfluidity. In the random potential, Bose-Einstein condensed particles are localized to the potential minimum and cannot belong to superfluidity; this system can separate the Bose-Einstein condensation from superfluidity. Liquid ^4He in porous glass is often used as this system in experimental studies. For both the Bose-Einstein condensation and superfluidity, many observations which were remarkably different from those of bulk liquid ^4He were reported by Reppy *et al.* for dilute region under small adsorbed ^4He coverages, and by Plantevin *et al.* and Yamamoto *et al.* for strongly correlated region under large coverages and high pressures. For these experimental works, we analyzed the model of a three-dimensional Bose fluid in a random potential to investigate the effect of the randomness on the thermodynamic properties of both the Bose-Einstein condensation and superfluidity. Without introducing any free parameters, our results were quantitatively consistent with experimental observations. Furthermore, we succeeded in theoretically predicting the presence of the Bose-Einstein condensation without superfluidity, namely the new phase of localized Bose-Einstein condensates.

Another most interesting phenomenon of superfluid is a quantized vortex which is caused by a single valued macroscopic wave function of Bose-Einstein condensation. A quantized vortex is a topological defect of this wavefunction and completely different from eddy of classical fluid at the points of (i) circulation is quantized, (ii) vortex is stable, (iii) vortex can be defined definitely, and (iv) core is very thin. Quantum turbulence near the zero temperatures can be ideal prototype for understanding turbulence, because quantum turbulence is made of

definite quantized vortices. By numerically solving the Gross-Pitaevskii equation, we investigated the dynamics and statistical properties of quantum turbulence, and their relations with those of classical turbulence. As a result, we found the presence of inertial range which was similar to that of classical turbulence for both decaying turbulence without any energy injection and steady turbulence with energy injection by the moving random potential. In this inertial range, energy spectrum was consistent with the Kolmogorov law which was one of the most important statistical laws of classical turbulence; these findings showed the similarity between quantum and classical turbulence.

目次

第 I 部	ランダムポテンシャル中におけるボース流体のボース・ アインシュタイン凝縮と超流動	3
第 1 章	序章	7
第 2 章	実験的背景	13
2.1	超流動液体 ^4He	13
2.2	多孔質ガラス中における超流動液体 ^4He	15
第 3 章	理論的背景	23
3.1	ボース・ハバードモデル	23
3.2	ランダムポテンシャル中における 3 次元希薄ボース気体	27
第 4 章	ボース流体の理論的取り扱い	29
4.1	ボース・アインシュタイン凝縮	29
4.2	超流動	32
第 5 章	ランダムポテンシャル中におけるボース流体の理論	35
5.1	ランダムポテンシャル中におけるボース流体の理論的取り扱い . . .	36
5.2	希薄領域	41
5.2.1	自己エネルギーとグリーン関数の計算	41
5.2.2	実験との比較	48
5.3	強相関領域	53
5.3.1	環状図形における摂動論	54
5.3.2	転移温度の計算	56
5.3.3	絶対零度におけるボースガラス相の解析	57
第 6 章	結論	63

第 II 部	極低温における量子乱流のダイナミクスと統計則	65
第 7 章	序章	67
第 8 章	古典乱流とコルモゴロフ則	71
8.1	ナビエ・ストークス方程式	71
8.2	古典乱流	72
第 9 章	量子渦と量子乱流	75
9.1	量子渦の理論的枠組みと実験的な観測	75
9.2	超流動乱流	76
9.3	量子乱流	79
第 10 章	小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式	83
10.1	グロス・ピタエフスキー方程式	83
10.2	小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式	87
10.3	グロス・ピタエフスキー方程式の数値解法	90
第 11 章	1本の量子渦のダイナミクス	93
第 12 章	減衰乱流	97
12.1	初期状態	97
12.2	数値計算の精度とエリアジングエラー	97
12.3	減衰乱流のシミュレーション	99
第 13 章	定常乱流	105
13.1	時間依存ランダムポテンシャルによるエネルギー注入	105
13.2	定常乱流の慣性領域	106
13.3	実験における量子乱流の観測	110
第 14 章	有限温度における量子渦のダイナミクス	113
第 15 章	結論	119

第I部

ランダムポテンシャル中におけるボース流体のボース・アインシュタイン凝縮と超流動

第1章 序章

1908年、Kamerlingh Onnesにより温度 $T = 4.2$ K という極低温において ^4He の液化に成功して以来、1世紀が経とうとしている。この ^4He の液化は、その後の量子物性物理学や量子統計力学の基礎付けとなる低温物理学の幕開けといつてよいだろう。

その後1911年、同じくKamerlingh Onnesによって水銀の超伝導現象が発見された後、1932年にW. H. Keesom達によってラムダ温度 $T_\lambda = 2.17$ Kにおける比熱の異常増大と、その低温側での粘性の消失が発見され、この現象はP. Kapitzaによって1938年、超流動と名付けられた[1, 2, 3]。比熱はラムダ温度においてピークを持ち、超流動への相転移であることを意味する。この超流動液体 ^4He の特性は間もなくTiszaとLandauによって現象論的に導入された2流体モデルを用いて理解された[4, 5, 6, 7]。2流体モデルによると超流動液体 ^4He は、通常の粘性流体のように振る舞う常流体と、粘性を持たずに細い隙間を通して起こる速い流れや非回転性を生み出す超流体の2成分からなる。この2流体モデルの描像は超流動液体 ^4He 中に等間隔に並べた振動円盤を用いてAndronikashviliによって検証された[10]。振動円盤は粘性を持つ常流体のみを引きずるので、常流体密度を直接測定することが可能になる。このAndronikashviliの方法はその後、超流動液体 ^4He において常流体(超流体)密度を測定するための最も強力な方法となった。またこの2流体モデルは、現象論的に導入されたモデルでありながら、超流動に関わる様々な実験結果を説明することに成功した。

液体 ^4He を構成するのはボース粒子である ^4He 原子である。理想ボース気体は低温においてボース・アインシュタイン凝縮を起こすことが1925年にEinsteinによって予言されており[8, 9]、Londonは液体 ^4He の粒子数密度と ^4He 原子の質量から計算されるボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 $T_B^0 = 3.1$ Kがラムダ温度に近いという事実から、液体 ^4He の超流動への相転移が ^4He 原子のボース・アインシュタイン凝縮によって引き起こされるという考えを最初に提唱した。またLandauは、相互作用の強い液体 ^4He に理想気体の量子統計を適用するのは非現実的であるとし、 ^4He 原子間に働く相互作用を考慮することによって、超流動状態にある ^4He 原子の励起状態がフォノン、マクソン、ロトンと呼ばれる準粒子の描

像で記述されるという Landau の準粒子模型を提唱した [5, 6]。この Landau の準粒子模型は、低温における超流動の微視的なメカニズムの理解に大きな貢献を与えた。

一般に相転移が起こると、その低温側では長距離にわたる秩序が現れ、それを特徴づける物理量として秩序変数が導入される。超流動液体⁴He の場合、この秩序変数がボース・アインシュタイン凝縮によって生じる巨視的波動関数に相当し、超流体の非回転性は秩序変数によるポテンシャル流の形で記述される。超流体の非回転性の条件を緩め、秩序変数の特異点でのみ超流体が回転性を持つことを仮定すると、特異点周りでの循環はプランク定数 h を⁴He 原子の質量 m で割った値 $\kappa = h/m$ を単位にして量子化される。Onsager と Feynman はこのような考察から量子渦の存在を予言した [11, 12]。この量子渦は回転容器の中心軸に導線をはった、いわゆる多重連結領域の流れに対して Vinen らが、そして量子渦の輪に対しては Reyfield らが液体⁴He にイオンを注入することで実験的に確かめることに成功した [13, 14]。

量子渦の発見は、超流動液体⁴He がボース・アインシュタイン凝縮を起こしているという London の考えを強く支持する。そして最終的に、このボース・アインシュタイン凝縮は液体⁴He への中性子の非弾性散乱による準粒子の観測によって確認された [15, 16]。このようにボース・アインシュタイン凝縮は超流動に対して非常に大きく関与しているという考えはもやは確実なものとなった。

1995 年には ⁸⁷Rb、²³Na、⁷Li といった原子気体においてボース・アインシュタイン凝縮が実現され、さらにこれらの系において量子渦が観測されたことから、これらの原子気体も液体⁴He 同様に超流動性を持っていることが確認された [17]。この系は巨視的量子現象に関わる様々な現象を容易に制御・可視化できる点において非常に魅力的であり、その実現以来、非常に多くの研究者から注目を浴びているが、それらの研究の土台に超流動液体⁴He で培われた膨大な研究結果があるのはいうまでもない。

以上の背景から、超流動現象とボース・アインシュタイン凝縮はお互いに密接な関係にあるのは明らかである。バルクの液体⁴He は確かにラムダ温度以下でボース・アインシュタイン凝縮を引き起こし、かつ超流動状態へと転移する。しかしながらボース・アインシュタイン凝縮は 1 粒子の量子力学的基底状態に巨視的な数の粒子が占有するという統計的な現象であり、一方で超流動は系が粘性を持っていないかのように振る舞う流体力学的な現象であって、両者は異なった現象であり、その関係は未だ完全には理解されていない [18, 19]。特に一方がもう片方の必要条件でも十分条件でもないという事実は重要である。例えば Landau の準粒子模型によると、相互作用のない理想ボース気体は低温でボース・アインシュタイ

ン凝縮を起こすが、超流動状態にはならない [5, 6]。また 2 次元ボース系は有限温度でボース・アインシュタイン凝縮を引き起こさないことはよく知られているが、粒子間に相互作用がある場合には有限温度において超流動状態への転移が起こることが Kosterlitz と Thouless によって 1973 年に予言され [20]、1978 年に Bishop 達や Rudnick が薄膜状の液体⁴He において、これを観測した [21, 22]。このようなボース・アインシュタイン凝縮と超流動の関係を調べるために、有力であると思われる系の 1 つがランダムポテンシャル中におけるボース流体である。ボース・アインシュタイン凝縮はランダムポテンシャルの極小部分に局在し、超流体よりはむしろ常流体として振る舞うことで、この系特有の常流動の相が現れると考えられている。ランダムポテンシャルを調節することによってボース・アインシュタイン凝縮や超流動を上手く制御することができれば、両者を分離して、その詳しい関係を調べるのが可能になるであろう。

実験には多孔質ガラス中に注入された液体⁴He を用いる。バルクの液体⁴He とは違って、この系の最も魅力的かつ注目すべき特徴は、多孔質ガラスの空間充填率や孔径を変化させることで、ランダムポテンシャルの強さや空間的スケールを制御できることと、液体⁴He の注入量や圧力を変化させることで⁴He 原子の密度を、希薄ボース気体として見なせる領域から、高密度強相関ボース液体として見なせる領域にまで自由に变化させることができる点である。Reppy 達はこの系を用いて、特に注入量が小さく⁴He 原子が希薄な領域において比熱や超流動密度の詳しい測定を行った [23, 24, 25, 26]。その結果、多孔質ガラスの孔径の大きなときには超流動の振る舞いは 2 次元的だが、孔径を小さくするにつれ 3 次元的になること、超流動は多孔質ガラスによって抑制され、超流動密度、超流動転移温度ともにバルクのものより小さくなること、有限の注入量以下で超流動が絶対零度近傍でも消失することなど、多くの興味深い現象が報告された。一方で Plantevin 達はこの系において、ボース・アインシュタイン凝縮からの準粒子の測定を行い、超流動転移温度以上でもボース・アインシュタイン凝縮が存在することを明らかにした [27, 28]。また山本達は高圧、高密度下における超流動の観測を行い、多孔質ガラスの孔径が非常に小さい場合には液体状態のまま絶対零度近傍でも超流動が消失することを確認した [29]。このように多孔質ガラス中で液体⁴He の超流動やボース・アインシュタイン凝縮はバルクにはない、新奇な振る舞いをすることが明らかになった。

この系は理論的側面からも非常に興味深い。Huang 達は多孔質ガラスへの液体⁴He の注入量が少ないときを想定し、ランダムポテンシャル中における 3 次元希薄ボース気体のモデルを提唱した [30]。このモデルによると、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動はともにランダムポテンシャル中の局在効果によって抑制を

受けるが、超流動の方がより大きな抑制を受け、その結果絶対零度においても超流動がある粒子密度以下で消失する。この結果は Reppy 達の実験結果との定性的な一致を与える。またこの結果はボース・アインシュタイン凝縮がランダムポテンシャルの最小部分に局在することに起因する。これはランダムポテンシャル中の多電子系がポテンシャルに局在することによって絶縁体へと転移するアンダーソン局在と対応する [31, 32, 33]。また彼らは温度の上昇に伴って、局在していたボース・アインシュタイン凝縮が非局在することで再び超流動相へと転移する、いわゆる再起型転移を予言した。このモデルは超流動の実験に対する定性的な理解を与えるが、ランダムポテンシャルに多孔質ガラスの孔径依存性が入っていないため、実験との定量的な議論をするにはやや不十分である。また Fisher 達は同一サイト内のエネルギーがランダムに分布するボース・ハバードモデルを提唱した [34]。このモデルは絶対零度において超流動相、モット絶縁体相の他に、ランダムポテンシャルの多数の極小部分にボース・アインシュタイン凝縮が局在し、それぞれの間には相関がなくなることで超流動性を失うという、ボースグラス相を予言する。Plantevin 達による超流動転移温度以上でのボース・アインシュタイン凝縮の存在や、山本達による高圧下での超流動の消失は、超流動からボースグラス相への相転移であると考えられているが、準粒子の励起スペクトル等において実験とこのモデルとの一致が得られていないことや、このモデルが山本達の実験において実現されているような高密度の領域を正しく記述することができないことなどから、やはりこのモデルも実験との定量的な議論をするには不十分である。

このような背景を踏まえ、本研究ではランダムポテンシャル中におけるボース流体のボース・アインシュタイン凝縮と超流動の平衡状態での振る舞いを理論的に調べた。Huang によって導入されたモデルと類似の、ランダムポテンシャル中における3次元ボース流体のモデルから出発し、実験との定量的な議論を行うために一切の理論的フリーパラメーターをなくすことを試みた。議論する内容は主に2つに分類される。まず第1に Reppy 達の行った希薄領域での実験に対して、希薄ボース気体の解析を行った [19]。そしてランダムポテンシャル中におけるボース・アインシュタイン凝縮の局在効果を明らかにするとともに、比熱、超流動密度、超流動が消失する密度での転移指数において Reppy 達の実験との定量的な一致を得ることに成功した。また Huang 達と同様に、超流動の再起型の転移が起こることを予言し、空間充填率のより小さな多孔質ガラスで観測が容易になることを示した。第2に、高圧、高密度下における山本達の実験に対して、強相関ボース流体の解析を行い、ボース・ハバードモデルで解析されていたようなボースグラス相の可能性を定量的に議論する [35, 36]。そのためにボース・アインシュタイン凝縮の局在・非局在を議論する新しい概念とその計算法を導入した。その結果、

ボース・アインシュタイン凝縮が局在する転移圧力が山本達の実験で得られた超流動消失の圧力と、フリーパラメーターなしで定量的に一致した。これは高圧下における超流動の消失が、ボース・アインシュタイン凝縮の局在、つまりボースグラス相へ転移することによって引き起こされることを強く支持することになる。

第I部の構成は以下の通りである。第2章では超流動液体 ^4He 、特に多孔質グラス中における幾つかの実験を紹介する。第3章でランダムポテンシャル中のボース系においてなされている幾つかの理論計算を紹介した後、第4でボース・アインシュタイン凝縮と超流動における基本的な理論定式を導入する。第5章でランダムポテンシャル中における3次元ボース流体の解析計算を述べる。第6章は結論である。

第2章 実験的背景

本章では液体 ^4He を中心として、超流動とボース・アインシュタイン凝縮に関わる一般的な実験について紹介した後、多孔質ガラス中の液体 ^4He の超流動とボース・アインシュタイン凝縮に関する実験について説明する。

2.1 超流動液体 ^4He

液体 ^4He は構成要素である ^4He 原子の質量が軽く、零点振動の効果が大きいことと、原子間引力が弱いことから、常圧では低温においても液体状態のままにとどまる。ところが転移点であるラムダ温度 T_λ を境としてその物性には劇的な変化が見られる。例えばラムダ温度近傍での比熱 C は異常変化を示し(図 2.1(a))、ラムダ温度以下では毛細管中において圧力差に依存しない流れが観測され、これは粘性 η が消失していることを意味する。比熱の異常変化は系が相転移を起こしていることを示している。また、液体 ^4He におけるこのような粘性の消失した流れは超流動と呼ばれ、一方でラムダ温度以上での通常の流れは常流動と呼ばれる [1, 2, 3]。

超流動における様々な実験結果は、現象論的な2流体モデルを用いることによって説明することができる [4, 5, 6, 7]。これは超流動液体 ^4He が、密度 ρ_s 、速度 v_s を持つ超流体と密度 ρ_n 、速度 v_n を持つ常流体の混合物であると考えられる。超流体には粘性がないと仮定され、毛細管中の圧力差なしでの流れや、流体の非回転性

$$\nabla \times v_s = 0 \quad (2.1)$$

を与える。常流体は通常の粘性流体のように振る舞い、すなわち v_n の運動は粘性流体におけるナビエ・ストークス方程式のような形で記述される。この2流体モデルの描像は、Andronikashviliによって超流動液体 ^4He の中に等間隔に並べた円板からなるねじれ振り子を用いて検証された [10]。振動する円板は粘性を持つ常流体のみを引きずるので、 $\rho_n = \rho_n(T)$ を直接観測することが可能になり、その振る舞いは図 2.1(b)のようになることが分かった。

超流動は現象論的な2流体モデルを用いて理解することができるが、その微視的なメカニズムを理解するためには、 ^4He 原子の統計力学的性質を考察しなけれ

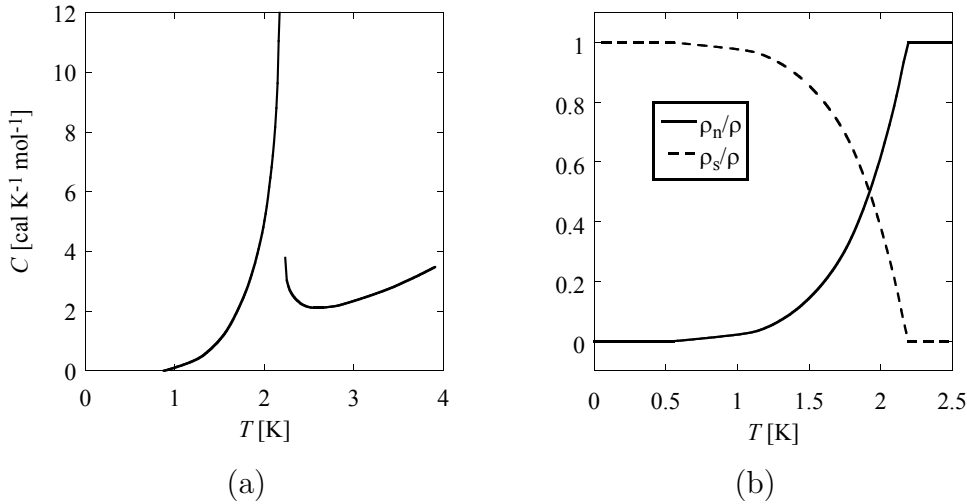


図 2.1: 液体 ${}^4\text{He}$ におけるラムダ温度近傍の比熱 (a) と超流動液体 ${}^4\text{He}$ における常流体と超流体の温度依存性 (b)。

ばならない。 ${}^4\text{He}$ 原子は陽子、中性子、電子それぞれ 2 個ずつからなる偶数個のフェルミ粒子による複合粒子であり、その集団はボース統計に従う。一般にボース統計に従う系は低温において、1 粒子の量子力学的基底状態を巨視的な数の粒子が占有するボース・アインシュタイン凝縮転移を起こすことが分かっている。自由粒子の場合、その転移温度 T_B^0 は粒子の密度を n 、質量を m とすると

$$k_B T_B^0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \quad (2.2)$$

で与えられ、ここに液体 ${}^4\text{He}$ の密度 $n = 2.1 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ と ${}^4\text{He}$ 原子の質量 $m = 6.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ を代入して得られる $T_B^0 = 3.1 \text{ K}$ がラムダ温度と近いことから、超流動の微視的なメカニズムが、ボース・アインシュタイン凝縮に起因していることが考えられる。実際には ${}^4\text{He}$ 原子間に相互作用が存在することにより、超流動状態にある ${}^4\text{He}$ 原子の励起は準粒子という描像で記述される。Landau は液体 ${}^4\text{He}$ の原子間相互作用を考慮することによって、その準粒子の分散曲線が低波数領域で線形となり、その後ある有限の波数で極大値を、そしてさらに極小値を持つという Landau の準粒子模型を提唱した [5, 6]。これらの準粒子はそれぞれフォノン、マクソン、ロトンとして知られている。この Landau の準粒子模型は低温における比熱や超流動密度を見事に説明するが、準粒子の分散曲線は液体 ${}^4\text{He}$ の非弾性中性子散乱実験によって初めて明らかになった [15]。図 2.2(a) は非弾性中性子散乱によって得られた超流動 ${}^4\text{He}$ の分散曲線であり、Landau によって提唱されたものと定性的に一致する。またこの準粒子はラムダ温度以下でのみ観測され、それ

ゆえに超流動とボース・アインシュタイン凝縮が密接に関係していることは明らかである。またボース・アインシュタイン凝縮体の定量的な測定も行われており、その温度依存性は図 2.2(b) のようになる [16]。

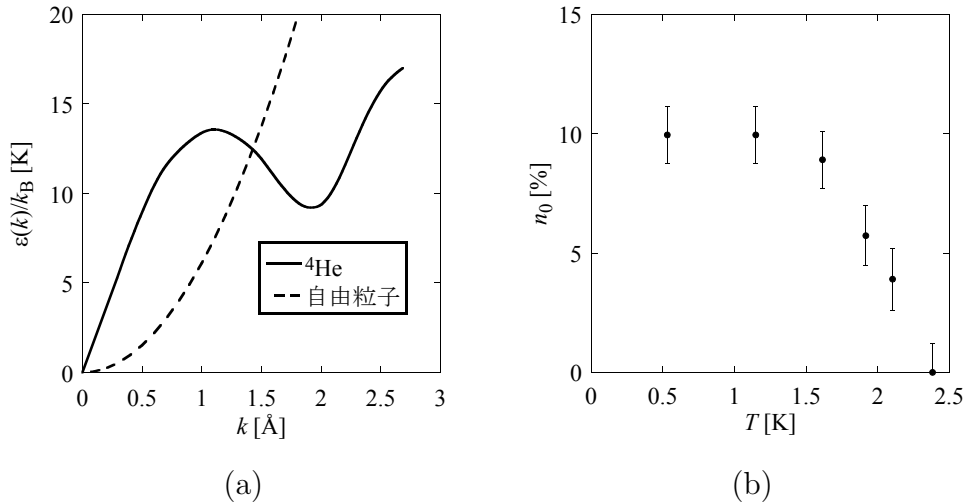


図 2.2: (a): 準粒子の分散曲線。 k は中性子散乱における運動量変化を、 $\varepsilon(k)$ はエネルギー変化である。(b): 凝縮体密度の温度依存性。

2.2 多孔質ガラス中における超流動液体 ^4He

前節における超流動 ^4He の代表的な実験結果から、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動がお互いに密接な関係を持っていることは明らかである。しかし、ボース・アインシュタイン凝縮は1粒子の基底状態に巨視的な数の粒子が占有する静的な現象であるのに対して、超流動は系に流れ場をかけたときに系が粘性を持っていないかのように応答する動的な現象であり、両者は異なる。また、一方がもう片方の必要条件でも十分条件でもなく、その詳細な関係は完全には分かっていない [18, 19]。例えば自由ボース粒子ではボース・アインシュタイン凝縮を起こすが、超流動状態にはならない。また2次元ボース系では逆に有限温度でボース・アインシュタイン凝縮にはならないが、超流動転移を起こすことが Kosterlitz と Thouless によって示され [20]、これは薄膜状の液体 ^4He における実験でも確認されている [21, 22]。

このようなボース・アインシュタイン凝縮と超流動の関係を調べるための格好の実験系として考えられてきたのが多孔質ガラス中の液体 ^4He である。多孔質ガラスは3次的に虫食い状の孔が張り巡らされた構造を持っており(図 2.3(a))、

孔径や空間充填率によって表 2.1 のように分類される。多孔質ガラスは ^4He 原子にとってランダムポテンシャルのように振る舞い、ボース・アインシュタイン凝縮が空間的に局在することで、この系特有の常流動状態が現れ、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動を制御、分離することができると考えられてきた。またこの系の最も魅力的な特徴は、空間充填率や孔径を変化させることで、対応するランダムポテンシャルの強度、空間スケールを制御できることと、多孔質ガラスへの液体 ^4He の注入量や、外からの圧力を変化させることで、 ^4He 原子の希薄な領域から高密度の強相関領域にまで自由に制御できることである。Reppy 達はこの系に対

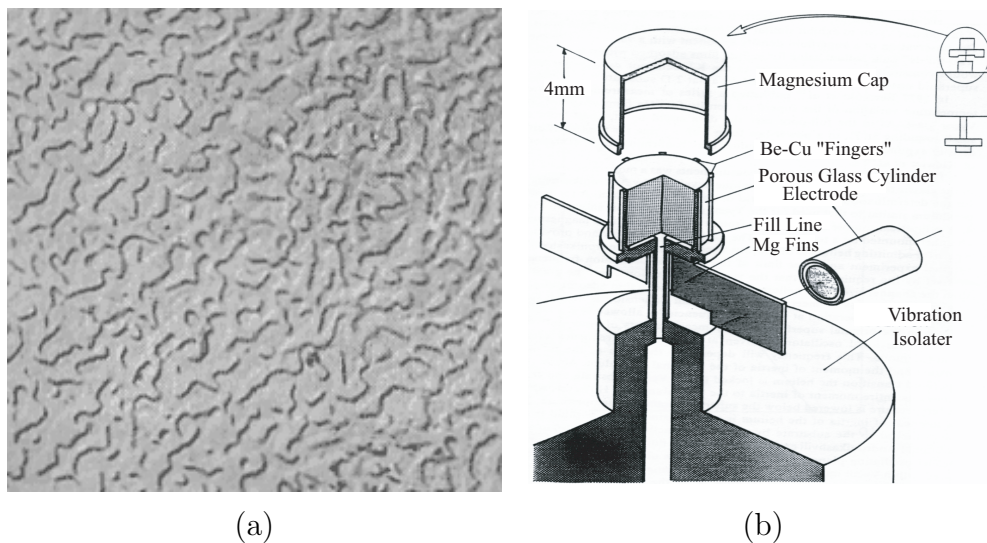


図 2.3: 多孔質ガラスの断面写真 (a) とねじれ振り子の概略図 (b)

	孔径 (Å)	空間充填率 (%)	表面積 (m^2/cm^3)
Gel-Sil	~30	~40	~130
Vycor	~60	~50	~150
Aerogel, Xerogel	~100	~90	~250

表 2.1: 多孔質ガラスの分類

して数多くの実験を行っており [23, 24, 25, 26]、中でも興味深いのが液体 ^4He の注入量が小さい、希薄領域における超流動の観測である。超流動は Andronikashvili によって導入されたねじれ振り子を用いて観測される (図 2.3(b))。液体 ^4He を注入した多孔質ガラスをねじれ振り子にセットし、ねじれ振り子の周期を測定する。粘性を持たない超流動成分は慣性モーメントに寄与しないため、ねじれ振り子の周期は超流動でないときに測定されたものより小さくなる。この周期差 ΔP は超

流動密度 ρ_s に比例している。つまりねじれ振りの測定原理は超流動密度を周期差を通して観測することにある。

図 2.4(a) に Vycor と、Xerogel における超流動密度の温度依存性を示す。超流動密度が消失する転移温度 T_c 近傍の臨界指数 ζ を

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\zeta \quad (2.3)$$

で定義すると、孔径の小さな Vycor で ζ は小さな値をとりバルクの⁴He とほぼ同じである。一方孔径の大きな Xerogel では ζ は大きく、バルクの液体⁴He の値とは異なる。これは次のように理解される。多孔質ガラスに液体⁴He が注入されると、ガラスの壁と⁴He 原子とのファンデルワールス引力により液体⁴He は壁に吸着し、その第 1 層は絶縁層として振る舞う。2 層目以降の液体⁴He が超流動として振る舞うが、孔径が小さく超流動の相関長と同じオーダーの場合には、多孔質ガラス内の孔全体にわたって超流動の 3 次元的なネットワークが形成され、超流動が 3 次元的な振る舞いを示すようになる。一方で孔径が大きい場合は、そのようなネットワークは形成されず、壁に吸着した薄膜として超流動が 2 次元的に振る舞う。したがって臨界指数はバルクの液体⁴He とは異なり、Kosterlitz-Thouless 理論によって示されるような大きな値をとる。つまり孔径が小さい場合に⁴He は 3 次元ボース流体として振る舞うであろうと考えられる。さらに多孔質ガラス中では超流動転移温度 T_c の低下が観測される。図 2.4(b) は Vycor における超流動密度と比熱の温度依存性であるが、超流動がラムダ温度 $T_\lambda = 2.17$ K よりはるかに低い温度で消失していることが分かる。また、 T_c よりやや高温ではあるが、この温度付近でわずかながら比熱の飛びが見えることから、この転移温度の低下が実験誤差によるものでなく、多孔質ガラスによる相転移の抑制であることを示している。

図 2.5(a) は Vycor への 8 通りの注入量におけるねじれ振りの周期差 ΔP の温度依存性である。この図から分かることは、注入量の低下とともに超流動転移温度 T_c や超流動密度が減少し、よって超流動は低密度においてより抑制されているのが分かる。また極低温におけるねじれ振りの周期差 ΔP の注入量依存性を示したものが図 2.5(b) である。この図から、超流動がある有限の注入量以下で消失していることが分かる。これは超流動になるべき⁴He 原子が完全に多孔質ガラス中に局在した、アンダーソン局在の描像を想起させる [31, 32, 33]。

Reppy 達によって超流動の観測が行われる一方で、Plantevin 達は多孔質ガラス中の液体⁴He におけるボース・アインシュタイン凝縮の測定を、非弾性中性子散乱を用いて行った [27, 28]。彼らは多孔質ガラス中を液体⁴He で完全に満たしたものに中性子を当て、液体⁴He を注入しない場合の結果との差をとり、準粒子のスペク

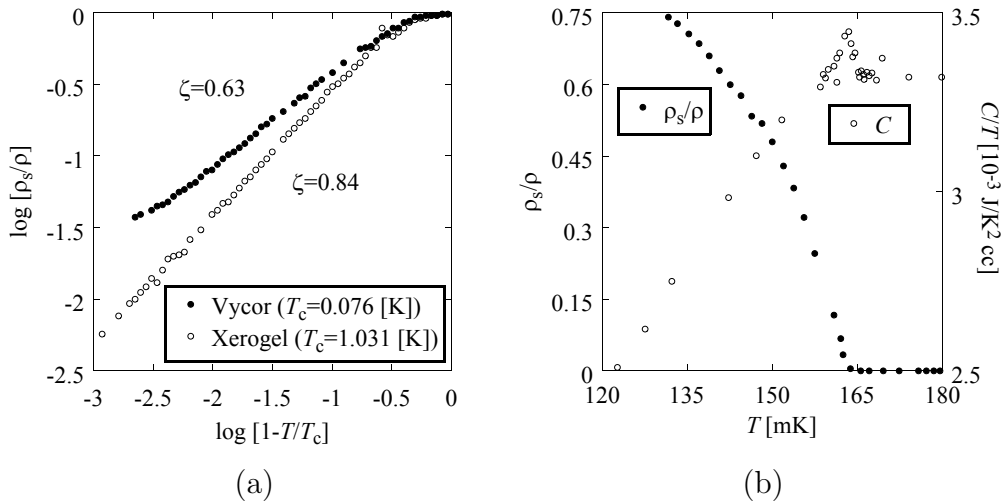


図 2.4: (a) : Vycor と Xerogel における超流動密度。臨界指数は $\zeta \simeq 0.63$ (Vycor)、 $\zeta \simeq 0.84$ (Xerogel) であり、バルクの場合は $\zeta \simeq 0.65$ である。(b) : Vycor における超流動密度 ρ_s と比熱 C の温度依存性。(a)、(b) とともに文献 [26] より。

トルを観測した。図 2.6(a) は Vycor 中での波数 1.70 \AA^{-1} における非弾性中性子散乱の測定結果である。バルクの液体⁴He では、この波数領域において凝縮体からの準粒子ロトンの励起が観測される (図 2.2(a))。準粒子ロトンの存在は液体⁴He におけるボース・アインシュタイン凝縮の存在を支持している。図 2.6(a) から、多孔質ガラス中においても準粒子ロトンがエネルギー 0.9 meV 付近で見えており、ボース・アインシュタイン凝縮が多孔質ガラス中でも存在することを示している。興味深いことに、この系においてねじれ振子により超流動転移温度 $T_c = 1.95 \text{ K}$ が観測されており、一方で図 2.6(a) では $T = 1.99 \text{ K}$ で準粒子ロトンの励起が見えている。これは多孔質ガラス中における超流動転移温度以上でのボース・アインシュタイン凝縮の存在可能性を示している。同様に図 2.6(b) は Vycor よりも孔径の小さな Gel-Sil (表 2.1 参照) での非弾性中性子散乱実験であるが、このときも超流動転移温度 $T_c = 1.4 \text{ K}$ 以上での準粒子ロトンの励起が見えている。また彼らは Vycor、Gel-Sil における、図 2.2(a) のような分散曲線も測定しているが、得られた分散曲線はバルクの液体⁴He のものと完全に一致している。これは多孔質ガラスが準粒子の励起には影響を与えていないことを意味する。

Vycor を液体⁴He で完全に満たした場合の相図を図 2.7(a) に示す。多孔質ガラス中ではバルクの液体⁴He に比べて、超流動転移温度が低下すること以外に固化の圧力が上昇することが特徴である。これは多孔質ガラスが結晶の対称性を乱すことによって、液体⁴He がより固体になりにくくなるという考えから理解できる。一般に

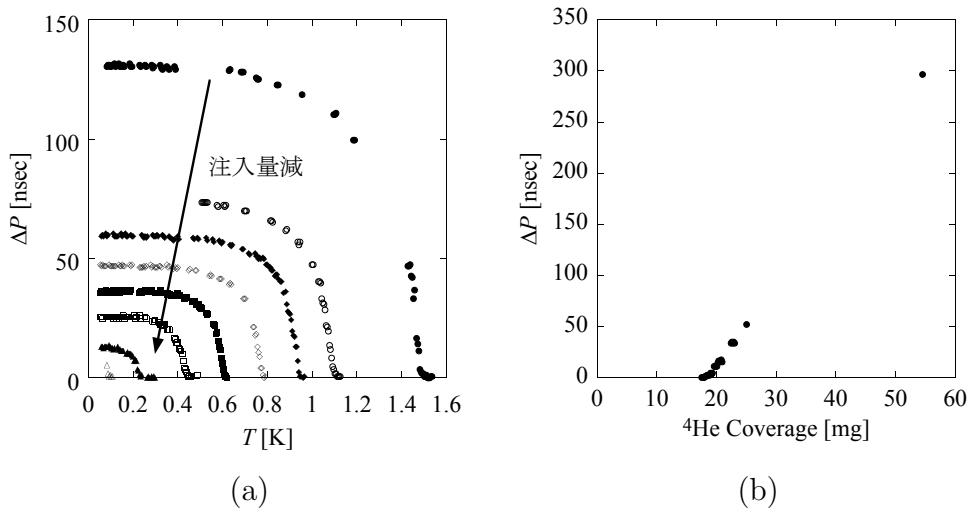


図 2.5: (a) : ねじれ振り子の周期差 ΔP の温度依存性。8 通りの注入量で測定している。(b) : 極低温における ΔP の注入量依存性。どちらも Vycor における測定である。(a)、(b) とともに文献 [26] より。

多孔質ガラスの孔径が小さくなると、超流動転移温度はより低下し、固化の圧力はより上昇する。したがって極端に小さな孔径を持つ多孔質ガラス中では、相図中における超流動転移線が固化曲線と交差する前に絶対零度になってしまい、高圧下において固体でも超流動でもない新奇な液体状態の出現が期待される。山本達はこのような考えから出発して、 25\AA という極端に小さな孔径を持つ Gel-Sil 中の液体 ^4He において、ねじれ振り子による超流動の観測を行った [29]。絶対零度近傍におけるねじれ振り子の振動数差 Δf の圧力依存性を図 2.7(b) に示す。比較のためにバルクの ^4He での振動数差 Δf も示しているが、この場合は圧力 2.5 MPa において、有限の Δf から $\Delta f = 0$ へのジャンプが起こっている。これは超流動液体 ^4He から固体 ^4He への相転移のためである。ところが Gel-Sil 中ではこのようなジャンプが起こらず、連続的に Δf が減少して約 3.5 MPa において 0 となる。これは ^4He が固体になることなく、超流動から常流動への転移が起こっていることを示している。また山本達はサンプルセルの内部圧力の温度依存性も測定しているが、温度変化による内部圧力の折れ曲がり観測されなかった。この事実も固体への相転移が起こっていないことを支持している。この実験結果は Gel-Sil 中の ^4He において、高圧化における新しい常流動相が存在することを意味しており、非常に興味深い。さらに、山本達を用いた Gel-Sil における非弾性中性子散乱も行われており、超流動が消失する圧力以上での準粒子励起が観測されているという結果も、ボース・アインシュタイン凝縮の新奇な相の出現を示唆している [37]。

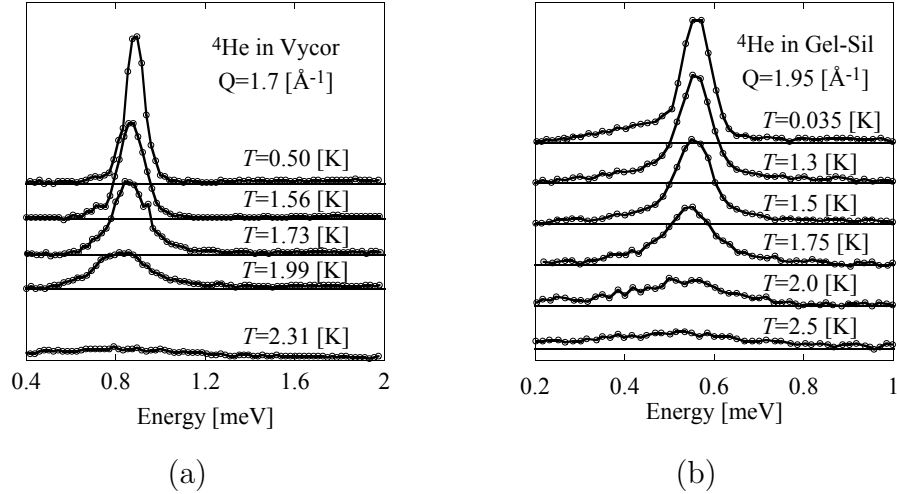


図 2.6: Vycor(a) と Gel-Sil(b) における非弾性中性子散乱実験のスペクトル。(a) は文献 [27]、(b) は文献 [28] より。

最後に Gel-Sil 中における ^4He の相図を図 2.8 にまとめる。低注入量における振る舞いは Vycor のものと非常に良く似ており、注入量の低下とともに超流動転移温度が減少し、やがて有限の注入量で超流動相は消失する。また先ほど示したとおり、高圧下においても超流動は消失する。これは低注入量低密度と高圧高密度の2つの領域において、この系に特徴的な常流動相が存在し、それぞれ異なるメカニズムによって超流動が抑制されていると考えられる。そしてその中間にのみ超流動相が存在している。

また今回紹介した実験以外にも、量子渦に関係した実験や [38, 39]、最近では固体状態における超流動が多孔質ガラス中で発見されるなど [40, 41]、この系に関する興味深い実験が報告されているが、本論文では割愛する。

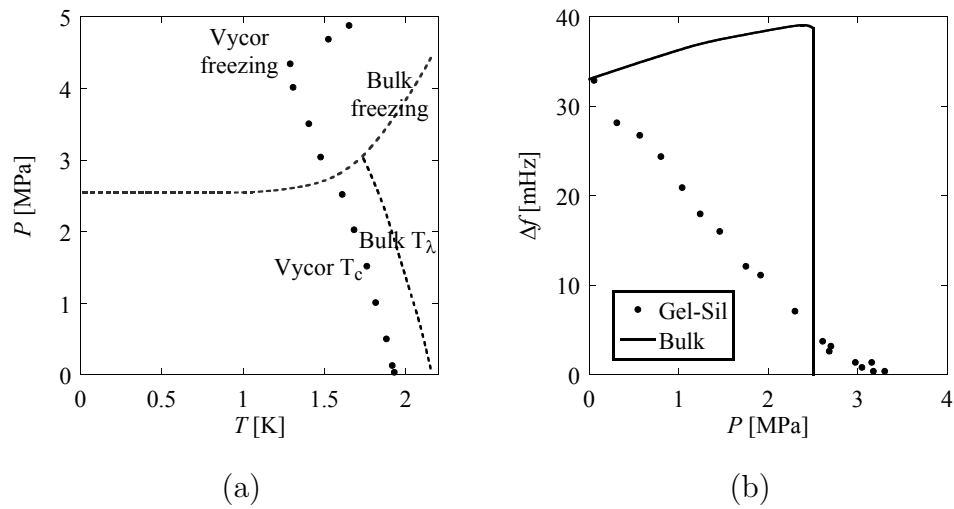


図 2.7: Vycor 中の⁴He の相図 (a) と Gel-Sil 中における絶対零度近傍でのねじれ振り子の振動数差 Δf の圧力依存性 (b)。 (a)、(b) とともに文献 [29] より。

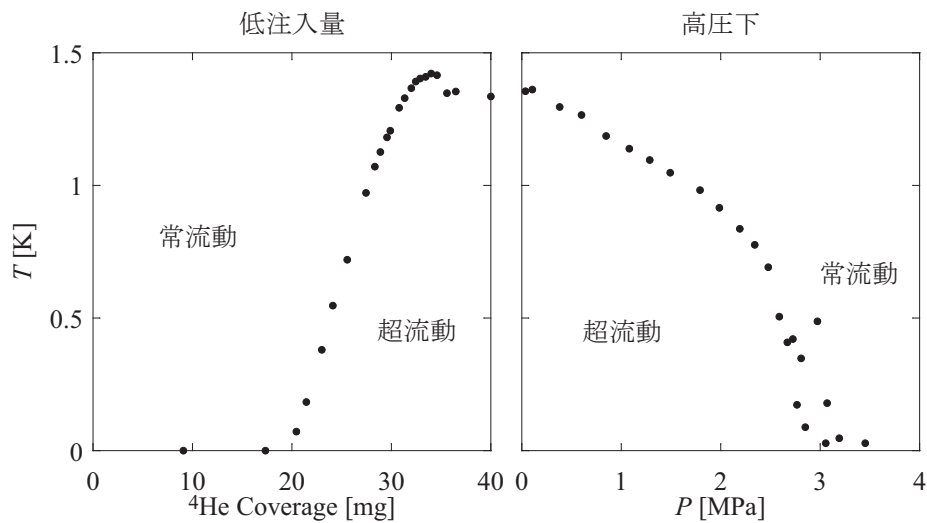


図 2.8: Gel-Sil 中の⁴He の相図。左側は低注入量におけるもので横軸は注入量、右側は高圧下におけるもので横軸は圧力である。文献 [29] より。

第3章 理論的背景

本章では前章で紹介した実験に対する理論研究の幾つかを紹介する。ここではランダムポテンシャル中のボース流体に関して、Fisher 達によって提唱されたボース・ハバードモデルを用いた理論研究と、Huang 達によって提唱されたボース気体の理論研究を取り上げて説明する。

3.1 ボース・ハバードモデル

前章で紹介した、多孔質ガラス中の液体⁴He の実験に対する解析的モデルとして、Fisher 達はボース・ハバードモデルを提唱した [34]。ボース・ハバードモデルは場の演算子 $\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$ が与えられたとき、それを

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_i w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \hat{a}_i \quad (3.1)$$

と展開し、系のハミルトニアンを粒子の消滅演算子 \hat{a}_i で表示することで得られる。これはポテンシャルの具体的な構造を無視し、ポテンシャルの各極小部分を i というサイト表示で簡略化する近似である。ここで $w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$ は i サイトに局在した 1 粒子状態の波動関数を記述するワニア関数である。ボース・ハバードモデルのハミルトニアンは

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = -\frac{J}{2} \sum_i (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i) - \sum_i (\mu + \delta\mu_i) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{g}{2} \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - 1) \quad (3.2)$$

で与えられる。第 1 項目は粒子が i サイトから $i+1$ サイトへ移るための運動エネルギー項であり、 J は i サイトと $i+1$ サイト間の共鳴輸送積分である。第 2 項はオンサイトエネルギー項であり、 μ は平均の化学ポテンシャル、 $\delta\mu_i$ は i サイトにおける μ からのずれである。第 3 項はオンサイト斥力項であり、 g はオンサイトにおける粒子間斥力相互作用の結合定数である。ランダムポテンシャルは $\delta\mu_i$ が各サイトでランダムな値をとることで表現される。最も簡単なランダムポテンシャルとして、 $-\Delta < \delta\mu_i < \Delta$ となるような $\delta\mu_i$ の一様分布が考えられる。ここで Δ はランダムネスの強度となる。

ランダムポテンシャルがない、つまり $\Delta = 0$ のとき、このモデルは絶対零度において2つの相を予言する。式 (3.2) において J が支配的なときには巨視的な数 N_0 個の粒子の1粒子波動関数がサイト中に広がり、

$$|\Psi\rangle \propto \left(\sum_i \hat{a}_i^\dagger \right)^{N_0} |0\rangle \quad (3.3)$$

という多体基底状態が与えられ、これはボース・アインシュタイン凝縮相に相当する。逆に g が支配的なときには、粒子はサイトに局在し、各サイトに粒子数の決まった基底状態が与えられる。多体基底状態は

$$|\Psi\rangle \propto \prod_i (\hat{a}_i^\dagger)^n |0\rangle \quad (3.4)$$

となり、これはモット絶縁体相として知られる。ここで自然数 n は各サイトの粒子数である。この2相の典型的な相違点は、ボース・アインシュタイン凝縮相は超流動性を示すが、モット絶縁体相は超流動性を示さないことである。動的平均場理論 [34, 42] によるとモット絶縁体相は

$$0 < \frac{J}{g} < -\frac{2(x - [x])(x - [x] - 1)}{x + 1} \quad (3.5)$$

の領域にあるときに実現され、それ以外ではボース・アインシュタイン凝縮が実現される。ただし $x = \mu/g$ 、 $[x]$ はガウス記号である。モット絶縁体相の有無は多孔質ガラス中の液体⁴Heでは未だよく分かっていないが、近年、光格子中の中性アルカリ原子気体において観測された [43]。

ランダムポテンシャルが加わった $\Delta \neq 0$ の場合、超流動相やモット絶縁体相の領域は収縮し、新しい相が出現する。例えば動的平均場理論においてモット絶縁体相の領域は式 (3.5) から

$$0 < \frac{J}{g} < -\frac{2(x - [x] - \Delta/g)(x - [x] - 1 + \Delta/g)}{|x + 1 - (2[x] + 3)\Delta/g|} \quad (3.6)$$

へと収縮する (図 3.1(a) を参照)。動的平均場理論の範囲内では、収縮した領域がどのような相なのかを議論することはできないが、経路積分モンテカルロ法などを用いてこの系の物理的性質が幾つかのグループによって調べられている [44, 45, 46, 47]。図 3.1(b) に Krauth らによって得られたボース・ハバードモデルにおける超流動密度の典型的な相互作用依存性を示す。この計算はサイト数と粒子数が異なっており、モット絶縁体相は現れない。それにも関わらず、有限の Δ では g/J の小さな領域と大きな領域において超流動密度が消失し、新しい常流動相が出現していることが分かる。

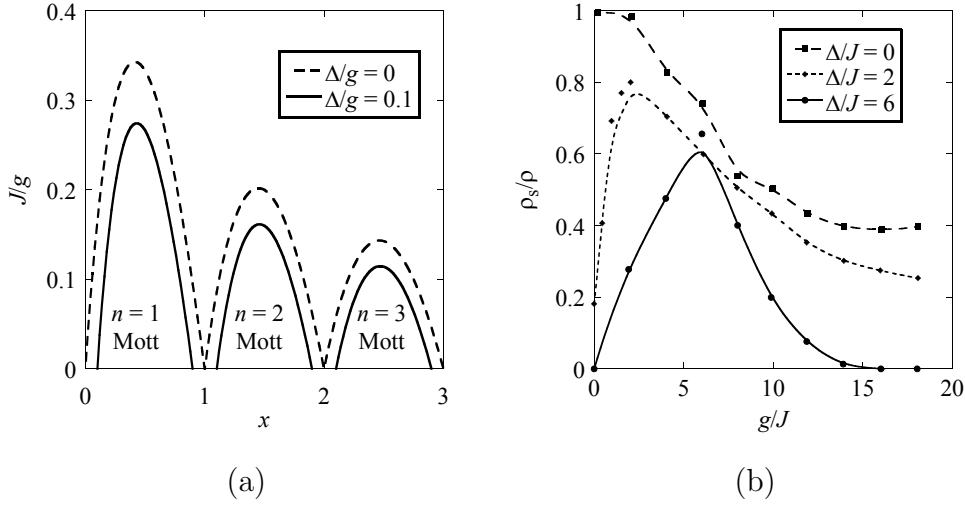


図 3.1: (a) : 式 (3.5)、(3.6) から得られるモット絶縁体相の領域。(b) : 経路積分モンテカルル口法によって得られる超流動密度の相互作用依存性。サイト数 6×6 、粒子数 27 の、モット絶縁体相が現れない系における計算である。(b) は文献 [44] より。

相互作用の小さい領域における常流動相はアンダーソングラス相として知られ、電子系におけるアンダーソン局在とほぼ等価である [31, 32, 33]。つまり相互作用が小さいと、ほとんど全ての粒子がランダムポテンシャルの空間的な最小点へと局在し、1 点に集中したボース・アインシュタイン凝縮が実現される。そのため、もはや系は超流動性を示さない、アンダーソングラスの状態が実現される。一方、相互作用の大きい領域における常流動相はボースグラス相として知られ、アンダーソングラスよりも状況は複雑である。これは次の描像で理解できる。粒子間斥力が強いと、サイト間における粒子の交換が抑制され、位相の揺らぎが増大する。その結果、各サイト内にボース・アインシュタイン凝縮体が孤立し、サイト間において凝縮体の位相が揃わなくなったボースグラスが実現する。ボースグラスはサイト間で位相の相関が消失するので、超流動性を持っていない。モット絶縁体相、超流動相、アンダーソングラス相、ボースグラス相の直感的なイメージを図 3.2 に示し、物理的な性質の幾つかを表 3.1 にまとめる。モット絶縁体相は他の 3 つと全く異なる物理的な性質を持つが、他の 3 つの相はボース・アインシュタイン凝縮が超流動性を示すか否かという点のみにおいて異なる。特にアンダーソングラス相とボースグラス相は出現する粒子間相互作用の領域のみ異なる (ただし動的な性質は全く異なると思われる)。

非常に興味深いのは、系の粒子密度を変化させることで粒子間の実効的な斥力

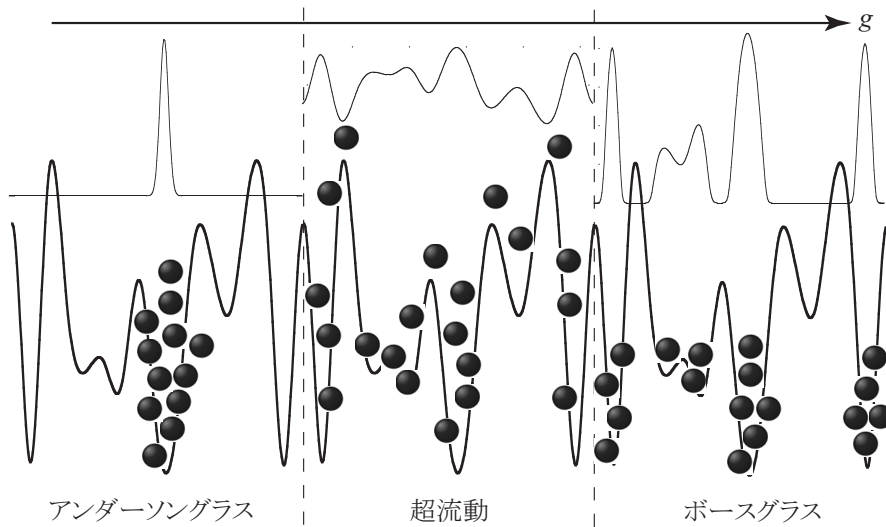


図 3.2: アンダーソングラス相、超流動相、ボースグラス相の直感的イメージ。下側の曲線はポテンシャルを、上側の曲線は凝縮体の波動関数を表す。

	超流動性	圧縮性	エネルギーギャップ
超流動相	○	○	×
アンダーソングラス相	×	○	×
ボースグラス相	×	○	×
モット絶縁体相	×	×	○

表 3.1: 超流動相、アンダーソングラス相、ボースグラス相、モット絶縁体相の物理的な性質。

が変化すると考えたときに、図 3.1(b) で記述される超流動の振る舞いが実験で得られた図 2.8 の相図と定性的に一致することである。つまり Reppy 達が低注入量領域で観測した超流動密度の消失は、超流動相からアンダーソングラス相への転移であり、山本達が観測した高圧下における超流動の消失はボースグラス相への転移であると考えられる。しかし実験が多孔質ガラスの孔径依存性を強く持つのに対して、ボース・ハバードモデルが多孔質ガラスの孔径に相当するようなパラメータを持たないこと、そしてボース・ハバードモデルは1サイトあたりに1つの状態しか考慮していないことから、高密度の領域を正確に記述できない。ボース・ハバードモデルは実験結果に対する非常に興味深い定性的理解を与えるが、以上の2つの理由により、定量的な議論を行うには不十分である。

なおここではランダムポテンシャルとして $\delta\mu_i$ を用いたが、それ以外にも J や g にサイト依存性を与えたようなボース・ハバードモデルの解析も存在し、興味深

い結果が報告されている [48, 49]。

3.2 ランダムポテンシャル中における3次元希薄ボース気体

前節のボース・ハバードモデルにおける解析とは全く別に、Huang 達はランダムポテンシャル中における3次元希薄ボース気体のモデルを用いて、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動の解析を行った [30, 50, 51]。彼らは Reppy 達の実験で行われたような液体⁴Heの低注入量領域を想定し、希薄ボース気体において通常行われている場の理論を用いた議論に、ランダムポテンシャルを摂動論的に取り入れることを試みた。ランダムポテンシャルに関しては、長いスケールにおいてほとんど変化しないような「鈍った」ランダムネスを仮定し、具体的には不純物ポテンシャルが希薄に分布するようなものを用いている。具体的な計算に関しては、第5章において我々が行う計算と類似しているので詳細は省くが、彼らは最終的に極低温における凝縮体密度と超流動密度に関して次のような式を得た。

$$\frac{n_0}{n} = e^{-2\alpha} - \frac{1}{\cosh \alpha} \left(\frac{T}{T_1} \right)^2 + \frac{K_1(\alpha)}{\sqrt{na^3}} \left(\frac{T}{T_1} \right)^4 \quad (3.7a)$$

$$\frac{n_s}{n} = \frac{1}{3}(4e^{-2\alpha} - 1) + \frac{4}{3}e^\alpha \tanh \alpha \left(\frac{T}{T_1} \right)^2 - \frac{K_2(\alpha)}{\sqrt{na^3}} \left(\frac{T}{T_1} \right)^4 \quad (3.7b)$$

$$\sinh \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{na^3} R \quad (3.7c)$$

$$k_B T_1 = \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{\sqrt{2}\pi^{5/4}m} (n^3 a)^{1/4} \quad (3.7d)$$

$$K_1(\alpha) = \frac{3}{1280} \frac{e^{4\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.7e)$$

$$K_2(\alpha) = \frac{e^{5\alpha}}{16\pi^{9/2}} \left(1 + \frac{\pi^4}{20\sqrt{2}} \tanh \alpha \right) \quad (3.7f)$$

n_0 、 n_s は凝縮体、超流体の粒子数密度、 n は全粒子数密度、 a はボース粒子間相互作用において弱結合近似を行ったときの s 波散乱長、 R は不純物ポテンシャルの強度を表す無次元パラメーターであり、 $R = \chi(b/a)^2$ で与えられる。ここで b は不純物とボース粒子との相互作用において弱結合近似を行ったときの s 波散乱長、 $\chi = n_{\text{imp}}/n$ は全粒子数密度に対する不純物密度 n_{imp} の割合である。式 (3.7) で特徴的なのは絶対零度 $T = 0$ において凝縮体 n_0 は必ず存在するのに対して、超流体 n_s は $\alpha > \log 2$ の領域において消失することである。 α は粒子間相互作用 a や粒子

数密度 n の単調減少関数なので、超流動の消失は相互作用の弱い、または低密度の領域で実現される。これは前節のボース・ハバードモデルにおいて議論したアンダーソングラス相への転移に相当し、式 (3.7) はこの相転移のより定量的な結果を与えてくれる。図 3.3 は n_s の n 、 T 依存性である。先ほど議論したように、有限の粒子数密度以下において超流動が消失しているのが分かる。もう1つ興味深いのは低密度の領域で、超流動が再起型の振る舞いをしていることである。つまり低密度で n_s は $n_s = 0$ の常流動相から、温度の増加とともに n_s が立ち上がって超流動相となり、極大値をとった後減少して再び $n_s = 0$ の常流動相になる。これはアンダーソングラスとして局在していたボース・アインシュタイン凝縮体が温度の増加とともに遍歴し、超流動に寄与するという描像で理解できる。このような超流動の振る舞いは実験では観測されていないが、もし観測されれば実験におけるアンダーソングラス相の存在を強く支持することになるであろう。

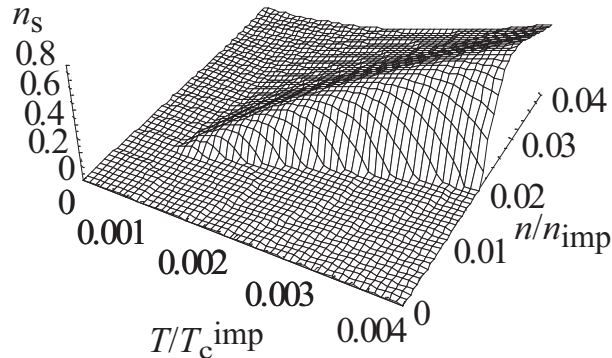


図 3.3: 式 (3.7b) 式から得られる超流動密度の温度、粒子数依存性。ここで $T_c^{\text{imp}} = 2\pi\hbar^2/m(n_{\text{imp}}/\zeta(3/2))^{2/3}$ である (式 (2.2) を参照)。パラメータとして $n_{\text{imp}} = 0.1$ 、 $b/a = 1$ を用いた。

Huang 達のモデルは希薄ボース気体の系を仮定しているため、高密度の領域や粒子間相互作用の強い領域では完全に破綻する。そのため前節のボース・ハバードモデルにおいて得られたボースグラス相を扱うことは不可能である。また彼らのモデルはボース・ハバードモデルと同様に、多孔質グラスの孔径依存性が考慮に入っていないので、実験との定量的な比較ができず、モデルの正当性はよく分からない。

第4章 ボース流体の理論的取り扱い

本章ではボース・アインシュタイン凝縮と超流動に関わる理論的考察を行う [1, 52, 53, 54, 55, 56]。基本的なボース・アインシュタイン凝縮の理論に関しては、数多くの優れた統計力学の良書を参照していただくとし、本研究に関わる議論のみを紹介する [18]。また超流動に関しては、Landau の準粒子模型に基づいた微視的な議論と、より一般的な線形応答に基づく理論を紹介する。これらは次章で我々が行うランダムポテンシャル中におけるボース流体の解析の基礎となる。

4.1 ボース・アインシュタイン凝縮

ボース・アインシュタイン凝縮を考える準備としてまずはじめに、ボース場の演算子 $\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})$ とボース粒子の波数 \boldsymbol{k} における消滅演算子 $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を考える。これらの演算子はボース粒子系の場合、交換関係

$$[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}')] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \quad [\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \hat{\Psi}(\boldsymbol{x}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}), \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}')] = 0 \quad (4.1)$$

$$[\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'}, \quad [\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}(\boldsymbol{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}')] = 0 \quad (4.2)$$

を満たす。また $\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})$ と $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ はフーリエ変換

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \hat{a}(\boldsymbol{k}) \quad (4.3)$$

によって関係づけられている。3次元空間における理想ボース気体では、ゼロ運動量 $\boldsymbol{k} = 0$ の平均粒子数が、式 (2.2) で与えられる転移温度以下において、有限の値になることによってボース・アインシュタイン凝縮が定義される。

$$n_0 = \frac{1}{V} \langle \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) \rangle \quad (4.4)$$

V は系の体積で $\langle \rangle$ は熱平均操作を意味する。相互作用のある系でのボース・アインシュタイン凝縮も同じような方法で定義することができるが、その場合 $\langle \rangle$ は相互作用を含めたハミルトニアンにおける熱平均操作となり、問題は非常に複雑になる。また理想ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮は3次の相転移とな

るが、相互作用のある系では一般的にそうではない。相互作用のある系において凝縮体密度を見積もるのには1体密度行列と呼ばれる対相関関数

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}') \rangle = \frac{1}{V} \langle \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) \rangle + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle \quad (4.5)$$

を用いる。式(4.5)の右辺第2項は $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$ の極限において振動因子 $e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'')}$ のために0となり、残った第1項、つまり

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}') \rangle \xrightarrow{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} n_0 \quad (4.6)$$

がボース・アインシュタイン凝縮の見積もりに用いられる。

ボース・アインシュタイン凝縮のより一般的な本質はゲージ対称性の破れと、位相のコヒーレンスという2つの現象である。これはボース・アインシュタイン凝縮のより一般的な条件 [57]

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}') \rangle \xrightarrow{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle \langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}') \rangle \quad (4.7)$$

によって具体的に示される。ここで $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle$ は凝縮体の波動関数と呼ばれ、位相と振幅を持つ。対称性の破れはこの波動関数が有限の大きさを持ち、ハミルトニアンが波動関数（一般にはゲージ不変である）の一定の位相変化に対して不変であるにも関わらず、その基底状態が位相に依存するという事実に基づいている。位相のコヒーレンスは、熱平均をとったときにそれが消えないことから波動関数の位相が系全体にわたって空間的に相関しているという事実に基づいている。位相のコヒーレンスはAndersonの次のような議論から簡単に想像することができる [58, 59]。N個の粒子が $k = 0$ の状態である系を考え、その系は同じサイズのK個の箱に分割されているとする。熱力学的極限を考えると各々の箱に N/K 個の粒子が含まれていることになる。 \hat{A}_i をi番目の箱における $k = 0$ の粒子の消滅演算子であるとする。すると

$$\hat{a}(0) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_i \hat{A}_i \quad (4.8a)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) \rangle = N \quad (4.8b)$$

$$\langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle = N/K \quad (4.8c)$$

となるので最終的に次の式が得られる。

$$N = \frac{N}{K} + \frac{1}{K} \sum_{i \neq j} \langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \rangle \quad (4.8d)$$

非常に大きな K に対しては式 (4.8d) の右辺第 2 項が支配的になり、これは \hat{A}_i の異なる箱での位相が相関を持っていることを意味している。

ボース・アインシュタイン凝縮の正しい秩序変数は凝縮体の波動関数 $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle$ であるが、それは系の微視的な特性である。一般的なボース・アインシュタイン凝縮の特性を議論する場合には $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle$ を粗視化した、巨視的な秩序変数

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})e^{i\phi(\mathbf{x})} \quad (4.9a)$$

を導入する方がより適切である。振幅 $f(\mathbf{x})$ は凝縮体の粒子数密度 $n_0(\mathbf{x})$ 、位相 $\phi(\mathbf{x})$ は凝縮体による超流動速度場 \mathbf{v}_s と関係づけられる。

$$f^*(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = n_0(\mathbf{x}) \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (4.9c)$$

特に式 (4.9c) は超流動の非回転性である式 (2.1) を与える。 $\phi(\mathbf{x})$ の一価性より、任意の閉じた閉曲線における $\phi(\mathbf{x})$ の変化は 2π の整数倍である。ここから Onsager - Feynman の量子条件 [11, 12]

$$\oint d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_s = \frac{hn}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.10)$$

が得られる。 $n \neq 0$ は量子渦が存在することを意味し、第 II 部で議論される量子乱流において、最も重要な役割を果たす。

ここまでは一般的なボース・アインシュタイン凝縮の性質について説明したが、Bogoliubov は以下のような、より扱いやすいボース・アインシュタイン凝縮の数学的枠組みを提唱した [60]。それは式 (4.3) において場の演算子を凝縮体の項 $\mathbf{k} = 0$ とそれ以外の成分に

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \frac{\hat{a}(0)}{\sqrt{V}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{a}(\mathbf{k}) \quad (4.11)$$

と分け、演算子 $\hat{a}(0)$ と $\hat{a}^\dagger(0)$ を c -数である $\sqrt{N_0}$ に置き換えるというものである (N_0 は凝縮体の粒子数)。これは熱力学的極限 ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V \rightarrow const$) においては $N_0 \gg 1$ なので、 $\sqrt{N_0}$ のオーダーである演算子そのものに対して、1 のオーダーである演算子 $\hat{a}(0)$ と $\hat{a}^\dagger(0)$ の交換関係を無視する、

$$\frac{[\hat{a}^\dagger(0), \hat{a}(0)]}{V} = \frac{N_0 + 1 - N_0}{V} = \frac{1}{V} \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

という近似に相当する。これは明らかに N_0 の揺らぎを無視している。しかしこの Bogoliubov の方法は、極低温において 1 粒子の基底状態を占有している粒子の数

が、全粒子数 N の1部分にある限り、相互作用のある系を熱力学的極限において正しく記述することができる。したがって、ボース場の演算子を次のように書くことができる。

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \frac{N_0}{\sqrt{V}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{a}(\mathbf{k}) = \sqrt{n_0} + \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

ここで $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ は凝縮体からの揺らぎを表す演算子である。系が一様でないことを明確に示す場合、式 (4.13) を式 (4.9) で定義した秩序変数を用いて次のように書くこともできる。

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

4.2 超流動

粘性が消失するといったような通常の流体では見られないような超流動の性質は、現象論的な2流体モデルを用いて説明される。2流体モデルは、超流動転移温度以下において流体が常流体と超流体から構成されているとという考えに基づく。それぞれの質量密度を ρ_n 、 ρ_s 、速度場を \mathbf{v}_n 、 \mathbf{v}_s とすると、流体の全質量密度 ρ および全質量流密度 \mathbf{j} は

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (4.15)$$

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \quad (4.16)$$

と表される。ここで定義された ρ_n 、 ρ_s に対する微視的な描像は、Landau の準粒子モデルを用いて与えられる [5, 6, 7]。Landau は常流動の本質は励起された準粒子の平均流であるという、本質的かつ実質的な議論を提唱した。ここでは例として、十分長いパイプ状の容器の中の流れを考える。2流体性を考慮して、それぞれ独立な速度場 \mathbf{v}_n 、 \mathbf{v}_s が生じているとする。 \mathbf{v}_s 静止系での質量流密度は

$$\mathbf{j} = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (4.17)$$

となる。またこの系における準粒子の運動量とエネルギーをそれぞれ \mathbf{p} 、 ε_p とすると、 \mathbf{v}_n 静止系での励起エネルギー ε'_p は、ガリレイ変換より

$$\varepsilon'_p = \varepsilon_p - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (4.18)$$

の関係で与えられる。もし流体と壁との相互作用により準粒子を自発的に放出するのであれば、超流動の流れは力学的に不安定になる。これが実現するのは、 \mathbf{v}_s

があるときの、 v_n 静止系に対する準粒子のエネルギー ε'_p が負になるときである。容器が静止しているとする $v_n = 0$ となり、 ε'_p は式 (4.18) で与えられるので、

$$\varepsilon'_p = \varepsilon_p + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s \geq 0 \quad (4.19)$$

が超流動の安定条件となる。 \mathbf{p} と \mathbf{v}_s が反平行のときに ε'_p は最小となるので、超流動の臨界速度 v_c は

$$v_c = \text{Min} \left(\frac{\varepsilon_p}{p} \right) \quad (4.20)$$

で与えられる。例えば図 2.2(a) のような準粒子の励起スペクトルを持つ超流動 ${}^4\text{He}$ では v_c が有限となり、超流動状態になることが示されるが、励起スペクトル $\varepsilon_p = p^2/2m$ を持つ自由粒子系では $v_c = 0$ から、どんなに小さな v_s の流れも不安定となる。このことは粒子間相互作用が超流動にとって重要であることを表している。

常流体、超流体の定量的な計算も可能である。 v_s 静止系における準粒子の熱平衡状態での分布関数を $f(\varepsilon'_p)$ とすると、準粒子が運ぶ平均運動量密度は $\mathbf{j} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} f(\varepsilon'_p)$ となる。 \mathbf{j} の i 成分は

$$\begin{aligned} j_i &= \sum_{\mathbf{p}} p_i f(\varepsilon'_p) \\ &= - \sum_{\mathbf{p}} p_i \frac{\partial f(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる。ここで $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ が十分小さいとして展開し、一次の項のみを残した。ここで流体の等方性を仮定し、式 (4.17) と比較すれば

$$\rho_n = -\frac{1}{3} \sum_{\mathbf{p}} p^2 \frac{\partial f(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p} \quad (4.22)$$

が得られる。以上の議論から、常流動はインコヒーレントな熱運動をしている準粒子の平均流によって表されることが分かる。また図 2.2(a) で示されるような液体 ${}^4\text{He}$ の準粒子スペクトルを式 (4.22) に代入して得られる常流体密度は低温において実験値と驚くほど良い一致を示す。

一方、Hohenberg と Martin は Landau よりも一般的な方法で常流動密度を定義した [61]。彼らは超流動密度がボース・アインシュタイン凝縮における凝縮体のような熱平衡量ではなく、むしろ非平衡の線形応答理論を用いて定義されるべきであると提唱した。ここで先ほどと同じように十分長いパイプ状の容器を考え、パイプを速度 v でゆっくり動かしたとする。系には摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{ex}}(t) = \int d\mathbf{x} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \hat{\Xi}(t, \mathbf{x}) \quad (4.23)$$

が加わる。ここで $\hat{\Xi}(t, \boldsymbol{x})$ は運動量密度を表す量子力学的演算子であり、外場 $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ は古典量とする。この摂動による線形応答としてパイプ中に誘起させる質量流の統計的平均値 $\langle \hat{\boldsymbol{j}}(t, \boldsymbol{x}) \rangle$ がを考える。そのときの感受率 $D_{ij}(t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ は線形応答理論によって

$$D_{ij}(t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{j}_i(t, \boldsymbol{x}), \hat{\Xi}_j(t', \boldsymbol{x}')] \rangle \quad (4.24)$$

と与えられる。 $D_{ij}(t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ のフーリエ変換 $D_{ij}(k_0, \boldsymbol{k})$ における $k_0 \rightarrow 0$ 成分は縦成分 $A(\boldsymbol{k})$ と横成分 $B(\boldsymbol{k})$ を用いて

$$D_{ij}(k_0 \rightarrow 0, \boldsymbol{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} A(\boldsymbol{k}) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) B(\boldsymbol{k}) \quad (4.25)$$

と表される。超流動状態における特徴は、質量密度に対し

$$A(\boldsymbol{k} \rightarrow 0) = \rho \quad (4.26)$$

$$B(\boldsymbol{k} \rightarrow 0) = \rho_n \quad (4.27)$$

の関係が成立することである。前者は一般の系で成立する f-sum rule であるが、後者は常流動密度 ρ_n が横成分、つまり $\nabla \cdot \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = 0$ を満たす外場の応答によることを表している。式 (4.15) を用いると式 (4.25)、(4.26)、(4.27) は

$$D_{ij}(k_0 \rightarrow 0, \boldsymbol{k} \rightarrow 0) = \delta_{ij} \rho_n + \frac{k_i k_j}{k^2} \rho_s \quad (4.28)$$

と書くことができる。 ρ_s の存在は $D_{ij}(k_0 \rightarrow 0, \boldsymbol{k})$ が $\boldsymbol{k} \rightarrow 0$ に対して等方的ではなく、 $D_{ij}(k_0 \rightarrow 0, \boldsymbol{k} \rightarrow 0)$ が発散していることを意味する。また $D_{ij}(k_0 \rightarrow 0, \boldsymbol{k} \rightarrow 0)$ が $k_i k_j$ の成分を持つことは、運動量の間長距離相関があるを表している。ここで導入した ρ_n を準粒子の描像で表したのが先ほどの Landau の議論である。本論分において超流動密度を議論する際にはこの線形応答理論による方法が用いられ、次章においてより詳しく説明する。

このような線形応答理論を用いた議論以外に、Winding number を用いた議論がある [62]。これは主に前節で紹介したボース・ハバードモデルの経路積分モンテカルロ計算において超流動密度を計算するとき用いられるが、本論分では割愛する。

第5章 ランダムポテンシャル中におけるボース流体の理論

相互作用のない3次元理想ボース気体の場合、よく知られているように低温において巨視的な数の粒子が基底状態を占有し、ボース・アインシュタイン凝縮を起こす。粒子間に相互作用があるときも同様にボース・アインシュタイン凝縮が低温において実現されると考えられ、液体 ^4He の場合、超流動への相転移が起こる。第2章で紹介したような多孔質ガラス中の液体 ^4He の実験において、 ^4He のボース・アインシュタイン凝縮や超流動がどのように抑制されるのかを理論的に考察するのが本章の目的である。そのための解析的モデルとしてランダムポテンシャル中のボース流体を用いる。

類似した問題としてランダムポテンシャル中のフェルミ粒子系の金属-アンダーソン絶縁体転移の問題がある [31, 32, 33]。しかし解析的扱いはフェルミ粒子系よりもボース粒子系の方が複雑である。なぜなら、粒子間相互作用のないボース粒子系を考えた場合、すべての粒子がランダムポテンシャルの空間的な最小点へ局在するからである。他方、フェルミ粒子系ではパウリの原理が働くため、このようなことは起こらない。つまりフェルミ粒子系では、最も簡単なモデルとしてランダムポテンシャル中の自由フェルミ粒子系のモデルが可能であり、それを出発点として粒子間相互作用を摂動として扱うことが可能である。ところがボース粒子系では出発点として粒子間相互作用を考えなければいけない。

本章では次のように話を進める。まず最初にランダムポテンシャル中におけるボース流体の一般的な解析を展開する。次に粒子密度の小さい希薄領域において解析を進めた後に、主に Reppy 達によって行われた低注入量における多孔質ガラス中の液体 ^4He の実験との定量的な比較を行う。次に粒子密度の大きな強相関領域において解析を進めた後に、山本達によって行われた高圧下における多孔質ガラス中の液体 ^4He の実験との定量的な比較を行う。

5.1 ランダムポテンシャル中におけるボース流体の理論的取り扱い

ランダムポテンシャル中における3次元ボース流体のハミルトニアンは以下のような形で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu\hat{N} = & \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}') g_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}') \\ & + \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで $U(\mathbf{x})$ は外場、 $g_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ は粒子間斥力相互作用のポテンシャルである。このハミルトニアンから出発し、以降は全て摂動論を用いた議論を展開する [54, 55, 56]。式 (5.1) の第1項は運動エネルギー項であり、無摂動項である。第2項は粒子間斥力相互作用を表す項であり、粒子密度が小さい場合と大きい場合において異なる摂動論を展開する。第3項は外場によるエネルギーを表す項であり、 $U(\mathbf{x})$ が多孔質ガラスを想定したランダムポテンシャルである。

$U(\mathbf{x})$ の存在は系を非一様にし、問題を複雑にする。しかしここでは $U(\mathbf{x})$ を含む式 (5.1) の第3項を摂動として扱うので、無摂動状態は一様であり、したがって波数 \mathbf{k} を量子数として解析を進めることが可能となる。式 (4.3) と

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} U(\mathbf{k}) \quad (5.2)$$

$$g_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} g_0(\mathbf{k}) \quad (5.3)$$

のフーリエ変換を用いてハミルトニアン (5.1) を波数で表示すると次のような形になる。

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu\hat{N} = & \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right] \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) g_0(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_1) \\ & + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1) U(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

次に前章で説明した Bogoliubov の方法を用いてこの系のボース・アインシュタイン凝縮を考える。式 (4.13) は消滅演算子の $\hat{a}(\mathbf{k} = 0)$ 成分を $\sqrt{N_0}$ で置き換えることに相当するので、ハミルトニアン (5.4) は

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \hat{K} = K_0 + \hat{K}_{\text{kin}} + \hat{K}_{\text{I2}} + \hat{K}_{\text{I3}} + \hat{K}_{\text{I4}} + \hat{K}_{\text{R1}} + \hat{K}_{\text{R2}}$$

$$K_0 = V \left[-\mu n_0 + \frac{g_0(0)}{2} n_0^2 \right] \quad (5.5a)$$

$$\hat{K}_{\text{kin}} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + \frac{U(0)}{V} \right] \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\text{I2}} = \frac{n_0}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} g_0(\mathbf{k}) [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}) + \hat{a}(\mathbf{k}) \hat{a}(-\mathbf{k}) + 2\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k})] \\ + 2g_0(0) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.5c)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\text{I3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_0}{V}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q} \neq 0} g_0(\mathbf{q}) [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k}) \\ + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k}) \hat{a}(-\mathbf{q}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k})] \end{aligned} \quad (5.5d)$$

$$\hat{K}_{\text{I4}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q} \neq 0} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}) g_0(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_1) \quad (5.5e)$$

$$\hat{K}_{\text{R1}} = \sqrt{\frac{n_0}{V}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) + U(-\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k})] \quad (5.5f)$$

$$\hat{K}_{\text{R2}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \neq 0} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1) U(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \quad (5.5g)$$

となる。式 (5.5b) において $U(0)/V$ は定数なので、 $\mu - U(0)/V$ を新たな化学ポテンシャル μ と書くことにする。

式 (5.5) における摂動論を展開する。そのために次のような温度グリーン関数を定義する

$$\hat{\mathcal{G}}(\tau; \tau', \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11}(\tau; \tau', \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{12}(\tau; \tau', \mathbf{k}) \\ \mathcal{G}_{21}(\tau; \tau', \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{22}(\tau; \tau', \mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (5.6a)$$

$$\mathcal{G}_{11}(\tau; \tau', \mathbf{k}) = -\text{Tr}\{e^{\beta(\Omega - \hat{K})} T_\tau [\hat{a}(\tau, \mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(\tau', \mathbf{k})]\} \quad (5.6b)$$

$$\mathcal{G}_{12}(\tau; \tau', \mathbf{k}) = -\text{Tr}\{e^{\beta(\Omega - \hat{K})} T_\tau [\hat{a}(\tau, \mathbf{k}) \hat{a}(\tau', -\mathbf{k})]\} \quad (5.6c)$$

ここで Ω は熱力学関数である。またグリーン関数において $k = 0$ となる部分は、消滅演算子において c -数と置き換えているので、以後全て除外する。さらに τ は

虚時間であり、任意の演算子 \hat{A} に対するハイゼンベルク表示

$$\hat{A}(\tau) = e^{\hat{K}\tau} \hat{A} e^{-\hat{K}\tau} \quad (5.7)$$

を用いた。 T_τ は虚時間順序づけを意味する。無摂動ハミルトニアン \hat{K}_{kin} に対する無摂動グリーン関数 $\mathcal{G}^0(\tau; \tau', \mathbf{k})$ は相互作用表示

$$\hat{A}_I(\tau) = e^{\hat{K}_{\text{kin}}\tau} \hat{A} e^{-\hat{K}_{\text{kin}}\tau} \quad (5.8)$$

を用いて次のように与えられる。

$$\mathcal{G}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{12}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) \\ \mathcal{G}_{21}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{22}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (5.9a)$$

$$\mathcal{G}_{11}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) = -\text{Tr}\{e^{\beta(\Omega - \hat{K}_{\text{kin}})} T_\tau[\hat{a}_I(\tau, \mathbf{k}) \hat{a}_I^\dagger(\tau', \mathbf{k})]\} \quad (5.9b)$$

$$\mathcal{G}_{12}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) = -\text{Tr}\{e^{\beta(\Omega - \hat{K}_{\text{kin}})} T_\tau[\hat{a}_I(\tau, \mathbf{k}) \hat{a}_I(\tau', -\mathbf{k})]\} \quad (5.9c)$$

$\mathcal{G}^0(\tau; \tau', \mathbf{k})$ はフーリエ変換

$$\mathcal{G}^0(\tau; \tau', \mathbf{k}) = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n e^{-ik_{0n}(\tau - \tau')} \mathcal{G}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \quad (5.9d)$$

を用いて、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{12}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \\ \mathcal{G}_{21}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) & \mathcal{G}_{22}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hbar & 0 \\ i\hbar k_{0n} - (\hbar^2 k^2 / 2m - \mu) + i0 & \hbar \\ 0 & -i\hbar k_{0n} - (\hbar^2 k^2 / 2m - \mu) + i0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9e)$$

ただし、 $k_{0n} = 2n\pi/\beta\hbar$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) はボース粒子に対する松原周波数である。また無限小虚部 $+i0$ は後の絶対零度における解析のために便宜上導入したもので、有限温度では0として扱う。

粒子間相互作用の摂動ハミルトニアン \hat{K}_{I2} 、 \hat{K}_{I3} 、 \hat{K}_{I4} における摂動を受けたグリーン関数 \mathcal{G}^1 は、次のダイソン方程式によって計算することができる。

$$\hat{\mathcal{G}}^1(k_{0n}, \mathbf{k}) = \hat{\mathcal{G}}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) + \hat{\mathcal{G}}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \hat{\Sigma}(k_{0n}, \mathbf{k}) \hat{\mathcal{G}}^1(k_{0n}, \mathbf{k}) \quad (5.10)$$

ここで $\hat{\Sigma}(k_{0n}, \mathbf{k})$ は自己エネルギー

$$\hat{\Sigma}(k_{0n}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) & \Sigma_{12}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \\ \Sigma_{21}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) & \Sigma_{22}^0(k_{0n}, \mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

であり、希薄領域、強相関領域において具体的な図形解析を行うことによって求められる。

ランダムポテンシャルの摂動ハミルトニアン \hat{K}_{R1} 、 \hat{K}_{R2} における摂動計算の詳細は $\hat{\mathcal{G}}^1(k_{0n}, \mathbf{k})$ の具体的な形が得られたときに説明する。最終的に得られたグリーン関数 $\hat{\mathcal{G}}(k_{0n}, \mathbf{k})$ を用いると、系全体の粒子数密度 n_0 と全エネルギー E は

$$n = n_0 - \frac{1}{V} \frac{1}{\beta \hbar} \sum_{n, \mathbf{k}} e^{+ik_{0n}0} \mathcal{G}_{11}(k_{0n}, \mathbf{k}) \quad (5.12a)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{2} \mu n - \frac{1}{2V} \frac{1}{\beta \hbar} \sum_{n, \mathbf{k}} e^{+ik_{0n}0} \left(i \hbar k_{0n} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu \right) \mathcal{G}_{11}(k_{0n}, \mathbf{k}) \quad (5.12b)$$

と与えられる。化学ポテンシャル μ の計算は、ボース・アインシュタイン凝縮をしている系において通常用いられる Hugenholtz-Pines の定理 [63]

$$\mu = \hbar [\Sigma_{11}(0, 0) - \Sigma_{12}(0, 0)] \quad (5.13)$$

を用いる。式 (5.13) で得られる化学ポテンシャル μ は素励起のスペクトルがギャップレスにならなければならないという Goldstone の定理を満足する [64, 65]。

次に超流動密度の計算方法について述べる。超流動密度は線形応答理論を用いて計算する [61]。線形応答理論の概念については前章で説明したので、ここではグリーン関数を用いた具体的な計算方法を説明する。系に流れ場を与えたときの摂動ハミルトニアンは式 (4.23) で与えられる。ここで運動量密度演算子 $\hat{\Xi}(t, \mathbf{x})$ は

$$\hat{\Xi}(t, \mathbf{x}) = i \hbar \hat{\Psi}^\dagger(t, \mathbf{x}) \nabla \hat{\Psi}(t, \mathbf{x}) \quad (5.14)$$

である。この摂動ハミルトニアンが時刻 t_0 から加えられたとする。そのときの i 方向の運動量の応答 $\langle \hat{j}_i(t, \mathbf{x}) \rangle$ は線形応答理論により

$$\begin{aligned} \langle \hat{j}_i(t, \mathbf{x}) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \text{Tr} \{ e^{\beta(\Omega - \hat{K})} [\hat{H}_{\text{ex}}(t'), \hat{j}_i(t, \mathbf{x})] \} \\ &= \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \int d\mathbf{x}' D_{ij}^R(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') v_j(t', \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる。ここで $D_{ij}^R(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ は遅延感受率

$$i D_{ij}^R(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \text{Tr} \{ e^{\beta(\Omega - \hat{K})} [\hat{j}_i(t, \mathbf{x}), \hat{\Xi}_j(t', \mathbf{x}')] \} \quad (5.16)$$

であり、この横方向の成分が常流体成分 n_s/n となる。また $\hat{j}_i(t, \mathbf{x})$ は i 方向の運動量演算子

$$\hat{j}_i(t, \mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2i} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) \hat{\Psi}^\dagger(t, \mathbf{x}') \hat{\Psi}(t, \mathbf{x}) \quad (5.17)$$

である。次に虚時間形式の温度感受率を定義する。

$$\mathcal{D}_{ij}(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}') = -\text{Tr}\{e^{\beta(\Omega - \hat{K})} T_\tau[\hat{j}_i(\tau, \mathbf{x}) \hat{\Xi}_j(\tau', \mathbf{x}')]\} \quad (5.18)$$

フーリエ変換

$$\mathcal{D}_{ij}(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}') = \frac{1}{V} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{n, \mathbf{k}} e^{i[-k_{0n}(\tau - \tau') + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] } \mathcal{D}_{ij}(k_{0n}, \mathbf{k}) \quad (5.19)$$

を用いて k_{0n} 、 \mathbf{k} で表示すると、温度グリーン関数 $\mathcal{G}(k_{0n}, \mathbf{k})$ を用いて温度感受率 $\mathcal{D}_{ij}(k_{0n}, \mathbf{k})$ を計算することができる。具体的には

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij}(k_{0n}, \mathbf{k}) &= \frac{\hbar^2}{V} \beta \hbar^2 \sum_{n', \mathbf{k}'} k'_i k'_j e^{+ik'_{0n'} 0} \\ &\quad \times [\mathcal{G}_{11}(k_{0n'} - k_{0n}, \mathbf{k}' - \mathbf{k}/2) \mathcal{G}_{11}(k_{0n'}, \mathbf{k}' + \mathbf{k}/2) \\ &\quad - \mathcal{G}_{12}(k_{0n'} - k_{0n}, \mathbf{k}' - \mathbf{k}/2) \mathcal{G}_{21}(k_{0n'}, \mathbf{k}' + \mathbf{k}/2)] \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。遅延感受率 $D_{ij}^R(k_0, \mathbf{k})$ 、そして感受率 $D_{ij}(k_0, \mathbf{k})$ は温度感受率 $\mathcal{D}_{ij}(k_{0n}, \mathbf{k})$ の解析接続

$$\rho_{ij}(k'_0, \mathbf{k}) = [\mathcal{D}_{ij}(k'_{0n}, \mathbf{k})|_{ik'_0 \rightarrow k_0 - i0} - \mathcal{D}_{ij}(k'_{0n}, \mathbf{k})|_{ik'_0 \rightarrow k_0 + i0}]/i \quad (5.21a)$$

$$D_{ij}^R(k_0, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'_0}{2\pi} \frac{\rho_{ij}(k'_0, \mathbf{k})}{k_0 - k'_0 + i0} \quad (5.21b)$$

$$D_{ij}^A(k_0, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'_0}{2\pi} \frac{\rho_{ij}(k'_0, \mathbf{k})}{k_0 - k'_0 - i0} \quad (5.21c)$$

$$D_{ij}(k_0, \mathbf{k}) = \frac{D_{ij}^R(k_0, \mathbf{k})}{1 - e^{-\beta\hbar k_0}} + \frac{D_{ij}^A(k_0, \mathbf{k})}{1 - e^{\beta\hbar k_0}} \quad (5.21d)$$

を用いて計算される。ここで $\rho_{ij}(k'_0, \mathbf{k})$ は加重関数、 $D_{ij}^A(k_0, \mathbf{k})$ は先進感受率に相当する。式(4.25)を用いて $D_{ij}(k_0, \mathbf{k})$ を縦成分と横成分に分け、式(4.27)より常流動数密度 n_n を計算すれば

$$\begin{aligned} n_n &= \frac{\hbar}{3m} \frac{1}{V} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{n, \mathbf{k}} k^2 e^{+ik_{0n}} \\ &\quad \times [\mathcal{G}_{11}(k_{0n}, \mathbf{k}) \mathcal{G}_{11}(k_{0n}, \mathbf{k}) - \mathcal{G}_{12}(k_{0n}, \mathbf{k}) \mathcal{G}_{21}(k_{0n}, \mathbf{k})] \end{aligned} \quad (5.22)$$

が得られる。

5.2 希薄領域

本節では Reppy 達によって行われた低注入領域における実験を念頭に、梯子型の図形解析を用いることによって低密度希薄ボース気体の解析を行う。そして得られた結果と、彼らの実験との定量的な比較を行い、特に低密度領域におけるアンダーソングラスの可能性を考察する [19]。

5.2.1 自己エネルギーとグリーン関数の計算

低密度ボース気体を考えた場合、その粒子間相互作用は強い短距離芯をもった反発ポテンシャルのようなものになると考えられる。そのようなポテンシャル $g_0(x)$ は

$$g_0(x) = V_0 \theta(a - x) \quad (5.23)$$

という、到達距離 a の相互作用ポテンシャルに対する $V_0 \rightarrow \infty$ の極限に相当する。このようなポテンシャルに対する 2 粒子の散乱問題を考えた場合、散乱波動関数 $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x)$ に対するシュレディンガー方程式の形式的な解は

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \int d\mathbf{y} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tilde{g}(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{y}) \quad (5.24)$$

となる。ただし $\tilde{g}(x) = mg_0(x)/\hbar^2$ である。また系は無限に大きいとして波数 k の連続極限

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (5.25)$$

を用いた。以後、本節ではこの極限を用いて計算を行う。式 (5.24) の、 $x \rightarrow \infty$ に対して得られる漸近形

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}}{x} \quad (5.26)$$

は、波数 k の入射波が散乱され k' となる散乱振幅

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \tilde{g}(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{y}) = -\frac{\tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{4\pi} \quad (5.27)$$

を定義する。一方 $|\mathbf{k}| \rightarrow |\mathbf{k}'|$ において、散乱振幅は部分波展開

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (5.28)$$

によって与えられる。このとき位相のずれ δ_l は式 (5.23) で与えられるようなポテンシャルの場合、次のようになる。

$$\delta_l = -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \quad (5.29)$$

今、希薄な気体を考えているので、低エネルギーの散乱のみを考えればよい。よって式 (5.29) における s 波の散乱 $l=0$ の寄与のみを考慮し、 $k \rightarrow 0$ の極限をとることで位相のずれは

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rightarrow -a \quad (5.30)$$

となる。このとき a は s 波散乱長として定義される。また式 (5.24) はフーリエ変換

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{g}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

を用いれば次のような波数空間における形で書き直すことができる。

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \frac{1}{p^2 - k^2 - i0} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(\mathbf{q}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (5.32)$$

また式 (5.27) で与えられる散乱振幅を用いると式 (5.32) は次のような形になる。

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \frac{\tilde{f}(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{k^2 - p^2 + i0} \quad (5.33)$$

次に具体的な図形解析を行う。まず多体系における一般化された散乱振幅として解釈できる有効相互作用 $\Gamma(p_{n1}, p_{n2}; p_{n3}, p_{n4})$ を定義する。ここで p_n は松原周波数 p_{0n} と波数 \mathbf{p} を合わせた 4 次元波数である。 $\Gamma(p_{n1}, p_{n2}; p_{n3}, p_{n4})$ は多体系において、運動量 p_{n3} と p_{n4} の粒子が運動量 p_{n1} 、 p_{n2} の粒子へと散乱される散乱振幅を表す。 $\Gamma(p_{n1}, p_{n2}; p_{n3}, p_{n4})$ において梯子型の図形を取り込むと、その具体的な形は

$$\begin{aligned} \Gamma(p_{n1}, p_{n2}; p_{n3}, p_{n4}) &= g_0(p_{n1} - p_{n3}) - \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g_0(q_n) \mathcal{G}_{11}^0(p_{n1} - q_n) \\ &\quad \times \mathcal{G}_{11}^0(p_{n2} + q_n) g_0(p_{n1} - q_n - p_{n3}) + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

となる。これは次のような Bethe-Salpeter 方程式を与える [66]。

$$\begin{aligned} \Gamma(p_{n1}, p_{n2}; p_{n3}, p_{n4}) &= g_0(p_{n1} - p_{n3}) - \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g_0(q_n) \mathcal{G}_{11}^0(p_{n1} - q_n) \\ &\quad \times \mathcal{G}_{11}^0(p_{n2} + q_n) \Gamma(p_{n1} - q_n, p_{n2} + q_n; p_{n3}, p_{n4}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

ここで $g_0(p_n) = g_0(\mathbf{p})$ を用いた。ここまでは有限温度において温度グリーン関数を用いた解析を行ってきたが、Reppy 達の実験は 1 K 以下という極低温の領域であり、温度グリーン関数 \mathcal{G}_{11} をゼロ温度のグリーン関数 G_{11} に置き換えることによって絶対零度における解析を行う。これは虚時間に対する離散的な松原周波数 $i p_{0n}$ を実時間に対する連続的な周波数 p_0 に、 $\beta\hbar$ を $2\pi i$ に、そして和 \sum_n を積分 $\int dp_0$ に置き換えればよい。再度、 p_0 と \mathbf{p} を 4 次元波数 p で書き換えれば、絶対零度における Bethe-Salpeter 方程式

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1, p_2; p_3, p_4) &= g_0(p_1 - p_3) - \frac{1}{i\hbar} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} g_0(q) G_{11}^0(p_1 - q) \\ &\quad \times G_{11}^0(p_2 + q) \Gamma(p_1 - q, p_2 + q; p_3, p_4) \end{aligned} \quad (5.36)$$

を得る (図 5.1)。次に有効波動関数 Q を

$$\Gamma(p_1, p_2; p_3, p_4) = \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} g_0(q) Q(p_1 - q, p_2 + q; p_3, p_4) \quad (5.37)$$

の形で導入する。式 (5.36) より Q は

$$\begin{aligned} Q(p_1, p_2; p_3, p_4) &= (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3) - \frac{1}{i\hbar} G_{11}^0(p_1) G_{11}^0(p_2) \\ &\quad \times \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} g_0(q) Q(p_1 - q, p_2 + q; p_3, p_4) \end{aligned} \quad (5.38)$$

を満たす。質量中心の波数 $P = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ と相対波数 $p = (p_1 - p_2)/2$ 、 $p' = (p_3 - p_4)/2$ を用いて

$$\chi(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = \int \frac{dp_0}{2\pi} Q(P/2 + p, P/2 - p, P/2 + p', P/2 - p') \quad (5.39)$$

を定義すれば χ に対する方程式

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{1}{i\hbar} \int \frac{dp_0}{2\pi} G_{11}^0(P/2 + p) G_{11}^0(P/2 - p) \\ &\quad \times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g_0(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}', P) \end{aligned} \quad (5.40)$$

を得る。また Γ は

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g_0(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}', P) \quad (5.41)$$

となる。 $G_{11}^0(p) = \hbar / [\hbar p_0 - (\varepsilon_p - \mu) + i0]$ ($\varepsilon_p = \hbar^2 p^2 / 2m$) より式 (5.40) 右辺第 2 項の p_0 積分は

$$-\frac{1}{i\hbar} \int \frac{dp_0}{2\pi} G_{11}^0(P/2 + p) G_{11}^0(P/2 - p) = \frac{1}{\hbar P_0 + 2\mu - \varepsilon_{\mathbf{P}/2+\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{P}/2-\mathbf{p}} + i0} \quad (5.42)$$

となる。重心系の全エネルギー $E = \hbar P_0 + 2\mu - \hbar^2 P^2/4m = \hbar^2 \epsilon/m$ を導入し、式 (5.42) を式 (5.40) に代入して $\epsilon - p^2 + i0$ を掛ければ

$$\begin{aligned} (\epsilon - p^2 + i0)\chi(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(\mathbf{q})\chi(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p}', P) \\ = (2\pi)^3(\epsilon - p^2 + i0)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (5.43)$$

となる。これを式 (5.32)、(5.33) と比較すれば

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = \psi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{p}) \\ + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \left(\frac{1}{\epsilon - k^2 + i0} + \frac{1}{k^2 - p'^2 - i0} \right) \tilde{f}^*(\mathbf{p}', \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.44)$$

が得られ、最終的に

$$\begin{aligned} \frac{m}{\hbar^2} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = \tilde{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left(\frac{1}{\epsilon - k^2 + i0} + \frac{1}{k^2 - p'^2 - i0} \right) \tilde{f}^*(\mathbf{p}', \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.45)$$

という、梯子図形における有効相互作用の一般的な形が得られる。ここで右辺第1項は梯子図形の最低次の寄与を、第2項は高次の寄与を表すが、本研究においては第1項の寄与のみを考えることにする。というのは第2項はボース粒子系において発散を引き起こすなど、問題を非常に複雑にするのと、非常に低密度においては第1項が主要な寄与を与えるからである。すると $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P)$ は式 (5.30) より、波数や振動数に依存しない定数となる。

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', P) = \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \quad (5.46)$$

注意しておきたいことだが式 (5.46) の結果は温度が絶対零度近傍に限って有効である。なぜなら式 (5.35) から (5.36) へ移行する際に温度グリーン関数をゼロ温度グリーン関数へと置き換えているからである。すなわち高温領域を考える際には、式 (5.46) に温度変化による修正を加えなければならない。

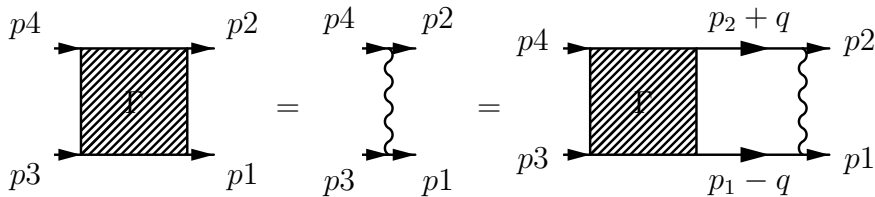


図 5.1: 式 (5.36) における Bethe-Salpeter 方程式。

有効相互作用が求まったので、自己エネルギーの計算を行う。梯子図形の範囲内で自己エネルギーは次のようになる。

$$\hbar\Sigma_{11}(p) = n_0\Gamma(\mathbf{p}/2, \mathbf{p}/2, P) + n_0\Gamma(-\mathbf{p}/2, \mathbf{p}/2, P) = \frac{8\pi a\hbar^2 n_0}{m} \quad (5.47a)$$

$$\hbar\Sigma_{12}(p) = n_0\Gamma(\mathbf{p}, 0, 0) = \frac{4\pi a\hbar^2 n_0}{m} \quad (5.47b)$$

化学ポテンシャルは

$$\mu = \frac{4\pi a\hbar^2 n_0}{m} \quad (5.48)$$

となる。この自己エネルギーを用いてダイソン方程式 (5.10) を解けば

$$\mathcal{G}_{11}^I(k_n) = \frac{u_k^2}{ik_{0n} - E_k/\hbar} - \frac{v_k^2}{ik_{0n} + E_k/\hbar} \quad (5.49a)$$

$$\mathcal{G}_{12}^I(k_n) = -u_k v_k \left(\frac{1}{ik_{0n} - E_k/\hbar} - \frac{1}{ik_{0n} + E_k/\hbar} \right) \quad (5.49b)$$

となる。ただし

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_k + 4\pi a\hbar^2 n_0/m}{E_k} + 1 \right) \quad (5.50)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_k + 4\pi a\hbar^2 n_0/m}{E_k} - 1 \right) \quad (5.51)$$

$$E_k^2 = \varepsilon_k^2 + \frac{8\pi a\hbar^2 n_0 \varepsilon_k}{m} \quad (5.52)$$

である。

次にランダムポテンシャルの摂動を計算する。極低温において凝縮体の励起がほとんど起こらないような状況では、式 (5.5) の \hat{K}_{R1} と \hat{K}_{R2} のうち \hat{K}_{R1} が主要であると考えられるので、 \hat{K}_{R1} のみの摂動計算を行う。 \hat{K}_{R1} のみを考えると摂動は正確に2次までで止まり、摂動計算は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11}(k_n) &= \mathcal{G}_{11}^I(k_n) - \frac{(\beta\hbar)\delta_{k_{0n},0}n_0}{\hbar^2 V} [\mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{12}^I(k_n)] \\ &\quad \times [\mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{21}^I(k_n)] |U(\mathbf{k})|^2 \end{aligned} \quad (5.53a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{12}(k_n) &= \mathcal{G}_{12}^I(k_n) - \frac{(\beta\hbar)\delta_{k_{0n},0}n_0}{\hbar^2 V} [\mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{12}^I(k_n)] \\ &\quad \times [\mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{21}^I(k_n)] |U(\mathbf{k})|^2 \end{aligned} \quad (5.53b)$$

式 (5.49) の結果を代入すれば

$$\mathcal{G}_{11}(k_n) = \mathcal{G}_{11}^I(k_n) - (\beta\hbar)\delta_{k_{0n},0}n_0 \frac{|U(\mathbf{k})|^2 (u_k - v_k)^4}{V E_k^2} \quad (5.54a)$$

$$\mathcal{G}_{12}(k_n) = \mathcal{G}_{12}^I(k_n) - (\beta\hbar)\delta_{k_{0n},0}n_0 \frac{|U(\mathbf{k})|^2 (u_k - v_k)^4}{V E_k^2} \quad (5.54b)$$

次にランダムポテンシャルの形について考える。ランダムポテンシャルは多孔質ガラスの孔径に相当するスケールで変化していると考えられる。よって多孔質ガラスを特徴づけるランダムポテンシャルは大まかに2つの特徴的なパラメーターによって表すことができると考える。1つはランダムポテンシャルの強度 U_0 、もう1つは多孔質ガラスの平均孔径を反映したサイズ r_p である。 r_p よりも短いスケールではランダムポテンシャルが変化しないので、そのアンサンプル平均は次のようなガウス分布になると仮定できる。

$$\langle |U(\mathbf{k})|^2 \rangle_{av} = U_0^2 V^2 \exp\left(-\frac{k^2 r_p^2}{4\pi^2}\right) \quad (5.55)$$

ここで $\langle \rangle_{av}$ はアンサンプル平均を意味する。今、式 (5.54) において $|U(\mathbf{k})|^2$ を $\langle |U(\mathbf{k})|^2 \rangle_{av}$ で置き換えるという操作を行う。これは次のような考察から正当化される。多孔質ガラスへの注入量が少なく、 ^4He が希薄であれば、そのボース・アインシュタイン凝縮のコヒーレンス長は数 100\AA から 1000\AA にまで長くなると考えられている [67]。一方多孔質ガラスの平均孔径は数 10\AA なので、コヒーレンス長は孔径よりも十分長く、系はポテンシャルの直接の空間変化よりはむしろ空間平均された量に依存するであろうと考えられる。

最終的に式 (5.12) を用いると、系の粒子数密度とエネルギーを計算することが

できて

$$\begin{aligned}
n &= n_0 + n_I + n_T + n_R & (5.56) \\
n_I &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}(n_0 a)^{3/2} \\
n_T &= \frac{4}{\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty dt \frac{t(t^2 + \theta/2)}{\sqrt{t^2 + \theta}[\exp(t\sqrt{t^2 + \theta}) - 1]} \\
n_R &= \frac{m^2}{8\pi^{3/2}\hbar^4} U_0^2 V \sqrt{\frac{n_0}{a}} [e^\alpha(1 + 2\alpha)\{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha})\} - 2\sqrt{\alpha/\pi}] \\
\frac{E}{V} &= \frac{E_I}{V} + \frac{E_T}{V} + \frac{E_R}{V} & (5.57) \\
\frac{E_I}{V} &= \frac{2\pi a \hbar^2 n_0}{m} \left[n - \frac{32n_0}{15} \left(\frac{n_0 a^3}{\pi} \right)^{1/2} \right] \\
\frac{E_T}{V} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda^3 \beta} \int_0^\infty dt \frac{t(2t^4 + 2\theta t^2 + \theta^2/4)}{\sqrt{t^2 + \theta}[\exp(t\sqrt{t^2 + \theta}) - 1]} \\
\frac{E_R}{V} &= \frac{m(n_0^3 a)^{1/2}}{4\sqrt{\pi}\hbar^2} U_0^2 V [-e^\alpha(5 + 2\alpha)\{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha})\} + \sqrt{4/\pi\alpha}(1 + \alpha/2)]
\end{aligned}$$

を得る。ここで $\theta = 8\pi a \hbar^2 \beta n_0 / m$ 、 $\lambda^2 = 2\pi \hbar^2 \beta / m$ 、 $\alpha = 2an_0 r_p^2 / \pi$ 、 erf は誤差関数である。 n_I は粒子間相互作用がもたらす絶対零度における非凝縮体（真空揺らぎ）、 n_T は温度によって励起された準粒子の密度、 n_R はランダムポテンシャルと凝縮体の散乱によって引き起こされる非凝縮体を表し、 E_I は粒子間相互作用がもたらす散乱のエネルギー、 E_T は温度によって励起された準粒子のエネルギー、 E_R はランダムポテンシャルと凝縮体の散乱が持つエネルギーを表す。準粒子の分散は

$$\frac{\hbar}{2m} k \sqrt{k^2 + 16\pi a n_0}$$

となるが、これはランダムポテンシャルを導入しない場合と同じである。この結果は多孔質ガラス中における非弾性中性子散乱の実験結果と合っている [27, 28]。式 (5.22) から超流動数密度 n_s も計算できて

$$\begin{aligned}
n_s &= n - n_{nT} - n_{nR} & (5.58) \\
n_{nT} &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty dt \frac{t^4 \exp(t\sqrt{t^2 + \theta})}{[\exp(t\sqrt{t^2 + \theta}) - 1]^2} \\
n_{nR} &= \frac{4n_R}{3} & (5.59)
\end{aligned}$$

が得られる。 n_{nT} は準粒子の温度励起によって生じる常流体成分を、 n_{nR} はランダムポテンシャルと凝縮体の散乱によって生じる常流体成分を表す。特に $n_{nR} =$

$4n_R/3 = n_R + n_R/3$ は、ランダムポテンシャルが非凝縮体よりも多くの常流体を生み出していることを示している。つまり凝縮体の一部分はランダムポテンシャルに捕らえられて常流体に属し、アンダーソン局在状態になっていることが分かる。絶対零度近傍では $n \sim 4n_R/3$ という状況で $n_s = 0$ 、つまりアンダーソングラス相転移が起こることが示される。

5.2.2 実験との比較

興味ある物理量が求まったので、実際にそれらを定量的に計算し、Reppy 達の Vycor グラスにおける実験との比較を行う。まずはじめに幾つかのパラメータを決定しなければならない。 $m \simeq 6.6 \times 10^{-27}$ kg、 $a \simeq 3 \times 10^{-10}$ m は⁴He 原子の質量と s 波散乱長である。その他のパラメーターは Reppy 達の実験から決定する。体積 V はほぼ Vycor グラスの体積であり、通常 1 辺が 1 cm ほどの Vycor グラスが実験に用いられているので $V \simeq 10^{-6}$ m³ とする。Vycor グラス中の⁴He 気体の密度は次のようにして見積もられる。多孔質ガラスに液体⁴He が注入されると、ガラスの壁と⁴He 原子とのファンデルワールス引力により液体⁴He は壁に吸着し、その第 1 層は絶縁層として振る舞う。壁に吸着しない残りの⁴He 原子が希薄気体として振る舞うと考える (図 5.2)。Vycor グラスの孔の表面積はおよそ 150 m² であり、s 波散乱長から吸着する最大粒子数を計算するとおよそ 1.7×10^{21} 個、注入量として 11 mg までは全ての⁴He 原子が多孔質ガラスの壁に吸着していると考えられる。図 2.5(b) において、超流動消失付近を拡大したものが図 5.3(a) であるが、超流動はおよそ 17.5 mg で消失している。つまり注入量としておよそ 11 mg から 17.5 mg までは希薄気体として振る舞う⁴He 原子が存在していることになり、この領域でアンダーソングラス状態が実現していると考えられる。また超流動が消失する注入量付近における⁴He 原子の密度はおよそ $n \simeq 9.8 \times 10^{26}$ m⁻³ である。よって希薄気体を特徴づける無次元のガスパラメーターは $na^3 \simeq 0.027$ となり、希薄気体を仮定した梯子図形の解析はそこそこ良い近似であるといえる。ランダムポテンシャルのパラメーター r_p は用いられている Vycor グラスの平均孔径 60Å を用いる。残ったパラメーターはランダムポテンシャルの強度 U_0 であり、これは実験との比較によって見積もる。図 5.3(b) は式 (5.58) によって得られた絶対零度における超流動密度であるが、超流動が消失する注入量は U_0 に依存する。つまり U_0 が図 5.3(a) と (b) を比較することによって見積もられ、ここでは $U_0 \simeq 7.1 \times 10^{-35}$ J が得られる。ランダムポテンシャルを散乱体と見なし、ランダムポテンシャルと⁴He 原子との散乱のエネルギーを見積もると $U_0 \sqrt{nV}/k_B \simeq 0.16$ K となり、この系における超流動転移温度とほぼ同じオーダーである。また超流動密度は実験、計

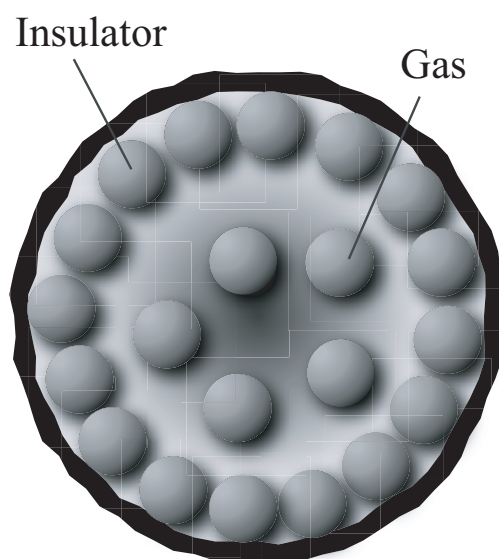


図 5.2: 多孔質ガラスの孔における ^4He 原子のイメージ。

算ともに超流動が消失する注入量付近ではほぼ線形に近い形で立ち上がっているが、実験において n_s の大きさが得られていないため、その傾きまでは比較できない。しかし超流動が消失する注入量 17.5 mg 付近での注入量に対する ΔP や超流動密度 n_s の臨界指数 x を

$$[\Delta P, n_s] \propto (C/17.5 - 1)^x \quad (5.60)$$

と定義したとき、実験では $x = 1.19 \pm 0.17$ 、計算では $x = 1.21$ となり、両者は非常に近い。よってこの U_0 の値は妥当であると考えられる。ここで C mg は液体 ^4He の注入量である。

全てのパラメーターを決定することができたので、実験と計算との定量的な比較を行う。比熱の比較を行うが、比熱は式 (5.57) のエネルギーを温度で微分することによって得られる。図 5.4 は低温領域における実験と計算結果の比較である。図 5.4(a) は比較的注入量の多いときの比熱の比較であり、密度 n は実験における ^4He の注入量から見積もった。一方、図 5.4(b) は注入量の小さいときの比熱と超流動密度の比較であり、密度 n は注入量に関する情報がなかったため、超流動の転移温度から見積もった。理論と実験はフリーパラメーターなしで定量的に良く一致している。特に注入量が小さいときの図 5.4(b) での一致は非常に良い。つまり Vycor グラス中で液体 ^4He が3次元希薄ボース気体のように振る舞っているという我々の描像が裏付けられたことになる。図 5.4(a) では 1.0 K 以上で実験と計算はあまり一致しなくなる。しかし図 5.4(b) では超流動転移温度に近い部分まで、

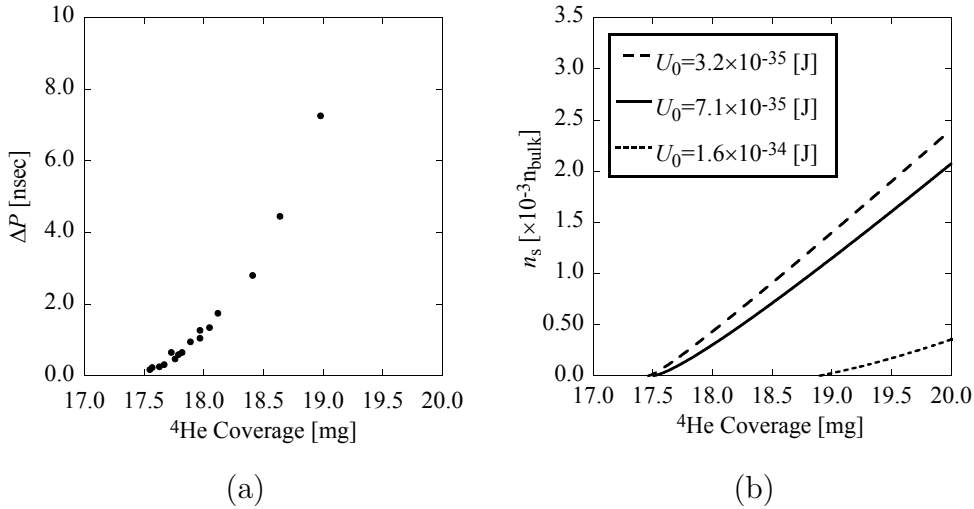


図 5.3: (a) : 極低温におけるねじれ振りの周期差 ΔP の注入量依存性。(b) : 絶対零度における超流動密度の注入量依存性。 $n_{\text{bulk}} \simeq 2.1 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ はバルクの液体 ^4He の数密度。また計算において注入量 C mg は $C = 11 + mnV \times 10^6$ から求めた。(a) は文献 [26] より。

実験と計算が一致する。これは系が図 5.4(a) のときよりも希薄であり、温度励起よりはむしろランダムポテンシャルの影響を強く受けているからである。これについては後述する。

我々の計算は実験とよく一致するだけでなく、実験ではまだ観測されていないランダムポテンシャルの効果を幾つか予言することができる。図 5.5 は図 5.4(a) の対数表示である。この図から明らかなように、ランダムポテンシャルが無い場合、比熱はフォノンの寄与による温度の 3 乗の振る舞いを示すが、ランダムポテンシャルがあると、その振る舞いは低温で温度に線形となる。これは低温でランダムポテンシャルの寄与が、素励起の寄与よりも大きいことを意味している。この比熱の温度に線形な振る舞いは、ボース流体の 1 次元的な振る舞いから得られるのではなく、式 (5.57) における E_R の n_0 を介した温度依存性によって得られる。 E_R は凝縮体とランダムポテンシャルとの散乱によって生じる項であり、与えられる比熱は凝縮体がランダムポテンシャルを抜け出すのに必要なエネルギーであることを意味する。もし実験でこのような温度に線形の比熱が観測されれば、それはランダムポテンシャルの効果をよりはっきり観測したということの意味するであろう。

図 5.6 は n_0 と n_s の温度と密度依存性である。両方とも、密度の減少に伴って減っているが、これは密度が小さいほどランダムポテンシャルの影響が大きいこ

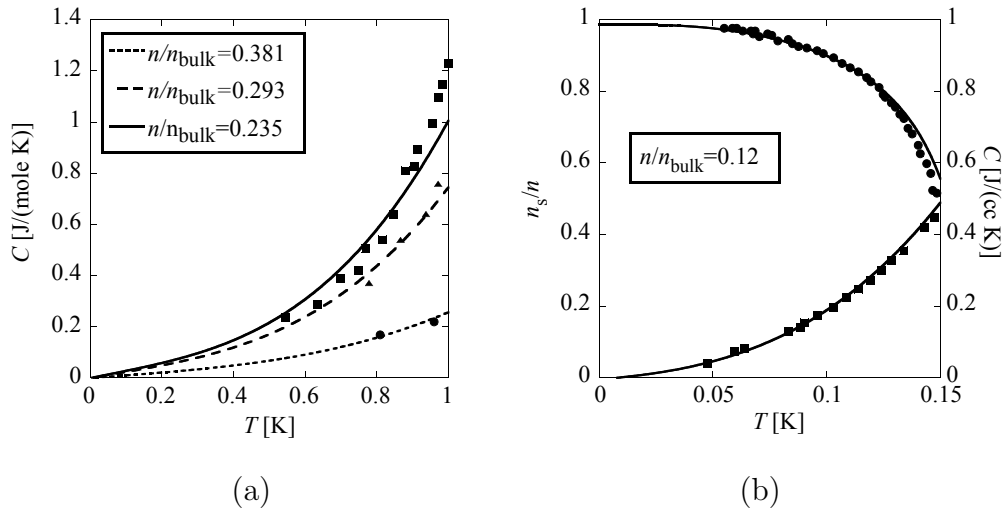


図 5.4: 実験 (点) と計算 (線) で得られた比熱。(a) において、 \bullet 、 \square 、 \triangle の点はそれぞれ full pores、 $\sigma = 0.780$ 、 $\sigma = 0.636$ の注入量に相当する。ここで σ は最大注入量 (full pores coverage) に対する注入量の比であり、最大注入量における ^4He の密度を空間充填率からの考察により $n_{\text{fullpores}} = 0.5n_{\text{bulk}}$ とした。(b) では超流動密度も比較している (超流動転移温度 0.163 K)。(a)、(b) とともに実験値に関しては文献 [26] より。

とを意味している。つまり、図 5.4(a) よりも希薄な図 5.4(b) は、ランダムポテンシャルの影響が大きく、超流動は温度励起よりはむしろランダムポテンシャルによって抑制されている。よって比較的高温まで我々のモデルは実験の比熱と超流動をよく再現できるのである。また図 5.6 は n_0 と n_s の違いをより明確に表している。超流動は絶対零度においてもある密度以下で消失しているが、凝縮体は存在している。これは前に述べたとおりボース・アインシュタイン凝縮のアンダーソングラス相転移を意味している。低温、低注入量における中性子散乱実験において凝縮体の探索が行われれば、このアンダーソングラスの状況をより明確にできるであろうと我々は期待している。

図 5.7(a) は超流動が消失する直前の密度領域における、超流動密度の温度依存性である。このような領域では、絶対零度付近において常流動相にある系が、温度の増加に伴って超流動状態となり、再び常流動相となる再起型の転移をする。この再起型の転移は次のように理解される。図 5.7(b) に示されるように、ランダムポテンシャルと凝縮体の散乱によって引き起こされる n_R は温度の増加に伴い、 n_0 とともに減少する。ランダムポテンシャルによる超流動密度の抑制 $4n_R/3$ も温度の増加とともに減少する。もちろん素励起によって常流動密度は温度とともに増

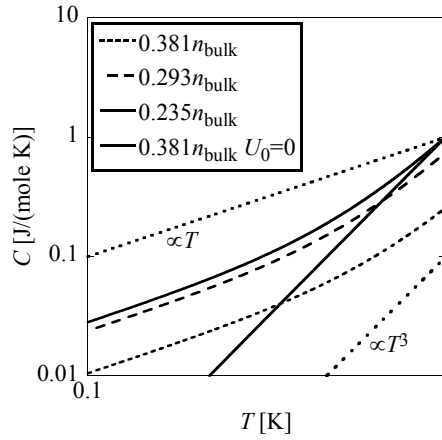


図 5.5: 図 5.4(a) の両対数表示。 $n/n_{\text{bulk}} = 0.381$ における $U_0 = 0$ での比熱と $\propto T$ 、 $\propto T^3$ の線が追加されている

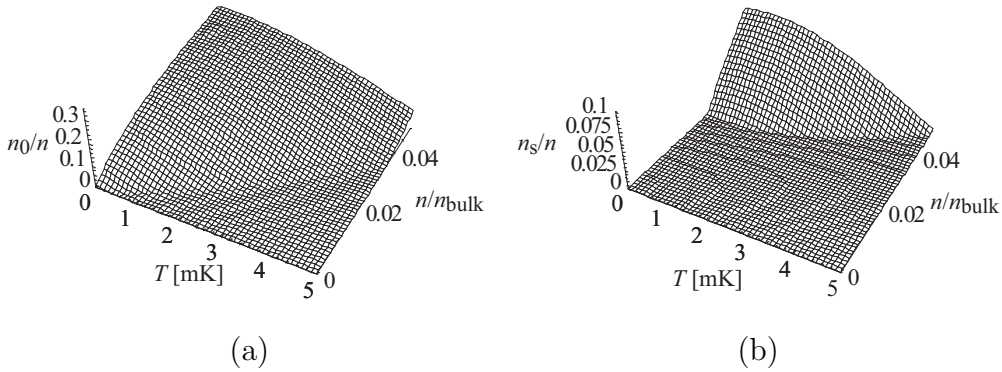


図 5.6: n_0 (a) と n_s (b) の温度と粒子数依存性。

加するが、 $T < 0.5$ mK という低温において、その増加は $4n_{\text{R}}/3$ の減少よりも小さい。これは言い換えると、アンダーソン局在状態にあった凝縮体が熱励起によってその束縛を抜け出して遍歴し、超流動に参加するということを意味している。言い換えると、この再起型の転移こそがアンダーソングラス相の存在を大きく支持することになるであろう。この再起型の転移は低温、低密度領域のみで起こり、実験では観測されていない。しかし U_0 を大きくすることによって観測が可能になるかもしれない。 n_s が極大値をとる温度 T_{max} と $\Delta n_s = n_s(T = T_{\text{max}}) - n_s(T = 0)$ を定義すると、これらの粒子数密度依存性は図 5.7(c)、(d) のようになる。両者の値は U_0 とともに増加している。これは、もし実験において U_0 の値を大きくすることができれば、この再起型の転移の観測がより容易になることを意味している。 U_0 はランダムポテンシャルの特徴的な強度であり、例えば多孔質ガラスの空間充

填率を下げることによって大きくすることができるであろうと考えられる。

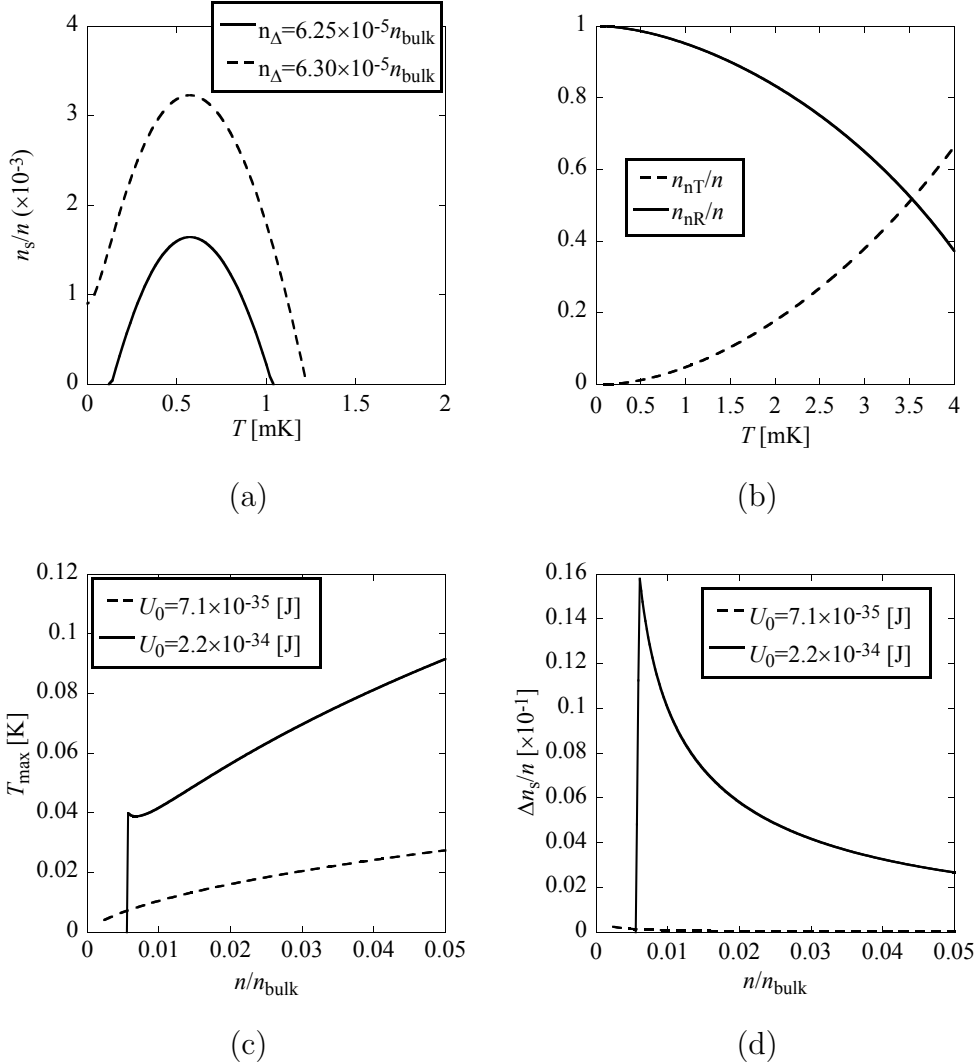


図 5.7: (a) : 低温、低密度における n_s の温度依存性。 n_Δ は超流動が消失する粒子数密度から測った粒子数密度。(b) : 再起型の転移に関する n_{nT} と n_{nR} の温度依存性。密度は $n_\Delta = 6.25 \times 10^{-5} n_{\text{bulk}}$ ((a) の実線)。(c) : T_{max} の粒子数密度依存性。(d) : Δn_s の粒子数密度依存性。

5.3 強相関領域

本節では山本達によって行われた高圧領域における実験を念頭に、環状の図形解析を用いることによって高密度強相関ボース流体の解析を行う。その後まずはじめに、ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度と超流動の転移温度の定性的

な振る舞いを計算し、高圧下において超流動が消失する可能性を議論する。その後、絶対零度においてボースグラス相転移を議論するための新たな解析法を導入する。最後に山本達の実験との比較のために定量的な計算を行い、彼らが実験で観測した超流動の消失がボースグラス相転移である可能性を議論する。

5.3.1 環状図形における摂動論

高密度にある多粒子系の摂動論を考えた場合、図形解析において最も主要なのが環状の図形である。環状図形は式 (5.5) 中の \hat{K}_{I3} 、 \hat{K}_{I4} によって与えられる。それぞれによって与えられる1つの環（分極部分）を $\Pi_{I3}^0(q_n)$ 、 $\Pi_{I4}^0(q_n)$ とすれば

$$\Pi_{I3}^0(q_n) = \frac{n_0}{\hbar} \mathcal{G}_{11}^0(q_n) \quad (5.61)$$

$$\Pi_{I4}^0(q_n) = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\hbar\beta V} \sum_{k_{n'}} \mathcal{G}_{11}^0(k_{n'}) \mathcal{G}_{11}^0(k_{n'} + q_n) \quad (5.62)$$

となる（図 5.8）。ここで \sum_{k_n} は松原周波数 k_{0n} と波数 k の両方について和をとることを意味する。ただし $\Pi_{I4}^0(q_n)$ は絶対零度では消えるので、後の絶対零度における解析では考慮しない。 $\Pi^0(q_n) = \Pi_{I3}^0(q_n) + \Pi_{I4}^0(q_n)$ とすれば環状図形における有効相互作用 $g(q_n)$ が

$$g(q_n) = \frac{g_0(q_n)}{1 - \Pi^0(q_n)g_0(q_n)} \quad (5.63)$$

となる。これは初項 $g_0(q_n)$ 、項比 $\Pi^0(q_n)$ の等比級数の和を表しており、有効相互作用が全ての環状図形を含んでいることを意味している。また式 (5.5) の \hat{K}_{I2} のみを考えた場合、 $n_0g_0(0)$ 、 $n_0g_0(\mathbf{k})$ が厳密な自己エネルギーを与えるので、最終的な自己エネルギーはこれらと環状図形によって得られる自己エネルギーを足すことによって得られる。

$$\hbar\Sigma_{11}(k_n) = n_0[g_0(0) + g_0(\mathbf{k})] - \frac{1}{\hbar\beta V} \sum_{q_{n'}} \mathcal{G}_{11}^0(q_{n'})g(k_n - q_{n'}) \quad (5.64)$$

$$\hbar\Sigma_{12}(k_n) = n_0g_0(\mathbf{k}) \quad (5.65)$$

この自己エネルギーを用いてダイソン方程式 (5.10) を解けば、式 (5.49) と類似の $\mathcal{G}_{11}^1(k_n)$ 、 $\mathcal{G}_{12}^1(k_n)$ を得ることができる。

次にランダムポテンシャルの摂動を計算する。前節の希薄気体における解析では凝縮体の励起がほとんど起こらない極低温の領域において \hat{K}_{R2} の項を無視したが、高密度領域では強い相互作用揺らぎのために、たとえ低温であってもこの項の寄与は大きい。従って \hat{K}_{R1} と \hat{K}_{R2} の両方の摂動を考える。 \hat{K}_{R2} の摂動は非常に

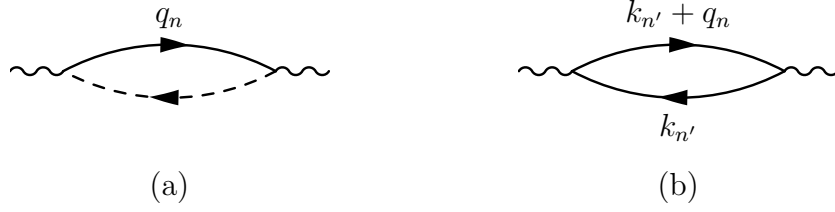


図 5.8: 式 (5.61)(a) と式 (5.62)(b) に対する分極。

複雑であり、問題を簡単にするために 2 次の摂動のみを考えることにする (\hat{K}_{R1} の摂動は再び 2 次までで止まる)。 \hat{K}_{R1} と \hat{K}_{R2} の摂動によって得られるグリーン関数を $\mathcal{G}_{11}^{R1}(k_n)$ 、 $\mathcal{G}_{11}^{R2}(k_n)$ と分ければ、グリーン関数は

$$\mathcal{G}_{11}(k_n) = \mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{11}^{R1}(k_n) + \mathcal{G}_{11}^{R2}(k_n) \quad (5.66)$$

となる。 $\mathcal{G}_{11}^{R1}(k_n)$ は式 (5.53a) の右辺第 2 項と同じ形になる一方、 $\mathcal{G}_{11}^{R2}(k_n)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11}^{R2}(k_n) = & \frac{1}{\hbar^2 V^2} \sum_{\mathbf{q}} [\mathcal{G}_{11}^I(k_n) \mathcal{G}_{11}^I(k_{0n}, \mathbf{q}) \mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{11}^I(k_n) \mathcal{G}_{12}^I(k_{0n}, \mathbf{q}) \mathcal{G}_{21}^I(k_n) \\ & + \mathcal{G}_{12}^I(k_n) \mathcal{G}_{21}^I(k_{0n}, \mathbf{q}) \mathcal{G}_{11}^I(k_n) + \mathcal{G}_{12}^I(k_n) \mathcal{G}_{22}^I(k_{0n}, \mathbf{q}) \mathcal{G}_{21}^I(k_n)] \\ & \times |U(\mathbf{k} - \mathbf{q})|^2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

で与えられる。グリーン関数の最終的な形は

$$\mathcal{G}_{11}^I(k_n) = \frac{u_{k_n}^2}{ik_{0n} - E_{k_n}/\hbar} - \frac{v_{k_n}^2}{ik_{0n} + E_{k_n}/\hbar} \quad (5.68)$$

$$\mathcal{G}_{12}^I(k_n) = -u_{k_n} v_{k_n} \left(\frac{1}{ik_{0n} - E_{k_n}/\hbar} - \frac{1}{ik_{0n} + E_{k_n}/\hbar} \right) \quad (5.69)$$

$$\mathcal{G}_{11}^{R1}(k_n) = -(\beta\hbar) \delta_{k_{0n}, 0} n_0 \frac{|U(\mathbf{k})|^2 (u_{k_n} - v_{k_n})^4}{V E_{k_n}^2} \quad (5.70)$$

となる。ただし

$$u_{k_n}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k + n_0 g_0(k_n) + \mathcal{A}(k_n)}{E_{k_n}} + 1 \right] \quad (5.71a)$$

$$v_{k_n}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k + n_0 g_0(k_n) + \mathcal{A}(k_n)}{E_{k_n}} - 1 \right] \quad (5.71b)$$

$$E_{k_n}^2 = \varepsilon_k^2 + 2[n_0 g_0(k_n) + \mathcal{A}(k_n)] \varepsilon_k + 2n_0 g_0(k_n) \mathcal{A}(k_n) + \mathcal{A}(k_n)^2 \quad (5.71c)$$

$$\mathcal{A}(k_n) = \frac{1}{\beta\hbar V} \sum_{q_n'} \mathcal{G}_{11}^0(q_n) \{g(-q_n') - g(k_n - q_n')\} \quad (5.71d)$$

であり、化学ポテンシャルは Hugenholtz-Pines の定理から

$$\mu = n_0 g_0(0) - \frac{1}{\beta \hbar V} \sum_{q_n} \mathcal{G}_{11}^0(q_n) g(-q_n) \quad (5.71e)$$

となる。有限温度では $\mathcal{G}_{11}^{\text{R}2}$ を解析的に扱うのは非常に困難であり、その扱いは数値計算に頼ることになる。

5.3.2 転移温度の計算

まずはじめに式 (5.66) のグリーン関数を数値的に計算し、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動の転移温度 T_{c0} 、 T_{cs} を計算する。先ほど述べたとおり $\mathcal{G}_{11}^{\text{R}2}$ を扱うのは非常に困難であるので、ここでは定量的な計算をせずに、転移温度の大まかな振る舞いを定性的に計算し、特に高密度領域において超流動が本当に抑制されるのかを調べる。 T_{c0} 、 T_{cs} の計算は、密度を一定に保ったまま低温において式 (5.12a) と (5.22) から n_0 と n_s を計算し、少しずつ温度を上げて n_0 や n_s が 0 となる温度を探索することによって求められる。注意しておくべきことであるが、ここでは数値計算を用いて、 T_{c0} や T_{cs} の振る舞いを「大まかに」計算する。実際にはランダムポテンシャルがないときでさえ、 T_{c0} の精密な振る舞いを議論するのは非常に困難である [54, 68, 69, 70, 71, 72]。

計算のパラメーターであるが、粒子間相互作用 $g_0(x)$ は到達距離 a 、強さ $3\hbar^2/ma^2$ の箱形ポテンシャルを考える。

$$g_0(x) = \frac{3\hbar^2}{ma^2} \theta(a-x) \quad (5.72)$$

$$g_0(\mathbf{k}) = \frac{12\pi\hbar^2}{ma^2 k^3} [\sin(ka) - ka \cos(ka)] \quad (5.73)$$

このポテンシャルは $a \rightarrow 0$ において $g_0(x) \rightarrow 4\pi a \hbar^2/m\delta(x)$ となり、前節の希薄気体で用いた相互作用に相当する。 $a \simeq 3 \times 10^{-10}$ m は前節で用いた s 波散乱長を用いる。ランダムポテンシャルに関しては前節と同じようにアンサンブル平均されたもので置き換え、式 (5.55) を用いる。パラメーター $r_p = 6 \times 10^{-9}$ m、 $U_0 = 7.1 \times 10^{-35}$ J は前節と同じである。その他のパラメーターも前節と同じものを用いる。また系は十分に大きいとし、前節同様に波数に関する和を全て積分に置き換えて計算した (式 (5.25))。

図 5.9 は計算された T_{c0} 、 T_{cs} の粒子数密度依存性である。この図から明らかのように、 T_{c0} は T_{cs} より常に大きい。これは超流動転移温度以上でボース・アインシュタイン凝縮が存在する可能性を示唆しており、Plantevin 達によって得られた

実験結果を想起させる [27, 28]。また密度が低いときだけでなく、高いときにも超流動は抑制され、 $n \simeq 0.9n_{\text{bulk}}$ 付近で超流動が絶対零度においても存在しなくなる。この結果は山本達の Gel-Sil における実験結果 [29] と定性的に一致している。さらにこの密度において T_{c0} は有限でありボース・アインシュタイン凝縮が存在することを示している。つまりこの密度以上ではボース・アインシュタイン凝縮が超流動性を持たず、新しい常流動相であるボースグラス相の存在が示唆される。

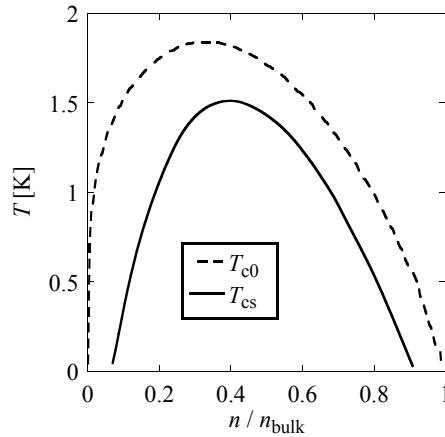


図 5.9: T_{c0} と T_{cs} の粒子数密度依存性。

5.3.3 絶対零度におけるボースグラス相の解析

先ほどの転移温度の計算において、高密度領域における超流動の消失の可能性が示された。このことから高密度領域ではボース・アインシュタイン凝縮がランダムポテンシャルのあらゆる極小部分に局在したようなボースグラス相が実現され、新しい基底状態が現れることを示唆している。そこで我々は、絶対零度に解析を限定することにし、空間的に局在したボース・アインシュタイン凝縮を扱うための新しい解析方法（局在スケール変分法）を導入する。そして定量的な計算を行い、山本達の実験との比較を行う [36]。

絶対零度における解析は、有限温度の解析において、離散的な松原周波数 ik_{0n} を実時間に対する連続的な周波数 k_0 に、 $\beta\hbar$ を $2\pi i$ に、和 \sum_n を積分 $\int dk_0$ に、そして温度グリーン関数 $\hat{\mathcal{G}}(k_n)$ をゼロ温度グリーン関数 $\hat{G}(k)$ に置き換えることに

よって可能となる。グリーン関数は

$$G_{11}(k) = G_{11}^I(k) + G_{11}^{R1}(k) + G_{11}^{R2}(k) \quad (5.74)$$

$$G_{11}^I(k) = \frac{u_k^2}{k_0 - E_k/\hbar} - \frac{v_k^2}{k_0 + E_k/\hbar} \quad (5.75)$$

$$G_{12}^I(k) = -u_k v_k \left(\frac{1}{k_0 - E_k/\hbar} - \frac{1}{k_0 + E_k/\hbar} \right) \quad (5.76)$$

$$G_{11}^{R1}(k) = -(2\pi i)\delta(k_0)n_0 \frac{|U(\mathbf{k})|^2}{V} \frac{(u_k - v_k)^4}{E_k^2} \quad (5.77)$$

$$G_{11}^{R2}(k) = -\frac{1}{\hbar^2 V^2} \sum_{\mathbf{q}} \left[\frac{(u_k^2 + v_k^2)(u_k v_q + u_q v_k)^2}{(k_0 - E_k/\hbar + i0)^2 (k_0 + E_q/\hbar - i0)^2} \right. \\ \left. + \frac{2u_k v_k \{u_k v_k (u_q^2 + v_q^2) + u_q v_q (u_k^2 + v_k^2)\}}{(k_0 - E_k/\hbar + i0)(k_0 + E_q/\hbar - i0)} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{k_0 - E_q/\hbar + i0} - \frac{1}{k_0 + E_q/\hbar - i0} \right) \right] \quad (5.78)$$

となり、 $G_{11}^{R2}(k)$ の解析な扱いが可能となる。ここで

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k + n_0 g_0(k) + A(k)}{E_k} + 1 \right] \quad (5.79a)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k + n_0 g_0(k) + A(k)}{E_k} - 1 \right] \quad (5.79b)$$

$$E_k^2 = \varepsilon_k^2 + 2[n_0 g_0(k) + A(k)]\varepsilon_k + 2n_0 g_0(k)A(k) + A(k)^2 \quad (5.79c)$$

$$A(k) = \frac{1}{(2\pi i)V} \sum_{\mathbf{q}} d_{q_0} G_{11}^0(q) \{g(-q) - g(k-q)\} \quad (5.79d)$$

である。有効相互作用 $g(q)$ に関しては絶対零度において式 (5.62) の $\Pi_{14}^0(q)$ が消えるので、

$$g(q) = \frac{g_0(q)}{1 - n_0 g_0(q) G_{11}^0(q)/\hbar} \quad (5.79e)$$

となる。化学ポテンシャルは

$$\mu = n_0 g_0(0) - \frac{1}{(2\pi i)V} \sum_{\mathbf{q}} d_{q_0} G_{11}^0(q) g(-q) \quad (5.79f)$$

となる。系の粒子数密度 n 、エネルギー E 、超流動数密度 n_s は

$$n = n_0 - \frac{1}{(2\pi i)V} \sum_{\mathbf{k}} dk_0 G_{11}(k) e^{+ik_0 0} \quad (5.80)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{2} \mu n - \frac{1}{(4\pi i)V} \sum_{\mathbf{k}} dk_0 [i\hbar k_0 + \varepsilon_k + \mu] G_{11}(k) e^{+ik_0 0} \quad (5.81)$$

$$n_s = n - \frac{\hbar}{3m} \frac{1}{(2\pi i)V} \sum_{\mathbf{k}} dk_0 k^2 [G_{11}(k)^2 - G_{12}(k)G_{21}(k)] e^{+ik_0 0} \quad (5.82)$$

と計算される。

次に、局在したボース・アインシュタイン凝縮（局在ボース凝縮）とボースグラス相を解析するための次のような局在スケール変分法を導入する。系は長さ L の立方体からなるとすると体積は $V = L^3$ で与えられる。このとき波数は離散的な値 $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$ ($n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) で定義される。ボース・アインシュタイン凝縮がそれぞれ独立に空間的に局在している系を考える。そして、各々の凝縮体は等価であり、等しい体積と粒子数を持つことを仮定する。1つの局在した凝縮体の体積を $V_g = L_g^3$ とし $V = L^3$ の系を体積 V_g の部分系に分割する。これは系全体を局在した凝縮体ごとに分割することを意味する。1つの部分系のエネルギー E_g は式 (5.81) において、粒子密度は一定のまま E を E_g に、 V を V_g に置き換えることによって計算される。局在ボース凝縮の個数は V/V_g となるので、局在ボース凝縮からなる全系のエネルギーは $E_g \times (V/V_g)$ となる。理想ボース気体や前章で議論した希薄ボース気体の領域では E_g は V_g に比例するが、高密度強相関領域では E_g はもはや V_g に比例せず、従って E_g/V_g は V_g に依存する。よって強相関領域では E_g/V_g を V_g の関数として計算し、全系のエネルギー $E_g \times (V/V_g)$ が最小となる V_g^{\min} を決定することができる。局在ボース凝縮とボースグラス相は次のように決定される。

- もし V_g^{\min} が V を超える、もしくは巨視的なオーダーであるならば、凝縮体は局在しておらず、通常のボース・アインシュタイン凝縮の状態である。
- V_g^{\min} が微視的なオーダー、特に多孔質ガラスの孔径サイズにまで減少しているのであれば、凝縮体が局在したボースグラス相の状態であり、その局在長は $L_g^{\min} = \sqrt[3]{V_g^{\min}}$ である。

局在スケール変分法を用いて、高密度領域におけるボースグラス相の可能性を調べ、山本達の実験との定量的な比較を行う。計算するのは凝縮体密度 n_0 、超流動数密度 n_s 、局在長 L_g^{\min} の圧力 P 依存性である。圧力は $-\partial E/\partial V$ から求められ、

粒子密度 n によって変化させることができる。粒子間相互作用 $g_0(x)$ はガウス関数

$$g_0(x) = \nu_0 \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.83)$$

$$g_0(k) = \nu_0 (\sigma\sqrt{2\pi})^3 \exp \left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} \right] \quad (5.84)$$

を仮定する。ここで ν_0 は相互作用の強さ、 σ は到達距離を表し、定量的な値は、現在⁴He 原子間相互作用を最も正確に記述しているといわれているアジズポテンシャル (HFD-B3-FCI1 ポテンシャル) [73]

$$g_0(x) = \begin{cases} A \exp(\alpha x + \beta x^2) - \exp \left[-\left(\frac{d}{x} - 1\right)^2 \right] \sum_{i=3}^5 \frac{c_{2i}}{x^{2i}} & (x < d) \\ A \exp(\alpha x + \beta x^2) - \sum_{i=3}^5 \frac{c_{2i}}{x^{2i}} & (x > d) \end{cases} \quad (5.85)$$

$$A = 2.047943770224 \times 10^6 [\text{K}] \quad (5.86)$$

$$\alpha = 3.5615518310143854 [\text{\AA}^{-1}] \quad (5.87)$$

$$\beta = -0.23579999965247211 [\text{\AA}^{-2}] \quad (5.88)$$

$$c_6 = 10130.537661599437 [\text{K}\text{\AA}^6] \quad (5.89)$$

$$c_8 = 27397.54354100663 [\text{K}\text{\AA}^8] \quad (5.90)$$

$$c_{10} = 99775.29311535569 [\text{K}\text{\AA}^{10}] \quad (5.91)$$

$$d = 4.2684154 [\text{\AA}] \quad (5.92)$$

と比較することによって $\nu_0 \simeq 2.1 \times 10^{-17}$ J、 $\sigma \simeq 2.5 \times 10^{-11}$ m と与えられる (図 5.10)。系の全体積 V は山本達が用いた Gel-Sil の体積 $V \simeq 5.9 \times 10^{-8}$ m³ を用いる [29]。ランダムポテンシャルであるが、希薄な領域において用いたアンサンブル平均への置き換えはもはや使えない。というのは高密度下では凝縮体のコヒーレンス長は短くなり、凝縮体はポテンシャルの空間変化に直接依存するようになるからである (だからこそボース・アインシュタイン凝縮の局在が起こると考えられる)。そこで、アンサンブル平均に置き換えることはせず、各 k に対する $U(k)$ にランダムな値を与えて物理量を計算し、幾つかの $U(k)$ に対する物理量のアンサンブル平均をとることにする。 $U(k)$ にランダムな値を与える際、統計平均をとったときに式 (5.55) の分布になるようにする (図 5.11)。ここで $r_p \simeq 2.5 \times 10^{-9}$ は山本達を用いた Gel-Sil の平均孔径を用いる。ランダムポテンシャルの強度 U_0 に関しては前節で行った方法と全く同じ方法で見積もる。つまり彼らの Gel-Sil を用いると、図

2.8 から分かるように、孔の表面積あたり約 $20\mu\text{ mol/m}^2$ の注入量において超流動が消失する。 r_p や V に関しては先ほど与えたものを用いて、式 (5.56) ~ (5.58) から n_s を計算したときに、この注入量で超流動が消失するように $U_0 \simeq 2.0 \times 10^{-32}$ J を決定する。ここまでで全てのパラメーターが決定され、希薄気体の場合と同様、実験との定量的な計算が可能になる。

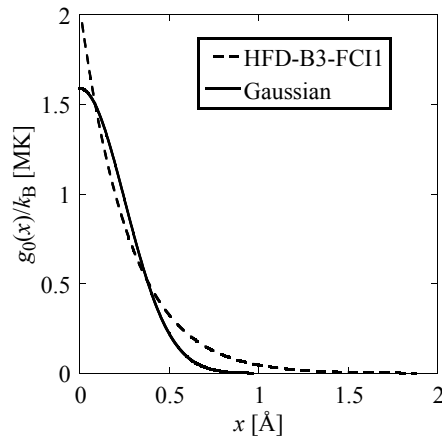


図 5.10: ガウス関数型ポテンシャル (式 (5.83)) とアジズポテンシャル (式 (5.85)) との比較。パラメーター ν_0 、 σ はアジズポテンシャルに対して最小 2 乗法を用いることで決定した。

図 5.12(a) は n_0 、 n_s 、 V_g^{\min} の圧力依存性である。圧力 $P \simeq 4.2\text{MPa}$ において超流動密度 n_s が消失し、それとほぼ同時に V_g^{\min} が劇的に減少しているのが分かる。これはこの圧力においてボース・アインシュタイン凝縮が超流動性を失い、局在したボースグラス相へと相転移するということを意味しており、この圧力こそが超流動相-ボースグラス相の転移圧力 P_c であると定義できる。凝縮体密度 n_0 は転移圧力以下では圧力の増加に伴い減少しているが、転移圧力以上においては局在ボース凝縮体密度として少し上昇している。また L_g^{\min} の圧力依存性を図 5.12(b) に示すが、 P_c 以上で L_g^{\min} が孔径サイズ r_p のオーダーにまで減少していることが分かる。また $P_c \simeq 4.2\text{ MPa}$ という値は山本達が観測した $P_c \simeq 3.5\text{ MPa}$ と、フリーパラメータなしで非常に近く [29]、従って彼らが観測した超流動の消失はまさにボース・アインシュタイン凝縮体の超流動-ボースグラス相転移であると考えられる。

最後に同様の計算を、前節で用いた Vycor グラスのパラメーター $V \simeq 10^{-6}\text{ m}$ 、 $r_p \simeq 6.0 \times 10^{-9}\text{ m}$ 、 $U_0 \simeq 7.1 \times 10^{-35}$ をに対して行くと $P_c \simeq 10\text{ MPa}$ となる。この値は非常に大きく、高圧においてボースグラス相が実現するよりも前に液体

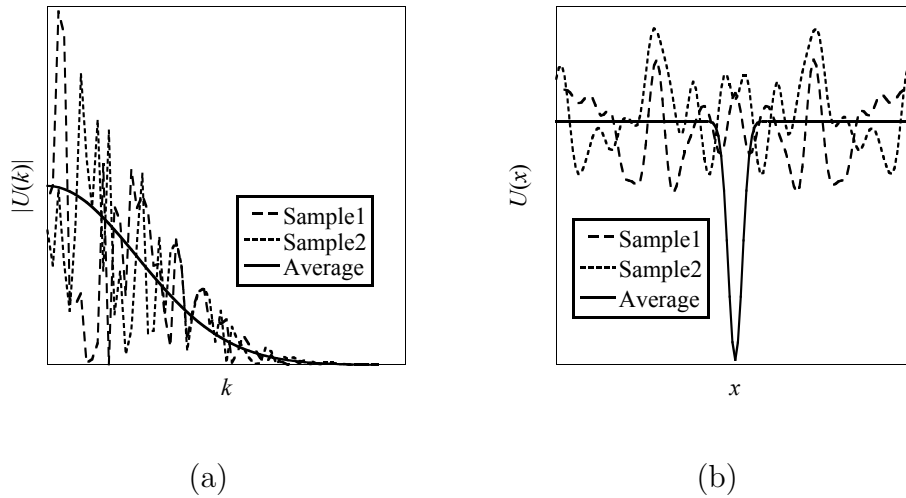


図 5.11: 1次元方向におけるランダムポテンシャル $U(k)$ と $U(x)$ の例。

^4He の固化が始まるであろうと考えられる。この結果も実験と一致している (図 2.7(a))。

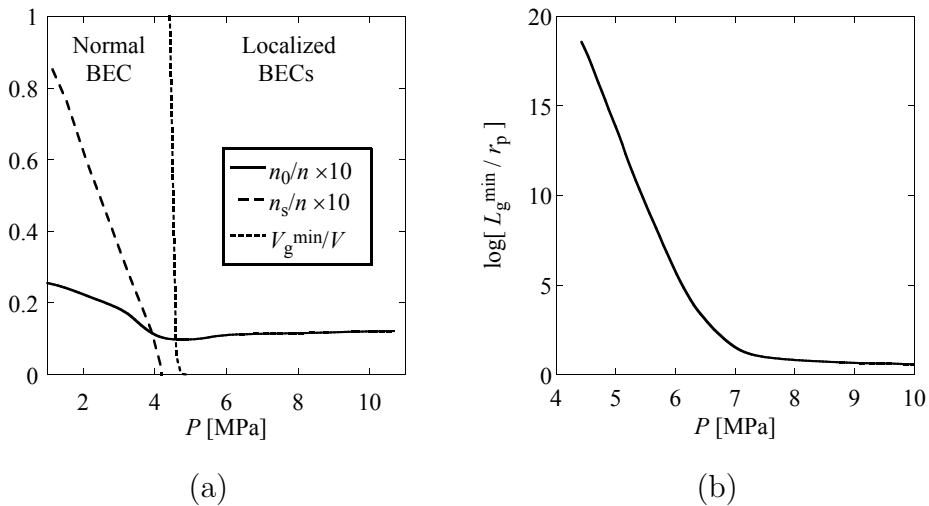


図 5.12: n_0 、 n_s 、 V_g^{\min} の圧力依存性 (a) と L_g^{\min} の圧力依存性 (b)。

最後に、我々はボースガラス相を解析するために局在スケール変分法という方法を開発した。これは今回の系にとどまらず、局在や擬ボース凝縮体といったものが関わってくる様々な系に適用可能であると思われる。例えばこの方法は2次元ボース系の超流動転移において用いられる繰り込み群の解析と密接に関連しているかも知れない [20, 74, 75]。

第6章 結論

第I部では、多孔質ガラス中の液体 ^4He のボース・アインシュタイン凝縮と超流動に関する様々な現象を取り上げ、ランダムポテンシャル中の3次元ボース流体のモデルを用いて、希薄領域、高密度強相関領域における物理量の解析的な導出、実験との比較を行った。以下に本研究で得られた結果および今後の課題を述べる。

多孔質ガラスへの液体 ^4He の注入量が少ないとき、液体 ^4He は希薄な気体として振る舞うことが予想される。このような領域において、液体 ^4He の注入量を少なくしていくと、有限の注入量以下で超流動が消失することが観測されている。これは多孔質ガラスをランダムポテンシャルとして考えたときに、ボース粒子である ^4He 原子のボース・アインシュタイン凝縮が、ランダムポテンシャル中の空間的な最小値へと局在する、アンダーソンガラス相転移が起こっているからであると予想できる。この実験に対して我々はランダムポテンシャル中の3次元希薄ボース気体の解析を用いて、実験との比較を行った。実験における注入量から密度を見積もり、超流動が消失する注入量から、解析において導入したランダムポテンシャルの強さを見積もることで、我々のモデルにはフリーパラメーターがなくなる。よって実験結果との定量的な比較ができるようになる。実験との比較を行うと、低温領域において計算結果は実験の比熱や超流動密度の振る舞いを、定量的に良く再現する。またアンダーソンガラス状態に関連して、幾つかの興味深い現象を予言することができる。1つ目に極低温における比熱の温度に線形な振る舞いがある。これはランダムポテンシャルとボース・アインシュタイン凝縮との散乱によって引き起こされ、温度励起は関与しない。2つ目に低密度において常流動状態であった系が、温度の上昇とともに超流動状態へと転移し、再び常流動となる再起型の転移がある。これはアンダーソン局在を起こしている凝縮体が温度の上昇によって遍歴し、超流動になることによって引き起こされ、この再起型の転移はアンダーソンガラス相の存在を強く支持する。我々はランダムポテンシャルの強度を、多孔質ガラスの空間充填率を下げるなどでより強くすることにより、実験的に観測が容易になるであろうということを示した。

多孔質ガラスに液体 ^4He を注入し、さらに高圧状態にすることで、高密度強相関のボース系が実現されると考えられる。山本達は非常に孔径の小さい多孔質グラ

スに注入された液体 ^4He をこのような高圧の状況においたときに、ある圧力以上で超流動が消失することを観測した。これは、強相関領域において粒子の交換が抑制され、ボース・アインシュタイン凝縮体がランダムポテンシャルの空間的な極小値へと局在し、局在した凝縮体同士が相関を失うという、ボースグラス相転移が起きているからではないかと考えられる。この実験に対してランダムポテンシャル中の3次元強相関ボース流体のモデルを用いて解析を行った。まず高密度における超流動とボース・アインシュタイン凝縮の振る舞いを定性的につかむため、それぞれの転移温度を計算したところ、有限のボース・アインシュタイン凝縮転移温度において超流動転移温度が零になるという結果を得た。これは高密度領域において凝縮体が超流動性を失っていることを意味しており、ボースグラス相が実現する可能性を示唆している。そこで次に解析を絶対零度に限定し、我々が開発した局在スケール変分法を用いて、高圧高密度下におけるボース・アインシュタイン凝縮の局在とボースグラス相の可能性を定量的に調べた。その結果、ある転移圧力以下でボース・アインシュタイン凝縮は多孔質ガラスの孔径のサイズにまで局在し超流動性を失うという結果が得られた。またこの転移圧力はフリーパラメーターなしで山本達が得たものと定量的に一致しており、彼らがボースグラス相転移を観測したということをサポートする。また転移圧力は多孔質ガラスの孔径に強く依存し、孔径の大きい多孔質ガラスでは観測できないことを示した。

多孔質ガラス中の液体 ^4He の熱力学的な性質に関して、我々が本研究において行った解析以外にも、興味深い実験結果は数多く存在する。Plantevin 達が中性子散乱を用いることにより、超流動転移温度以上でボース・アインシュタイン凝縮が存在することを示しているが、これはその1例である。この実験との比較を行うためには、我々が絶対零度において行った局在スケール変分法の解析を有限温度に拡張しなければならず、今後の課題の1つとして残っている。この系におけるボース・アインシュタイン凝縮がどのようなときに超流動性を失うのかということさらさら理論的に調べていくことで、ボース・アインシュタイン凝縮と超流動の関係は少しずつ明らかになってゆくであろう。

第II部

極低温における量子乱流のダイナミクスと統計則

第7章 序章

自然界にはあらゆる場所に様々な渦や乱流状態が存在し、その解明は基礎研究のみならず工学的な応用面からも非常に重要である。しかし乱流の機構は非常に複雑であり、流体力学における最大の難問であると言っても過言ではない。乱流の歴史は長い歴史を持っており、15世紀にレオナルド・ダヴィンチが乱流中における渦運動の詳細な観測、スケッチを行ったことに始まり [76]、現在では数学、実験物理学、理論物理学、計算科学を初めとする様々な分野において、数多くの研究がなされている [77, 78, 79]。流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式は古典流体を良く記述し、流体を研究するための重要なツールの1つである。非圧縮の古典流体は $(\text{平均流速}) \times (\text{系の特徴的なサイズ}) / (\text{運動粘性率})$ である無次元のレイノルズ数によって、その流れの特徴が決定される。レイノルズ数が小さい場合、流れは層流状態であるが、レイノルズ数がある臨界値を越えると、渦が発生し乱流状態となる。渦とは流れの回転成分である渦度が集中している領域を意味する。乱流は非常に複雑であり、その詳細な流れを予測し、研究することは非常に困難である。乱流における実験的かつ理論的な枠組みを初めて構築したのは Taylor であり、彼は系のサイズより小さいスケールにおける一様等方な乱流と言う概念を提唱した [80]。Kolmogorov はこの概念に基づいて、発達した一様等方で定常な乱流におけるコルモゴロフ則という統計則を提唱した [81, 82]。その後、コルモゴロフ則は多くの実験・理論において確認され、乱流の爆発的な理解へとつながる結果となった。

古典流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式は非線形であり、その解析的な扱いは特に乱流状態においてきわめて困難となる。そのためナビエ・ストークス方程式の数値シミュレーションは古典流体の乱流である古典乱流を理解するために必要不可欠であり、近年における計算機の急速な発達をもたらした大規模シミュレーションは我々の古典乱流に対する理解をさらに加速している。しかし、古典乱流を数値シミュレーションから理解する上で2つの大きな問題が残っている。1つは高レイノルズ数の発達した乱流を数値的に扱う場合、非常に大きな系と十分な精度が必要となり、非常に強力な計算機を必要とすることである。もう1つは古典乱流の可視化の問題である。古典乱流において渦を可視化するため

には圧力、流速、渦度といったような物理量の、ある境界値を設定する必要があるが、どの物理量が最も適切で、どのように境界値を定めるべきかというのは場合によりけりであり、渦を可視化するための統一的な方法はない [83]。つまり、古典乱流におけるカスケード過程といったような渦のダイナミクスは概念的なものであり、古典流体の統計則とどのような関係にあるのかよく分かっていない。

一方、低温物理学において重要であった、超流動液体 ^4He において実現される超流動乱流が [84]、古典乱流との類似性を持っていることが近年発見された。超流動乱流は古典乱流で存在する困難を解決し、乱流の理解をさらに深めるものであると思われており、注目を浴びつつある。

超流動の流体力学は第I部で説明したように、2流体モデルで説明される [4, 5, 6, 7]。これは超流動が粘性を持ち通常の流体のように振る舞う常流体と、粘性を持たない超流体の2つの成分からなるというモデルである。2流体モデルを特徴づける超流動 ^4He の実験の1つに、温度勾配下において常流体と超流体がお互い反対向きに流れる熱対向流がある。お互いの相対速度小さいときは、2流体は独立に流れるが、相対速度がある値を超えると流れに散逸が生まれ、流れが独立でなくなることが実験的に示されている。Feynman はこれが量子化された渦である量子渦のタングル状態によって作られた超流動乱流状態であることを予言し [12]、Vinen は後に液体 ^4He 中において循環の量子化された量子渦が存在すること、そして熱対向流中における散逸が量子渦と常流体との相互摩擦力によって生じていることを明らかにすることで Feynman の予言が正しいことを示した [85, 86, 87]。その後、熱対向流を用いて超流動乱流の膨大な研究が理論的、実験的に行われた [88]。特に Schwarz は量子渦に対する渦糸モデルを用いて大規模シミュレーションを行い、熱対向流中における量子渦糸タングルの描像を明らかにした [89, 90]。しかしながら熱対向流は古典流体との類似性を持っておらず、超流動乱流と古典乱流の関係は長い間謎のままであった。

ところが近年になって熱対向流を用いない超流動乱流が実現された。Maurer 達は 1.4 K 以上において、対向する振動円板中に超流動乱流を作ること的成功し、超流動乱流の流れが古典乱流の流れにおいて成立するコルモゴロフ則に従っていることを発見した [91]。また Stalp 達は 1 K 以上において、振動格子中に超流動乱流を作ること的成功した [92]。彼らは乱流の減衰過程を観測し、それが間接的にコルモゴロフ則と一致していることを発見した。彼らの実験から超流動乱流と古典乱流に類似性があるのは明らかである。この類似性は、超流動乱流を構成する量子渦が相互摩擦力を通して、古典乱流のように振る舞う常流体と結合し、ともに古典乱流のように振る舞うという考えで理解される [93]。第I部の図 2.1(b) に示されるように、常流体は 1 K 以下でほとんど無くなるので、この温度領域では

上述の考え方は適応できず、超流動乱流が果たして古典乱流と類似するののかどうかという新たな疑問が生まれる。この領域における超流動液体 ^4He は素励起を持たず完全に量子力学的であり、この温度領域で実現される乱流は量子乱流と呼ばれる。

この疑問をより深く考えるため、再び古典乱流の統計について考える [78, 79]。非圧縮性流体による発達した定常乱流中において、系にエネルギーが注入されるスケールは系のサイズと同じであり、このスケールはエネルギー保有領域と呼ばれる。エネルギー保有領域において注入されたエネルギーのスケールは、慣性領域と呼ばれる中間領域のスケールにおいて、より小さくなってゆく。慣性領域では粘性が有効ではなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持つ。そのためエネルギースペクトルが、流体の速度場をフーリエ変換した際に得られる波数のべきとなるコルモゴロフ則に従う [81, 82]。最終的にエネルギー散逸領域と呼ばれる非常に小さなスケールにおいて、エネルギーは粘性によって散逸する。

慣性領域におけるスケール普遍性のダイナミクスはリチャードソンカスケードによって理解されている。これはエネルギー保有領域によって作られた大きな渦が、慣性領域において分裂を繰り返して小さくなり、エネルギー散逸領域のスケールまで小さくなった渦が粘性によって散逸するという描像である。ところが古典乱流では、渦は粘性によって生成・消滅を繰り返し、渦の統一的な定義は存在しない。よってリチャードソンカスケードは古典乱流では概念的なものにすぎない。ところが量子流体中に存在する量子渦は循環が量子化され、安定で明確に定義できる位相欠陥である [11, 12]。有限温度では量子渦は相互摩擦力を介して減衰するが、極低温では渦はつなぎ換えを起こしたときの短波長圧縮性素励起の放出か、カスケードによって極端に小さくなった渦輪の短波長圧縮性素励起への転化という過程でのみ散逸し、いずれも渦芯より小さなスケールの散逸であり、それより大きいスケールでは渦に対する散逸が全く存在しない。つまり量子乱流は大きなレイノルズ数を持ち、かつ量子渦によってリチャードソンカスケードが実在となった、乱流の理想的なプロトタイプである。このように量子乱流はコルモゴロフ則、リチャードソンカスケード、慣性領域の関係をより明らかにする可能性があり、もしそれが真実であるならば量子乱流も古典乱流との類似性を持っていることになる。

現在までに量子乱流を理論的に研究するための2つのモデルが提唱されている。1つは Schwarz によって導入された渦系モデルであり [89, 90]、もう1つはグロス・ピタエフスキー方程式である [94, 95]。荒木達は渦系モデルにおいて渦系と常流体との相互摩擦力を消去することで絶対零度における量子乱流のシミュレーションを行い、エネルギースペクトルがコルモゴロフ則と一致することを見出した [96]。また Nore 達はグロス・ピタエフスキー方程式を用いて、量子乱流の数値シ

ミュレーションを行った [97, 98]。彼らは運動エネルギーを渦の運動エネルギーである非圧縮性部分と圧縮性素励起の部分に分け、非圧縮性部分の運動エネルギーのスペクトルが非常に短い時間、コルモゴロフ則と一致することを見出した。しかし渦のつなぎ換えなどで生じた短波長圧縮性素励起が、渦の運動に深刻な影響を与えるため、コルモゴロフ則との一致はすぐに破れる。

このような状況を踏まえ、我々はグロス・ピタエフスキー方程式に、渦芯よりも小さいスケールにのみ働く散逸項を導入した [99, 100]。この散逸項は、物理的には短波長圧縮性と熱浴との相互作用による散逸を意味しており、短波長圧縮性素励起を散逸させるが、渦には作用しない。従って渦のダイナミクスが短波長圧縮性素励起に影響されず、量子渦固有のダイナミクスが実現されるため、古典乱流と量子乱流の関係をよりはっきりとさせてくれる。我々はこの拡張されたグロス・ピタエフスキー方程式を用いて減衰乱流と定常乱流の2つにおいて数値シミュレーションを行った。両方の乱流において短波長圧縮性素励起は強く散逸され、非圧縮性運動エネルギーのスペクトルがコルモゴロフ則と一致することを確認した。これは量子乱流に古典乱流との類似性があることを強く支持する。さらに定常乱流においてエネルギー流束とエネルギー散逸率を計算することにより、量子乱流におけるエネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の存在を明らかにし、エネルギー保有領域において生成した量子渦が慣性領域において再結合を通して分裂し、エネルギー散逸領域において、最終的に短波長圧縮性素励起へと散逸する過程を明らかにした。これは古典乱流の渦において考えられてきた過程とよく似ているが、量子渦が明確な位相欠陥として定義されるため、より明確である。

第II部の構成は以下の通りである。まず第8章では古典乱流に関する理論的な枠組みを紹介する。第9章では量子乱流を構成する量子渦の基本的な性質について述べた後に、超流動乱流、量子乱流に関する幾つかの実験と数値シミュレーションを紹介する。第10章では小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式を導出し、その基本的な性質と具体的に我々が行った方程式の数値解析法について述べる。これを元に第11章で1本の渦の、第12章で減衰乱流の、第13章で定常乱流の数値シミュレーションを行う。第14章ではシミュレーションを有限温度へと発展させ、具体的な渦の散逸構造について調べる。第15章は結論である。

第8章 古典乱流とコルモゴロフ則

本章では古典流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式と古典乱流の重要な統計則であるコルモゴロフ則、そしてリチャードソンカスケードについて、その理論的な枠組みを簡単に紹介する。

8.1 ナビエ・ストークス方程式

古典流体における非圧縮性ニュートン流体の運動は次のようなナビエ・ストークス方程式によってよく記述される [78, 79, 101]。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (8.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (8.1b)$$

ここで $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は流体の速度場、 $P(\mathbf{x}, t)$ は流体の圧力、 ρ は流体の密度、 ν は流体の運動粘性率である。 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ の時間発展は式 (8.1a) によって記述され、一方で式 (8.1b) は流体の非圧縮性を保証し、 $P(\mathbf{x}, t)$ を決定する。流体の性質を特徴づけるのは、慣性項である式 (8.1a) の左辺第 2 項と、粘性項である右辺第 2 項である。今ここで特徴的なスケール L を導入し、式 (8.1a) の空間微分を $1/L$ で置き換えるとする。 L が大きなときは空間の 2 階微分を含む粘性項に比べ、空間の 1 階微分を含む慣性項が主要な項となる。つまり大きなスケールにおいては流体の運動は非線形性によって支配され、粘性は働かない。逆に小さなスケールでは流体は粘性によって支配され、流体の運動は強く散逸される。また慣性項を粘性項で割ることによって得られるレイノルズ数

$$R = \frac{\bar{v}L}{\nu} \quad (8.2)$$

は系の流れの状態を特徴付ける。ここで \bar{v} は流体の特徴的な流速、 L は系の特徴的なスケールである。このレイノルズ数が流体の層流－乱流転移を決定し、レイノルズ数が大きいときに渦の発生とともに乱流状態が実現する。渦とは渦度 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ の集中部分である。

8.2 古典乱流

次にこのような非圧縮のニュートン流体において実現される古典乱流について考える。外部からのエネルギー注入があり、かつ乱流が十分に発達している（高レイノルズ数）場合、式 (8.1a) における粘性項に比べ慣性項が十分支配的であるスケールにおいて系を粗視化して眺めた場合、その乱流は一様等方かつ定常であるといえる [80]。系の単位質量あたりの平均エネルギーを E とし、エネルギースペクトル $E(k)$ を

$$E = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \rangle = \int dk E(k) \quad (8.3)$$

で定義する。ここで k は速度場のフーリエ変換から与えられる波数である。高レイノルズ数の乱流におけるエネルギースペクトルの概形は図 8.1 のようになる。外部からスケール l_0 においてエネルギーが注入されるとする。 $k_0 = 1/l_0$ 付近の波数領域はエネルギー保有領域と呼ばれ、乱流のエネルギーのほとんどはこの領域で占められる。外部からエネルギーが注入されると慣性領域においてエネルギーが高波数の領域へと輸送され、コルモゴロフ波数 k_K 以上の、エネルギー散逸領域と呼ばれる領域においてエネルギーは粘性によって散逸される。ここで図中の破線はエネルギー散逸スペクトル $2\nu k^2 E(k)$ と呼ばれている。 $l_K = 1/k_K$ はコルモゴロフ長と呼ばれ、乱流中に存在する渦の太さを見積もる。図中の ε はエネルギー保有領域ではエネルギー注入率、慣性領域ではエネルギー輸送率、エネルギー散逸領域ではエネルギー散逸率と異なった役割を演じ、またこの ε は慣性領域におけるエネルギー流束 $\Pi(k)$ と等しい。エネルギー流束 $\Pi(k)$ とは波数 k を横切って波数の小さい方から大きい方へ流れる単位時間あたりのエネルギー流量である。コルモゴロフ波数 k_K は粘性が有効となる波数を意味しており、 ε と ν を用いて

$$k_K = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \quad (8.4)$$

と与えられる。慣性領域では粘性が有効に働かず、乱流は系の詳細に依存しない自己相似的なスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトルがコルモゴロフ則

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (8.5)$$

のような波数のべきで表される [81, 82]。これは次元解析を用いて次のように与えられる。エネルギースペクトルが系の詳細に依存しないとすると $E(k)$ は ε と ν のみに依存するようになる。次元 $[L^3 T^{-2}]$ をもつ $E(k)$ を次元 $[L^2 T^{-3}]$ 、 $[L^2 T^{-1}]$ の次元を持つ ε 、 ν で表すと $E(k) = \varepsilon^{1/4} \nu^{5/4} (k/k_K)^x$ となる。最後の項は無次元量である。 k_K 以下で粘性が有効でないとする $E(k)$ は ν に依存しないので、式 (8.4) よ

り $x = -5/3$ となり式 (8.5) が得られる。 C はコルモゴロフ定数と呼ばれる普遍定数で1のオーダーである [79]。

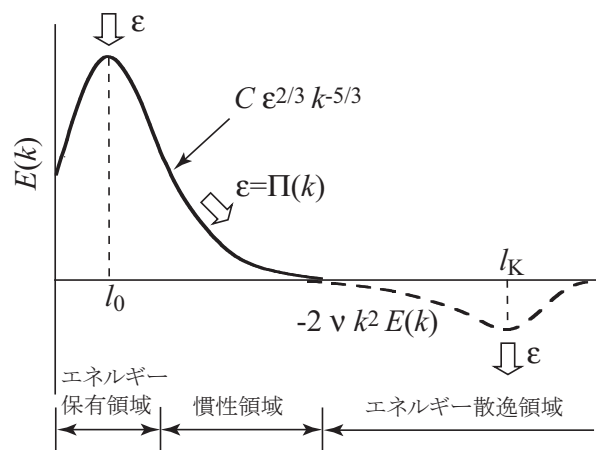


図 8.1: エネルギースペクトルの概念図。

慣性領域におけるコルモゴロフ則の背景には図 8.2 のようなリチャードソンカスケード過程があると考えられている。これは外部からのエネルギーが注入によって生成された渦が慣性領域において自己相似的に分裂して小さくなり、最終的に小さなスケールの渦が粘性によって消滅するというエネルギー伝達を表している。しかしこのリチャードソンカスケードの描像は古典乱流においては概念的なものであるにすぎず、コルモゴロフ則との関係は完全には理解されない。というのは古典流体中では粘性のために渦が安定に存在できず生成消滅を繰り返し、渦の一意的な定義が存在しないためである。これと対照的なのが次章で議論する量子渦からなる超流動乱流である。量子渦は安定な位相欠陥として明確に定義される。Feynman により絶対零度の量子乱流において考察された量子渦の分裂によるカスケード過程はまさにこのリチャードソンカスケードそのものなのである [12]。

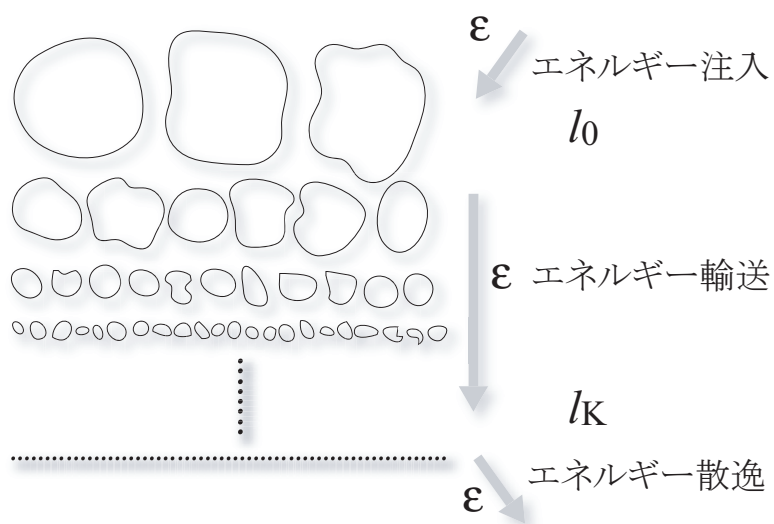


図 8.2: リチャードソンカスケードの概念図。

第9章 量子渦と量子乱流

前章では古典乱流の統計則であるコルモゴロフ則とリチャードソンカスケードについて述べ、古典乱流においては渦の統一的な定義が存在しないためにその関係が完全には理解されないことを説明した。一方量子乱流は構成する量子渦が位相欠陥として明確に定義できるため、古典流体において概念的であったリチャードソンカスケードが実在的となる。本章ではこの量子渦に関する理論的な枠組みを説明した後、超流動液体 ^4He における量子渦の一般的な観測実験を紹介する。そして超流動液体 ^4He で実現される超流動乱流に関する幾つかの事例を紹介し、我々の研究の根幹をなす量子乱流について説明する。

9.1 量子渦の理論的枠組みと実験的な観測

低温において実現する超流動液体 ^4He は、ボース粒子である ^4He がボース・アインシュタイン凝縮を起こすことと密接な関係にあることはすでに第I部の第4章で述べた。ボース・アインシュタイン凝縮が実現されると式(4.7)で見られるようなゲージ対称性の破れと位相のコヒーレンスが現れ、式(4.9)のような巨視的な秩序変数(巨視的波動関数)が導入される。式(4.9c)の $\mathbf{v}_s = \hbar/m\nabla\phi(\mathbf{x})$ がまさに超流動の流れを特徴づけており、超流動の非回転性 $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ を保証する。 $\phi(\mathbf{x})$ が単連結領域にあるときは流体の任意の閉曲線における速度の周積分(循環)は零となる。ところが $\phi(\mathbf{x})$ が多重連結領域にあるときには渦が存在することが許され、式(4.10)が満たされる。 $\kappa = h/m$ は循環量子と呼ばれ、 ^4He の場合 $\kappa = 0.998 \times 10^{-27}$ m/sとなる。渦のエネルギーは一般に渦度の2乗に比例するので、量子渦のエネルギーは $(\kappa n)^2$ に比例し、従って循環量子数 $n = 2$ の渦が一本存在するよりも $n = 1$ の渦が2本存在した方が安定となる。よって量子渦は全て κ の循環を持っている。このように量子渦は古典流体における渦とは違い、位相欠陥として明確に定義され、安定に存在できる。また渦芯のサイズは回復長 $\xi = h/\sqrt{2m\mu}$ と呼ばれる量で見積もられ(μ は化学ポテンシャル)、非常に細い(液体 ^4He の場合 $\sim \text{\AA}$)。

このような量子渦を初めて観測したのはVinenである[13]。彼は円筒容器に超流動 ^4He を入れ、中心に細い導線を張ることで、液体に2重連結領域をつくった。

量子渦が導線の周りに循環を作ったとき、導線がある速度で動くとマグナス力を受けることを利用し、循環を測定した。図 9.1(a) が観測された循環の結果である。 κ の値のところだけに高い頻度が観測されており、確かに超流動内部で循環が κ に量子化されていることを表している。さらに他の幾つかのグループによって量子化された循環が観測され [102, 14]、量子渦の存在は確かなものとなったが、Packard 達はさらに量子渦を映像化することを試みた [103, 104]。回転容器内に量子渦が侵入すると、渦間には斥力相互作用が働くために三角格子状の配置をとる。彼らはこの状態に電子を注入し渦に電子を捕獲させた後、電場により流体の表面にまで引き出してスクリーンに照射した。図 9.1(b) がその結果であるが、ここで 6 本の渦の格子が観測されている。

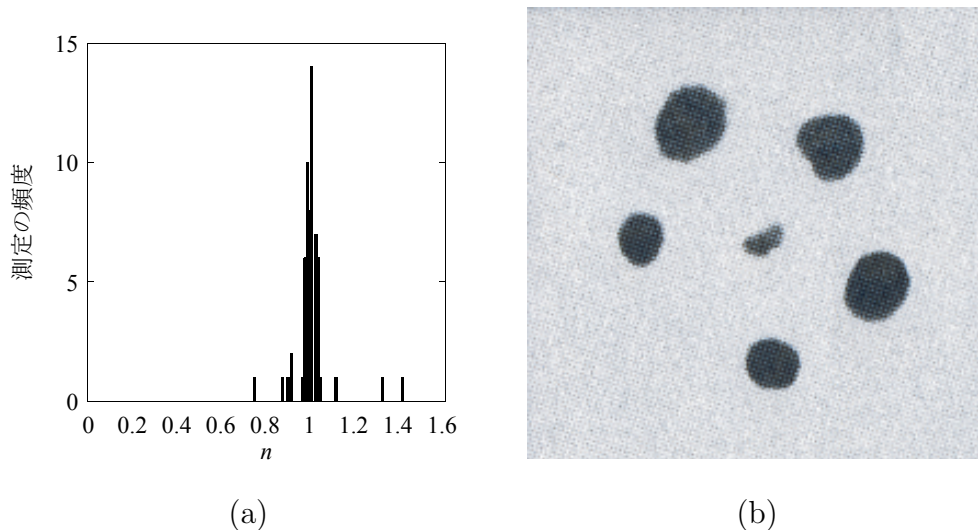


図 9.1: 循環 $n\kappa$ の測定頻度グラフ (a) と回転容器中に発生した渦糸の配置。(a) は文献 [13]、(b) は文献 [104] より

9.2 超流動乱流

超流動 ^4He における流体力学は第 I 部で説明したとおり、2 流体モデルを用いて記述される。この 2 流体モデルを最も特徴づける超流動 ^4He の現象として、熱対向流がある。これは管でつながれた 2 つの ^4He の槽を用意し、片方をヒーターによって暖めることによって 2 つの槽の間に温度差を与えると、常流体が高温部から低温部へ、超流体が低温部から高温部へと流れることにより

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \mathbf{v}_s \quad (9.1)$$

が成立することである。ここで v_s は超流体の速度場、 v_n は常流体の速度場である。熱対向流は通常の古典流体の熱伝導に比べおよそ6桁も大きな熱伝導を引き起こす。

ところがヒーターによる発熱を大きくし、熱対向流中における超流体と常流体の相対速度がある臨界値を超えると、熱伝導は著しく悪くなる。これは熱対向流中において量子渦が発生してタングル状態となった超流動乱流状態が形成され、量子渦と常流体の間の相互摩擦力により流れに非線形性が生じるからである。図 9.2(a) は熱対向流中における、単位時間あたりの発熱量 Q と2つの槽の間の温度差 ΔT との関係であるが [105]、明らかに図中の Q_c において急激に温度差が上昇し、熱伝導が悪くなっていることが分かる。これに対して Schwarz は大規模シミュレーションを用いることで、熱対向流中における超流動乱流中の量子渦のタングル状態の描像を明らかにした [89, 90]。量子渦の渦芯は非常に細く、超流動⁴He の場合 $\sim 1 \text{ \AA}$ であるため、古典流体の渦に対しては最も粗い近似であった渦糸近似が非常に良い近似となる。渦糸近似とは量子渦の芯の構造を無視する近似であり、渦糸の要素 $x_0(t)$ が x に作る超流動速度場 $v_{\text{ind}}(x)$ はビオ・サバルの法則によって記述される。

$$v_{\text{ind}}(x) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[x_0(t) - x] \times dx_0(t)}{|x_0(t) - x|^3} \quad (9.2)$$

この式より、位置 x での超流動速度場は、外部から駆動する超流動速度場 $v_{\text{sa}}(x)$ とあわせて $v_s(x) = v_{\text{ind}}(x) + v_{\text{sa}}(x)$ となる。そして渦糸 $x_0(t)$ の時間発展は

$$\frac{\partial x_0(t)}{\partial t} = v_s(x_0) + v_m(x_0) \quad (9.3)$$

となる。ここで $v_m(x)$ が量子渦と常流体の相互摩擦力に起因する項であり、具体的に次のような形を持つ。

$$v_m(x) = \alpha x'_0 \times (v_n - v_s) - \alpha' x'_0 \times [x'_0 \times (v_n - v_s)] \quad (9.4)$$

x'_0 は x_0 の単位接線ベクトルである。渦糸の要素 x_0 と流れ $(v_n - v_s)$ が垂直な方向にあるとき、式 (9.4) の第1項は渦糸の要素にも流れにも垂直な相互摩擦力、第2項は渦糸の要素に垂直で流れに平行な相互摩擦力を表し、いずれにせよ相互摩擦力は渦糸の要素に垂直である。相互摩擦力は量子渦と、素励起である常流体との散乱によって生じるため、パラメータ α 、 α' は温度の関数となり、絶対零度において零となる。Hall と Vinen は熱対向流中にこのような相互摩擦力を観測し [106]、 α 、 α' の精密な温度依存性を測定することによって、熱対向流中に超流動乱流が存在することを明らかにしている。Schwarz は熱対向流に対して式 (9.3) の数値シミュレーションを行い、熱対向流中において図 9.2(b) のような量子渦糸タングルが実現されていることを明らかにした。

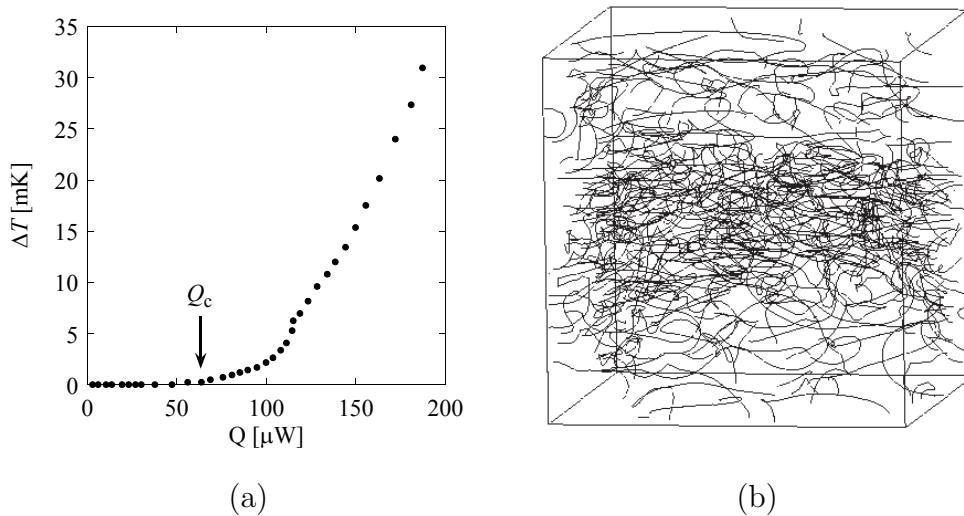


図 9.2: 熱対向流における ΔT の Q 依存性 (a) と渦糸近似における熱対向流中の渦糸タングル。(a) は文献 [105] より。

熱対向流中の超流動乱流はその発見以来、非常に多くの研究者に注目され、膨大な数の実験、理論研究が行われた [88]。しかしながら熱対向流は古典流体において対応する現象がないため、超流動乱流と古典乱流との関係については何も分かっていなかった。そのような背景の中、近年において超流動乱流の新しい幕開けが訪れる。つまり熱対向流を用いない、古典流体において乱流を作る方法と類似の方法で作られ出した超流動乱流が報告されたのである。Maurer 達は図 9.3(a) のような対向する振動円板中に超流動乱流を作り出すことに成功した [91]。彼らは 1 点の圧力の時間変化を測定し、それを速度の時間変化に変換することでエネルギースペクトルを計算した。図 9.3(b) に得られたエネルギースペクトルを示す。発達した一様等方定常な乱流においては物理量の空間変化は時間変化に相当するので、エネルギースペクトルの振動数依存性は波数依存性に相当する。温度 2.3 K では液体 ^4He は常流動状態であるので、そのエネルギースペクトルはコルモゴロフ則 (8.5) である振動数の $-5/3$ 乗に一致する。しかし 2.08 K、1.4 K と液体 ^4He が超流動状態になった後においても、エネルギースペクトルはコルモゴロフ則と一致していることが分かる。この実験結果は超流動乱流が古典乱流との類似性を持っていることを意味する。Stalp 達は同様に振動格子中に超流動乱流を作り出すことに成功し、第 2 音波と呼ばれる超流動特有の音波の減衰を測定することによって 1 K 近傍の超流動乱流もやはりコルモゴロフ則に従うことを間接的に示した [92]。彼らの測定はやや複雑なので詳細は省略するが、彼らの実験もやはり超流動乱流が古典乱流との類似性を持っていることを支持する。

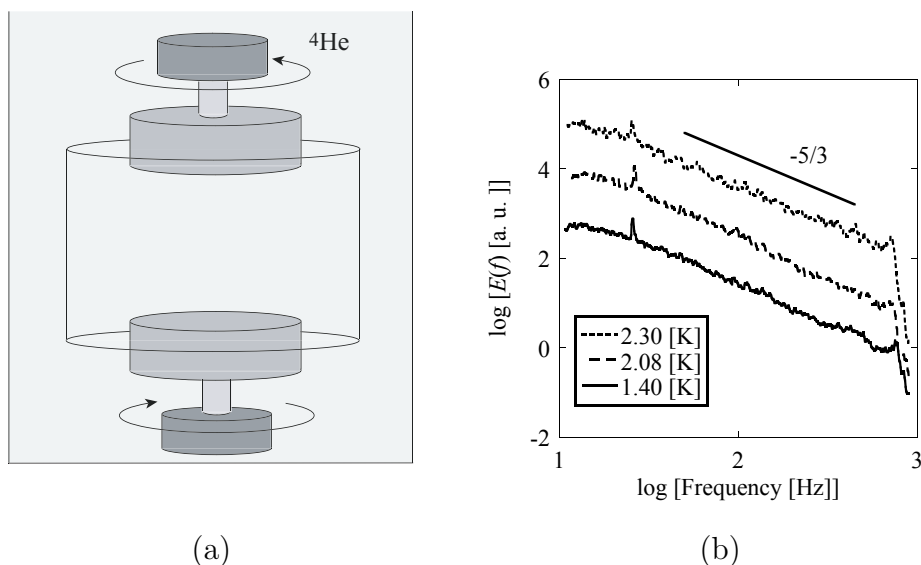


図 9.3: Maurer 達によって行われた、対向する振動円板中における超流動乱流の模式図 (a) と実験によって得られたエネルギースペクトル (b)。 (b) は文献 [91] より。

9.3 量子乱流

実験によって得られた超流動乱流と古典乱流との類似性は、粘性を持ち通常の古典流体のように振る舞う常流体と、粘性を持たない超流体が式 (9.4) で示される相互摩擦力を介して結合し、ともに古典流体のように振る舞うという考え方によって理解される [93]。すると1つの大きな疑問が生まれることになる。常流体の存在しない極低温における量子乱流においても、古典乱流との類似性はあるのだろうか？

この問題を考えるために、再び古典流体における渦と量子渦の違いについて考える。古典流体の渦と量子渦との決定的な違いは以下の通りである。古典流体の渦は

- 渦度 $\omega(x) = \nabla \times v(x)$ は連続的な値をとるため、循環 $\oint ds \cdot v_s$ は任意の閉曲線において任意の値をとる。
- 粘性によって渦は減衰し、生成消滅を繰り返す。
- 乱流中における渦芯のサイズはコルモゴロフ長 l_K によって見積もられるが、統一的な渦の定義は存在しない。

という性質を持っているため、図 8.2 に示されるような渦のリチャードソンカスケードは概念的なものであり、ゆえにコルモゴロフ則とリチャードソンカスケードとの関係は完全には理解できない。量子渦は対照的であり

- 循環が $\kappa = h/m$ と量子化されている。
- 巨視的波動関数の位相欠陥として明確に定義され、安定に存在できる。
- 渦芯のサイズは回復長 $\xi = h/\sqrt{2m\mu}$ で見積もられ、非常に細い。

という性質を持つ。また有限温度における量子渦は相互摩擦力を通して散逸するが、絶対零度における量子渦は

- 渦が再結合する際の短波長圧縮性素励起放出
- カスケードによって回復長程度まで小さくなった渦の短波長圧縮性素励起への転化

という2つの過程でのみ減衰し、いずれも渦芯より小さなスケールの減衰機構である。つまり量子渦は古典流体における渦のよけいな自由度を取り除いた、渦の本質のみの形態であるといえよう。よって量子乱流は古典乱流における慣性領域におけるコルモゴロフ則、リチャードソンカスケードを理解するための理想的なプロトタイプになりうる。もしこれが真実であるなら、量子乱流は古典流体との類似性を持っているはずである。

この考えに基づいて荒木達は渦系近似を用いた量子乱流の数値シミュレーションを行った [96]。量子乱流における渦系のダイナミクスは式 (9.3) において $v_m = 0$ とし、常流体と量子渦との相互摩擦力をなくすことで実現される。彼らはテラー・グリーン渦と呼ばれる特殊な渦の配置から出発した一様等方な量子乱流におけるエネルギースペクトルの計算を行った。数値計算の空間分解能より小さくなった渦を人工的に消すことで散逸 ε を導入し、減衰乱流におけるシミュレーションを行っている。図 9.4(a) は彼らの得たエネルギースペクトルである。図中の l は平均渦系間距離に相当する長さであるが、それよりも大きなスケールにおいて、コルモゴロフ則との一致はかなり良い。平均渦系間距離よりもスケールが小さいところでのコルモゴロフ則からのずれは、渦のケルビン波カスケードのためであると考えられているが [107]、本論文ではその詳細は省略する。

量子乱流を理論的に考察することのできるもう1つのモデルがグロス・ピタエフスキー方程式である（グロス・ピタエフスキー方程式の詳細は次章以降で詳しく述べることにする） [94, 95]。Nore 達はグロス・ピタエフスキー方程式を数値

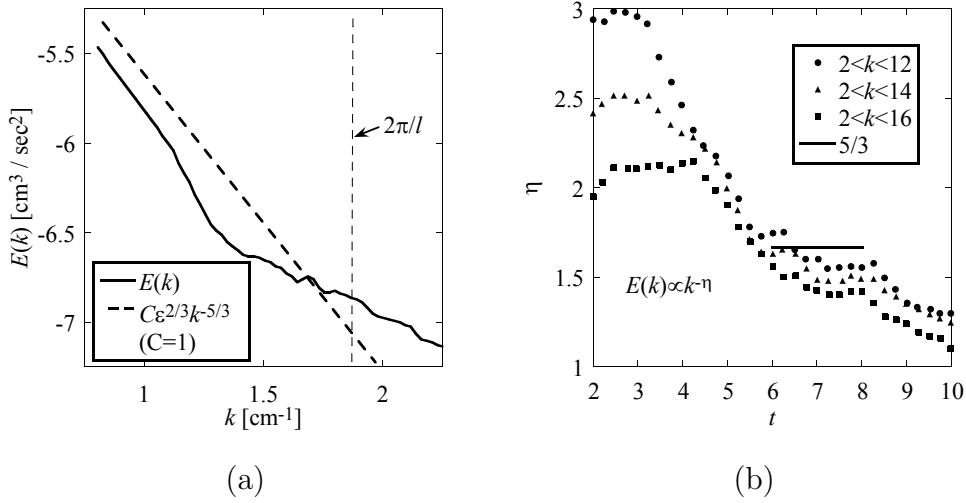


図 9.4: (a) : 渦糸近似における量子乱流のエネルギースペクトル。(b) : グロス・ピタエフスキー方程式におけるエネルギースペクトルの指数 η の時間依存性。3 種類の波数領域で η を計算している。(a) は文献 [96]、(b) は文献 [98] より。

的に解くことにより量子乱流のシミュレーションを行った [97, 98]。グロス・ピタエフスキー方程式は圧縮性流体を記述する方程式であるため、彼らは運動エネルギーを量子渦が担う非圧縮性部分と圧縮性素励起が担う圧縮性部分に分け、両方の振る舞いを計算した。量子渦が再結合するときや、渦芯のサイズにまで小さくなった量子渦が消滅する際に、渦芯よりも小さい短波長圧縮性素励起が放出されるため [108, 109, 110, 111]、全エネルギーは保存されるものの、運動エネルギーの非圧縮性部分は圧縮性部分へと転化してゆく。彼らは運動エネルギーの非圧縮性部分に対するエネルギースペクトル $E(k)$ を計算し、

$$E(k) \propto k^{-\eta} \quad (9.5)$$

で定義される、スペクトルの波数に対する指数 η を求めた。図 9.4(b) は η の時間発展である。 η がコルモゴロフ則である $\eta = 5/3$ と非常に短い時間だけ一致しているように見える [112]。しかし時間が経つにつれ短波長圧縮性素励起が増え、ついには系全体のダイナミクスが短波長圧縮性素励起によって支配され、渦のリチャードソンカスケードが抑制されるようになると [113, 114]、コルモゴロフ則との一致は破綻する。図 9.4(b) を見る限りでは、グロス・ピタエフスキー方程式から作られる量子乱流がコルモゴロフ則を満たしているかどうかは明らかではない。なお渦糸近似におけるシミュレーションでは渦芯よりも小さいスケールの構造を無視しているため、このようなことは起こらない。

第10章 小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式

前章では量子渦からなる量子乱流が乱流を理解するための理想的なプロトタイプになりうることを説明したが、一方で量子乱流を記述するグロス・ピタエフスキー方程式においては、短波長圧縮性素励起のために、本当にこれが成り立つのかどうか曖昧であることを説明した。このような状況を打開するため、我々は短波長圧縮性素励起のみを散逸させる散逸項をグロス・ピタエフスキー方程式に導入し、量子乱流と古典乱流との関係をよりはっきりさせることを試みた。

本章ではまずグロス・ピタエフスキー方程式の導出と、グロス・ピタエフスキー方程式によって記述される量子渦と量子乱流の性質について説明する。そして本研究の原点となる小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式の導出へ展開し、この方程式の数値解法について説明する。

10.1 グロス・ピタエフスキー方程式

グロス・ピタエフスキー方程式は次のようにして導かれる。まず第I部第5章における式(5.1)の3次元ボース流体におけるハミルトニアンを考える。ここでは簡単のために相互作用は非常に短距離であるとし $g_0(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x})$ の弱結合近似を行う。このとき g は結合定数と呼ばれる。すると式(5.1)のハミルトニアンは

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + \frac{g}{2}\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Psi}(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \quad (10.1)$$

で与えられる。ただしここでは外場 $U(\mathbf{x})$ を考えない。ハイゼンベルグの運動方程式を用いることで、 $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ に対する運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) &= [\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}] \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (10.2)$$

ここで、第I部第4章で考えた、ボゴリューボフによって提唱された式(4.14)に着目する。今考えているのは絶対零度の領域であり、巨視的波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ からの揺らぎ $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ は無視することができる。結局、式(10.2)中の演算子 $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ は全て巨視的波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ で置き換えられ、巨視的波動関数に対する方程式であるグロス・ピタエフスキー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (10.3)$$

が得られる [94, 95]。凝縮体の粒子密度は $\rho(\mathbf{x}, t) = |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 = f^2(\mathbf{x}, t)$ で表され、全凝縮体粒子数 $N = \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)$ が $\partial N / \partial t = 0$ となることからグロス・ピタエフスキー方程式は粒子数の保存を保証する。また $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \hbar/m \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ を定義すると連続方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (10.4)$$

を満たすことより、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が超流動速度場を与えていることがより明らかになる。また9章で述べたことと基本的には同じことであるが、渦度 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は $\phi(\mathbf{x}, t)$ の単連結領域においてはいたるところで消え、全ての凝縮体の回転は量子渦によって引き起こされる。量子渦は $f(\mathbf{x}, t) = 0$ で、その周りにおける循環が $\kappa = \oint \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = h/m$ となる点として定義される (図 10.1(a))。量子渦の近傍は $\rho(\mathbf{x}, t)$ が低下して孔となっている構造を持っている。この渦芯構造はグロス・ピタエフスキー方程式の定常解

$$\mu \Phi(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g|\Phi(\mathbf{x})|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}) \quad (10.5)$$

を求めることによって理解することができる。波動関数の z 方向は一様であると仮定し、 z 軸方向に平行かつ定常な量子渦の解を

$$\Phi(r, \theta, z) = f(r) e^{i\theta} \quad (10.6)$$

とすると式(10.5)は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{df(r)}{dr} \right] + \frac{\hbar^2}{2mr^2} f(r) + g f(r)^3 - \mu f(r) = 0 \quad (10.7)$$

となる。ここで r は $x-y$ 平面における動径、 θ は角度である。渦がないときの定常解は一様な解なので、 $f^2(r) = \bar{\rho}$ 、 $\mu = g\bar{\rho}$ となる。ここで $\bar{\rho}$ は平均の凝縮体密度である。ここでグロス・ピタエフスキー方程式の回復長

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\bar{\rho}}} \quad (10.8)$$

を用いて $r \rightarrow r\xi$ 、 $f(r) \rightarrow f(r)\sqrt{\rho}$ と無次元化すると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{df(r)}{dr} \right] - \frac{1}{r^2} f(r) + f(r) - f(r)^3 = 0 \quad (10.9)$$

を得る。 $f(r) = 0$ 、 $f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ の境界条件を課すところの解は

$$f(r \rightarrow 0) \propto r \quad (10.10a)$$

$$f^2(r \rightarrow \infty) = 1 - \frac{1}{r^2} \quad (10.10b)$$

となり、渦芯近傍で $f(r)$ が線形に立ち上がることが容易に導出できる。この方程式を Shooting-Runge-Kutta 法 [115] によって数値的に求めると図 10.1(b) のような渦芯構造が求まる。図から分かるように渦芯のサイズは、巨視的波動関数の空間変化を特徴づける回復長 ξ 程度の大きさを持つ。回復長は式 (10.8) より原子間相互作用や密度に依存し、超流動⁴He の場合 $\sim 1 \text{ \AA}$ となる。最後に注意しておかなければならないことだが、グロス・ピタエフスキー方程式は弱結合近似を用いることによって導出された方程式であり、高密度である超流動⁴He を定量的に良く記述しているとは言い難い。しかし量子渦が位相欠陥として定義されるという点では超流動⁴He における量子渦と同じであり、その定性的な振る舞いはグロス・ピタエフスキー方程式によってある程度理解できるであろう。

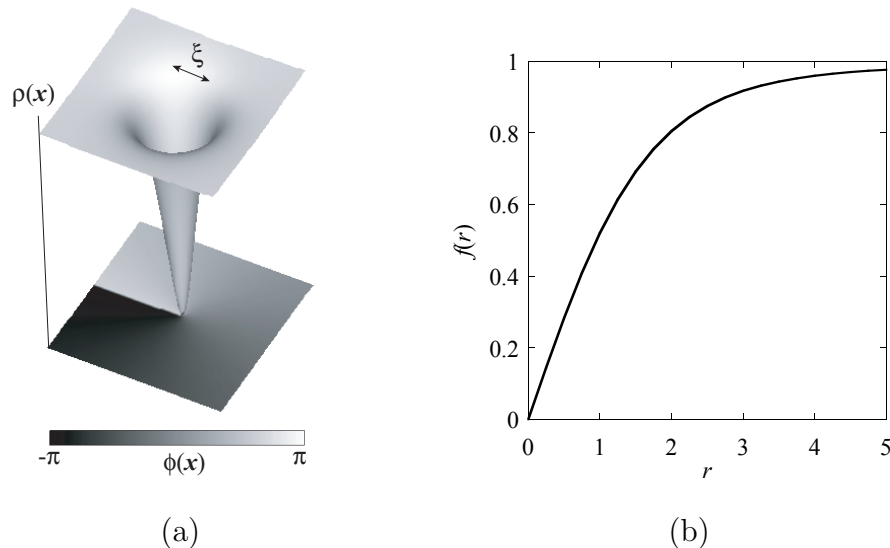


図 10.1: (a) : 量子渦のイメージ。図の上部は量子渦近傍の $\rho(x)$ を下部は $\phi(x)$ を表している。(b) : 式 (10.9) の渦芯近傍 ($r = 0$) での数値解。

次に、数値計算において式 (10.3) を扱うために方程式の無次元化を行う。無次元化は適当なスケール l とエネルギー $E_l = \hbar^2/2ml^2$ を導入し、 $x \rightarrow lx$ 、 $t \rightarrow \hbar t/E_l$ 、

$\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow \Phi(\mathbf{x})/l^{3/2}$ 、 $\mu \rightarrow E_l\mu$ 、 $g \rightarrow l^3 E_l g$ とすることによって行われ、無次元化されたグロス・ピタエフスキー方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (10.11)$$

となる。無次元化を行うことによって超流動速度場 $\mathbf{v} = 2\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ や循環量子 $\kappa = 4\pi$ 、回復長 $\xi = 1/\bar{f}\sqrt{g}$ も無次元化される。またグロス・ピタエフスキー方程式はハミルトニアン

$$H = \int d\mathbf{x} h = \int d\mathbf{x} \left[|\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - \mu|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{g}{2}|\Phi(\mathbf{x}, t)|^4 \right] \quad (10.12)$$

におけるハミルトン・ヤコビ方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H}{\delta \Phi^*(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial h}{\partial \Phi^*(\mathbf{x}, t)} - \nabla \cdot \frac{\partial h}{\partial \nabla \Phi^*(\mathbf{x}, t)} \quad (10.13)$$

から得ることもできる。ここで h はハミルトニアン密度である。このハミルトニアン H は $dH/dt = 0$ となり、エネルギーが粒子数同様に保存量であることを示している。

次にグロス・ピタエフスキー方程式 (10.11) における量子渦のダイナミクスを考察する。グロス・ピタエフスキー方程式を用いた渦のダイナミクスは Koplik 達や小川達によって調べられており、その幾つかを説明する [110, 111, 109]。グロス・ピタエフスキー方程式を $\Phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \exp[i\phi(\mathbf{x}, t)]$ より、 $f(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ を用いて表すと (マデルング変換)

$$f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t) \nabla \phi(\mathbf{x}, t)^2 - [gf(\mathbf{x}, t)^2 - \mu]f(\mathbf{x}, t) \quad (10.14)$$

が得られる。ここで ξ より大きなスケールを考え、渦芯近傍の $f(\mathbf{x}, t)$ の空間変化 $\nabla f(\mathbf{x}, t)$ を無視する。量子渦の渦度 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 2\nabla \times \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla v(\mathbf{x}, t)^2 = 0 \quad (10.15)$$

となり、量子渦のダイナミクスは超流動速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ のみに依存する。これは完全流体における孤立渦のダイナミクスや、相互摩擦力のないときの渦糸近似のダイナミクス (9.3) とよく似ているが、式 (10.15) で記述される運動以外に量子渦特有の2つの運動がある。1つが渦の再結合であり、もう1つが小さな渦輪の消滅である。実際に式 (10.6) を利用して $x-y$ 平面に垂直な渦と、 $z-x$ 平面に垂直な渦の2本を用意し、それを初期状態として式 (10.11) の時間発展を計算したものが図 (10.2) である。図中では渦の位置のみを表示しており、この方法については第

12章で説明する。2つの渦は接近し、局所的に反平行となって渦の再結合が起こる。この量子渦の再結合こそが、量子乱流中においてリチャードソンカスケードが起こる原因なのである。なぜなら量子渦は位相欠陥として安定に存在できるため、再結合を通してのみ量子渦の分裂や合体などが許されるからである。小川達は量子渦の再結合がケルビンの循環定理を抵触しないことと、再結合の際に回復長 ξ 以下の短波長圧縮性素励起が放出され、再結合が非可逆過程であることを示した。量子渦が複雑に絡み合った量子乱流中ではこのような短波長圧縮性素励起が、量子渦の再結合や、小さな渦輪の消滅によって急速に生成され、乱流のダイナミクスは瞬く間に短波長圧縮性素励起によって支配され、式(10.15)や、リチャードソンカスケードによる量子渦固有のダイナミクスは見えなくなる。なお、グロス・ピタエフスキー方程式ではこのような量子渦の再結合が自然に起こるのに対し、渦糸近似ではこのような再結合の過程を人工的に導入しなければならない。

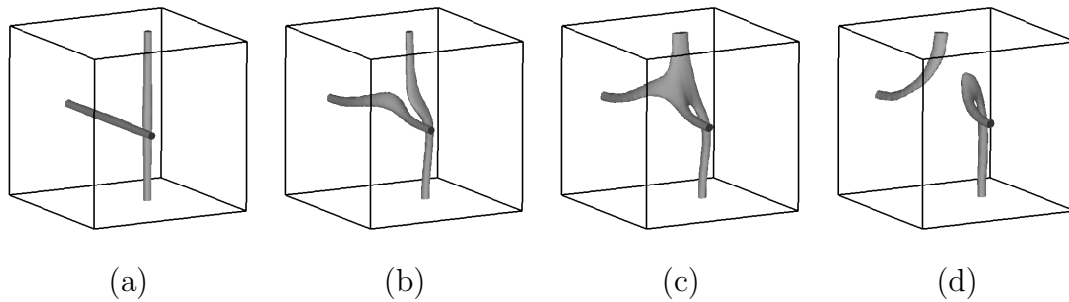


図 10.2: ねじれの位置にあった2本の量子渦の再結合。(a): 初期状態。(b): 2本の渦の結合直前。(c): 2本の渦の結合。(d): 渦がつなぎ変わった後、離れてゆく。(a)-(d)の過程は量子渦の再結合と呼ばれている。図中では渦の位置のみが表示されている。

10.2 小スケールに散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式

前節の最後で述べたような短波長圧縮性素励起に影響されない量子乱流の状態を得るために、短波長圧縮性素励起のみを散逸させる散逸項をグロス・ピタエフスキー方程式の中に導入する。巨視的波動関数 $\Phi(x, t)$ からなる系が粒子源と接触し、エネルギーや粒子をやりとりするような状況を考える。粒子源とはエネルギーの他に粒子の交換もするような熱浴のことであり、系の化学ポテンシャルを粒子源のものと等しくさせようとする環境であることを意味する。粒子源との相互作用

用は、式 (10.12) に虚部 $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ を導入することによって与えられる。

$$H = \int d\mathbf{x} \left[|\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 - \mu|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{g}{2}|\Phi(\mathbf{x}, t)|^4 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \quad (10.16)$$

ここから散逸系のグロス・ピタエフスキー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 + g|\Phi_\mu(\mathbf{x}, t)|^2 - i\Gamma(\mathbf{x}, t)]\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) \quad (10.17)$$

が得られる。ここでゲージ変換 $\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)\exp(-i\mu t)$ を用いた。 $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ の起源は粒子源の化学ポテンシャル μ_{pr} と系の化学ポテンシャルとの局所的な差 $\Gamma(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t)(\mu - \mu_{\text{pr}})$ によって生じる。ここで系が平衡状態に近く $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ が化学ポテンシャルの差に比例すると仮定した。さらに次のような近似を導入する。

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) &= \mu\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) + i\exp(-i\mu t)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) + t\frac{\partial\mu}{\partial t}\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) \\ &\simeq \mu\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (10.18)$$

これは系が平衡状態に近く、系の特徴的な時間変化 $i\partial\Phi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ で記述されるエネルギーや、化学ポテンシャルの時間変化 $t\partial\mu/\partial t$ で記述されるエネルギーに比べ、平衡状態において達成される化学ポテンシャル μ が支配的であることを意味する近似である。式 (10.18) と $\mu_{\text{pr}} \simeq \mu$ の近似を用いることにより、式 (10.17) は

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 + g|\Phi_\mu(\mathbf{x}, t)|^2 + i\mu\gamma(\mathbf{x}, t)]\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) \quad (10.19)$$

となる。再びゲージ変換 $\Phi_\mu(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)\exp(-i\mu t)$ を用いることで、散逸のあるグロス・ピタエフスキー方程式の最終的な形を得る [116]。

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)]\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (10.20)$$

式 (10.16) から分かるように、 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の導入はハミルトニアンを非エルミートにするため、エネルギー、粒子数ともに保存しなくなる。しかしながら乱流の流体力学的な性質を調べる際には、粒子数が保存していた方が都合が良い。よって化学ポテンシャルに時間依存性を導入することで、粒子数 $N = \int d\mathbf{x}|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$ を保存させるようにする。式 (10.18) より化学ポテンシャルは

$$\mu(t) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{x} \Phi^*(\mathbf{x}, t)[- \nabla^2 + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\Phi(\mathbf{x}, t). \quad (10.21)$$

となる。

次に先ほど議論した短波長圧縮性素励起を散逸させるような $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の形を考える。式 (10.20) のフーリエ変換は

$$[i - \gamma(\mathbf{k})] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu(t)] \Phi(\mathbf{k}, t) + \frac{g}{L^6} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi(\mathbf{k}_1, t) \Phi^*(\mathbf{k}_2, t) \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t) \quad (10.22)$$

となる。ここで $\Phi(\mathbf{k}, t)$ は $\Phi(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換であり、 L は系のサイズである。 $\gamma(\mathbf{k})$ は $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の波数表示であり、回復長 ξ よりも短いスケールを持つ短波長圧縮性素励起を散逸させるために

$$\gamma(\mathbf{k}) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi) \quad (10.23)$$

の形を与える。ここで θ は階段関数である。この散逸は、短波長圧縮性素励起のみが粒子源と相互作用するという考えに基づいている。回復長 ξ よりも大きなスケールでは散逸が存在しないので、リチャードソンカスケードといったような大きなスケールで起こる量子渦のダイナミクスを正しく扱うことができる。

次に式 (10.20) で得られる量子乱流のレイノルズ数について考える。マデルング変換を用いると式 (10.20) は $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の 1 次のオーダーまでで

$$f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) [2\nabla f(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t)] + \nabla^2 f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t) [\nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2 - [gf(\mathbf{x}, t)^2 - \mu(t)] f(\mathbf{x}, t) \quad (10.24)$$

となる。再び回復長 ξ よりも大きなスケールを考え $\nabla f(\mathbf{x}, t)$ と $\nabla \gamma(\mathbf{x}, t)$ を無視する。 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 2\nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ を用いると次のような、ナビエ・ストークス方程式 (8.1a) によく似た形を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)^2 = \gamma(\mathbf{x}, t) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] - 2\nabla [gf(\mathbf{x}, t)^2 - \mu(t)] \quad (10.25)$$

ナビエ・ストークス方程式との比較により、左辺第 2 項が慣性項に、右辺第 1 項が粘性項に相当し、 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ は古典流体の粘性のような働きをしていることが分かる。この比較により量子乱流のレイノルズ数は

$$R_{\text{QT}} = \frac{\bar{v}L}{\bar{\gamma}} \quad (10.26)$$

と見積もることができる。ここで \bar{v} は平均の超流動流速、 $\bar{\gamma}$ は $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の平均値である。系全体にわたって平均をとると $\bar{\gamma} \sim \gamma(\mathbf{k} = 0)$ となり、回復長 ξ よりも短いスケールで平均をとると $\bar{\gamma} \sim \gamma(|\mathbf{k}| > 2\pi/\xi) = \gamma_0$ となる。よってレイノルズ数 R_{QT}

は古典流体のものとは異なり、スケール依存性を持つ。 ξ よりも大きなスケールではレイノルズ数 R_{QT} は無限大となり、このスケールが古典乱流における慣性領域に相当すると考えられる。 ξ よりも小さなスケールでは、 R_{QT} は有限の値 $\bar{v}L/\gamma_0$ となる。

10.3 グロス・ピタエフスキー方程式の数値解法

グロス・ピタエフスキー方程式の数値計算には周期境界条件における擬スペクトル法を用いる [79, 117, 118]。この数値解法は他のグロス・ピタエフスキー方程式の数値解法であるクランク・ニコルソン法 [119] 等と比べて、非常に高精度で計算できる方法であるため、乱流の統計性といったような高い精度が要求される計算には非常に適している。まず $N_{\text{grid}} = 256^3$ の格子点を含む周期的な箱を考え、実空間における波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ を $\Phi[\mathbf{l}\Delta x, m\Delta t]$ に、波数空間における波動関数 $\Phi(\mathbf{k}, t)$ を $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, m\Delta t]$ に、化学ポテンシャル $\mu(t)$ を $\mu[m\Delta t]$ に、散逸項 $\gamma(\mathbf{k})$ を $\gamma[\mathbf{l}\Delta k]$ に差分化する。 $\Phi[\mathbf{l}\Delta x, m\Delta t]$ と $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, m\Delta t]$ はフーリエ変換

$$\Phi[\mathbf{l}\Delta x, m\Delta t] = \frac{1}{N_{\text{grid}}\Delta x^3} \sum_{\mathbf{l}'} \Phi[\mathbf{l}'\Delta k, m\Delta t] \exp[i(\mathbf{l}' \cdot \mathbf{l})\Delta k\Delta x] \quad (10.27)$$

によって関係づけられている。 m と $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ は整数であり、 $m \geq 0$ 、 $0 \leq l_x, l_y, l_z \leq 256$ を満たす。また Δx は空間メッシュ幅、 $\Delta k = 2\pi/L$ は波数メッシュ幅、 Δt は時間ステップ幅である。 $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, (m+1)\Delta t]$ を $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, m\Delta t]$ から求めるためには式 (10.22) の右辺を計算しなければいけないが、右辺第 2 項の計算には $O(N_{\text{grid}}^3)$ という非常に長い時間を要し、非効率である。そこで、代わりに $h(\mathbf{x}, t) = g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2\Phi(\mathbf{x}, t)$ とそのフーリエ変換 $h(\mathbf{k}, t)$ を計算する。グロス・ピタエフスキー方程式 (10.22) は

$$[i - \gamma(\mathbf{k})] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu(t)]\Phi(\mathbf{k}, t) + h(\mathbf{k}, t) \quad (10.28)$$

となる。 $h(\mathbf{k}, t)$ は $\Phi(\mathbf{x}, t)$ の汎関数であるため、次のステップ $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, (m+2)\Delta t]$ を $\Phi[\mathbf{l}\Delta k, (m+1)\Delta t]$ から求めるためには、逆フーリエ変換を用いて $\Phi[\mathbf{l}\Delta x, (m+1)\Delta t]$ を計算しなければならない。数値的なフーリエ変換に高速フーリエ変換 [120] を用いると、式 (10.22) の右辺第 2 項を扱うのに要する計算時間は $O(N_{\text{grid}}^3)$ から $O(N_{\text{grid}} \log N_{\text{grid}})$ へと激減する。また各ステップごとに波動関数は粒子数 N が保存するように規格化し直され、化学ポテンシャルが式 (10.21) を用いて計算される。

本研究で用いた数値計算のパラメーターは以下の通りである。相互作用の結合定数を $g = 1$ とする。空間メッシュ幅を $\Delta x = 0.125$ とし、よって系のサイズは

$L = 32$ である。ここで長さの単位は回復長 ξ でとることとする。波数のメッシュ幅は $\Delta k = 2\pi/L \simeq 0.196$ である。時間ステップ幅は $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ とし、式(10.28)における時間発展の計算にはRunge-Kutta-Verner法[117]を用いる。これは8段6次のRunge-Kutta法で高精度かつ広い安定領域を持つ。

計算のフローチャートは以下の通りである。

1. $\Phi[l\Delta x, m\Delta t]$ から $h[l\Delta x, m\Delta t]$ を計算する。
2. 高速フーリエ変換を用いて $h[l\Delta k, m\Delta t]$ を計算する。
3. Runge-Kutta-Verner法を用いて式(10.28)から $\Phi[l\Delta k, (m+1)\Delta t]$ を計算する。
4. 高速逆フーリエ変換を用いて $\Phi[l\Delta x, (m+1)\Delta t]$ を計算する。
5. 全粒子数 N' を計算し、 N が保存されるように

$$\Phi[l\Delta x, (m+1)\Delta t] \rightarrow \sqrt{\frac{N}{N'}} \Phi[l\Delta x, (m+1)\Delta t]$$

という規格化を行う。

6. $\mu[(m+1)\Delta t]$ を式(10.21)から計算する。

この計算法では $k > k_c = (2\pi/\Delta x, 2\pi/\Delta x, 2\pi/\Delta x)$ の波数領域を扱うことができない。高速フーリエ変換を用いると高波数成分 $\Phi(k > k_c, t)$ が低波数成分へと移る、いわゆるエリャジグエラーが生じる。エリャジグエラーは高波数成分から発生するので、高波数成分が無視できるくらいに十分高い波数までとっている場合はこのエラーによる影響は少ない。 $N_{\text{grid}} = 256^3$ という格子点数と $\Delta x = 0.125$ という空間メッシュ幅は、エリャジグエラーを無視するには十分である。この問題は第12章で詳しく解説する。

また、式(10.27)における高速フーリエ変換の代わりに高速コサイン変換

$$\begin{aligned} \Phi[l\Delta x, m\Delta t] &= \frac{8}{N_{\text{grid}}\Delta x^3} \sum_{l'} \Phi[l'\Delta k, m\Delta t] \\ &\times \cos[(l'_x l_x)\Delta k\Delta x/2] \cos[(l'_y l_y)\Delta k\Delta x/2] \cos[(l'_z l_z)\Delta k\Delta x/2] \quad (10.29) \end{aligned}$$

を用いれば、周期境界条件の代わりにノイマン境界条件での計算が可能となる。実際、図10.2における渦の再結合シミュレーションでは、渦の初期配置である図10.2(a)が周期境界条件を満たさないので、ノイマン境界条件でグロス・ピタエフスキー方程式の数値計算を行った。

第11章 1本の量子渦のダイナミクス

量子乱流のシミュレーションを行う前に、式 (10.20) で導入した散逸項の、1本の量子渦への影響を調べる。ここでは流れ場の中に量子渦が1本ある状況を考え、渦に働く散逸項による力 (drag force) を考える。ここで散逸項のスケール依存性をパラメータ s を用いて $\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi s/\xi)$ という形で導入する。 $s \gtrsim 1$ 、つまり散逸が回復長 ξ よりも短いスケールにのみ働く場合、渦は散逸項の影響を受けず、従って散逸項は短波長圧縮性素励起のみを散逸させ、 ξ より大きなスケールを持つ量子渦のダイナミクスには影響を与えないことを示す。

z 軸に沿って渦が1本ある場合のグロス・ピタエフスキー方程式の定常解は式 (10.6) によって与えられている。この解を初期状態とし、流れ場 v_e 下におけるグロス・ピタエフスキー方程式

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + i\mathbf{v}_e \cdot \nabla + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (11.1)$$

を考える。この方程式はグロス・ピタエフスキー方程式 (10.20) のガリレイ変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{v}_e t$ から容易に求まる。マデルング変換を用いると式 (11.1) は $\gamma^2(\mathbf{x}, t)$ のオーダーまでで

$$\frac{D}{Dt} f(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_e \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \gamma^2(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) \quad (11.2)$$

と求まる。ここで $D/Dt = \partial/\partial t - \mathbf{v}_e \cdot \nabla$ は \mathbf{v}_e とともに動く系での時間微分である (以後、本章ではこれを改めて $\partial/\partial t$ と書くことにする)。右辺第1項と第2項が散逸項 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ による量子渦への影響を表している。渦の進行方向は式 (11.2) の $\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial t$ によって記述され、図 11.1(a) にその概略を示す。渦は $f(\mathbf{x}, t)$ が増える側から減る側へと、つまり $\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial t$ の正の側から負の側へと運動する。図 11.1(b) と (c) はそれぞれ式 (11.2) の右辺第1項と第2項による渦の進行方向の概略である。細い矢印は \mathbf{v}_e の方向を、太い矢印は、図 11.1(b) では $\nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ を、図 11.1(c) では $-\nabla f(\mathbf{x}, t)$ の方向を示している。破線は、図 11.1(b) では $\mathbf{v}_e \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ の正負の境界を、図 11.1(c) では $-\mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t)$ の正負の境界を示している。図 11.1(b)、(c) から明らかのように右辺第1項は \mathbf{v}_e に垂直な drag force を、第2項は平行な drag force を与えていることが分かる。

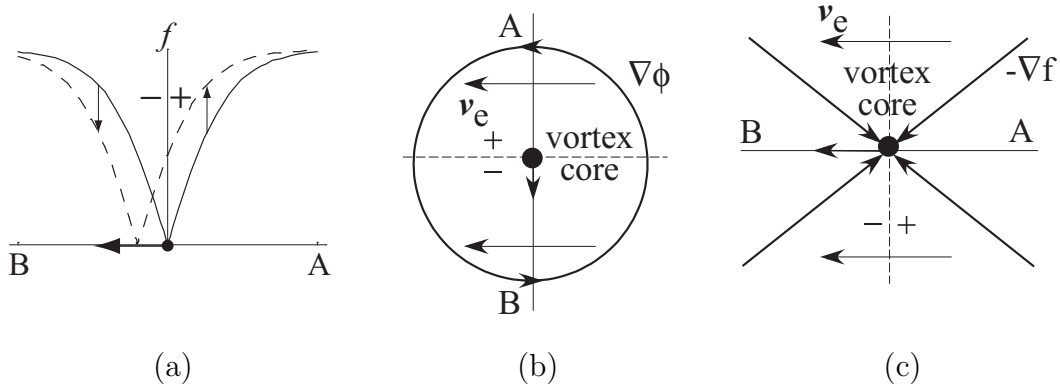


図 11.1: (a): 図 (b) と (c) における線 A-B を横切る $f(\mathbf{x}, t)$ (実線) と $f(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ (破線)。 (b): 式 (11.2) の右辺第 1 項によって引き起こされる渦の運動。 (c): 式 (11.2) の右辺第 2 項によって引き起こされる渦の運動。図 (b)、(c) における点は渦芯を、太い矢印は $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ (図 (b)) 及 $-\nabla f(\mathbf{x}, t)$ (図 (c)) の方向を、細い矢印は \mathbf{v}_e の方向を、A と B は $\mathbf{v}_e \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ (図 (b)) 及 $-\mathbf{v}_e \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t)$ (図 (c)) の正と負の領域をそれぞれ表す。

さらに式 (10.10) によると、渦芯近傍では $f(\mathbf{x}, t)$ が線形に立ち上がるので、その形を

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|}{\xi} \quad (11.3)$$

で近似する。ここで $\mathbf{x}_0(t)$ は渦芯の位置ベクトルである。これを式 (11.2) へ代入すると最終的に次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \gamma(\mathbf{x}, t) \mathbf{x}'_0(t) \times \mathbf{v}_e - \gamma^2(\mathbf{x}, t) \mathbf{x}'_0(t) \times [\mathbf{x}'_0(t) \times \mathbf{v}_e] \quad (11.4)$$

ここで $\mathbf{x}'_0(t)$ は $\mathbf{x}_0(t)$ の単位接線ベクトルである。これを式 (9.4) と比較すると $\alpha \rightarrow \gamma(\mathbf{x}, t)$ 、 $\alpha' \rightarrow \gamma^2(\mathbf{x}, t)$ に対応し、散逸項 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ が有限温度における渦と常流体との相互摩擦力として働いているように見え、 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ が渦を散逸させているかのように思える。しかし α 、 α' が定数なのに比べて、 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ はその波数表示が波数依存性を持つため、 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の相互摩擦力との対応は単純ではない。

これを踏まえて我々は式 (11.1) を $\mathbf{v}_e = (0.5, 0, 0)$ において数値的に解いた。 $\gamma(\mathbf{x}, t)$ の渦糸への影響は、散逸のある $\gamma_0 = 1$ と散逸のない $\gamma_0 = 0$ の 2 つの場合について解き、両者の渦の位置を比較することによって調べられる。ここでパラメータ s を $\gamma(\mathbf{k}) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi s/\xi)$ という形で導入することによって、散逸にスケール依存性を与える。初期状態として $x-y$ 平面の中心に位置し、 z 軸に平行な 1 本の渦を考えるが、これは $x-y$ 平面内において周期境界条件を満たさないため、 $x-y$ 方向に関してはノイマン境界条件を、 z 方向に関しては周期境界条件を用いる。こ

これは式 (10.27) のフーリエ変換の代わりに

$$\Phi[l\Delta x, m\Delta t] = \frac{4}{N_{\text{grid}}\Delta x^3} \sum_{\mathbf{l}'} \Phi[\mathbf{l}'\Delta k, m\Delta t] \\ \times \cos[(l'_x l_x)\Delta k\Delta x/2] \cos[(l'_y l_y)\Delta k\Delta x/2] \exp[i(l'_z l_z)\Delta k\Delta x/2] \quad (11.5)$$

を用いることによって可能となる。渦の位置は $x-y$ 平面内において、位相がその周囲で 2π だけずれている点を探すことによって求められる。 $\gamma_0 = 0$ の場合、渦は v_e に沿ってまっすぐ進むが、 $\gamma_0 = 1$ の場合は渦の進行が散逸による影響を受ける。渦の位置の違いを $\Delta x_v(t)$ 、 v_e に垂直な部分を $\Delta x_v^\perp(t)$ 、平行な部分を $\Delta x_v^\parallel(t)$ と定義する。図 11.2 は $t = 1$ における $\Delta x_v^\perp(t)$ 、 $\Delta x_v^\parallel(t)$ の s 依存性である。 $s \gtrsim 0.3$ において $\Delta x_v^\perp(t)$ 、 $\Delta x_v^\parallel(t)$ の両方とも無視できる位に小さく、 $s \lesssim 0.3$ において急速に増加する。この結果から、乱流のシミュレーションにおいて我々が用いる $s = 1$ の場合には散逸項が渦を散逸させないことは明らかである。

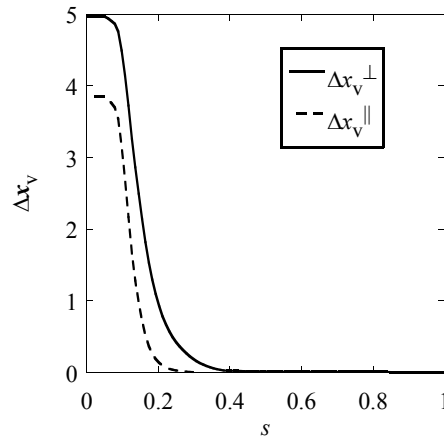


図 11.2: $t = 1$ における $\Delta x_v^\perp(t)$ 、 $\Delta x_v^\parallel(t)$ の s 依存性。

$s \lesssim 0.3$ では渦が散逸項によって影響されるようになり、これは $\gamma(x, t)$ が相互摩擦力として働いていることを示す。よってこれは有限温度のシミュレーションに対応する可能性がある。これについては第 14 章で議論する。

第12章 減衰乱流

本章ではランダムな位相から出発した減衰乱流のシミュレーションを行う。散逸項を導入することで、短波長圧縮性素励起が効果的に散逸され、減衰乱流の減衰過程において一時的に準定常状態となり、そのような状態において古典乱流の統計則であるコルモゴロフ則が得られることを示す。

12.1 初期状態

乱流状態を得るための初期状態として、波動関数の振幅 $f(\boldsymbol{x}, t = 0) = 1$ は一様で、位相 $\phi(\boldsymbol{x}, t = 0) = \phi_0(\boldsymbol{x})$ がランダムな状態から出発する。ランダムな位相 $\phi_0(\boldsymbol{x})$ は空間上に距離 $\lambda = 4$ ごとに $-\pi$ から π までの一様乱数を与え、それを3次元周期的双3次スプライン補間 [115, 121] を用いて滑らかにつなぐことで得られる (図 12.1)。ランダムな位相から得られる初期の超流動速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t = 0) = 2\nabla\phi_0(\boldsymbol{x})$ はランダムな大きさと方向を持ち、波動関数はすぐに多くの量子渦を生成して乱流状態となる。

12.2 数値計算の精度とエリアジングエラー

量子乱流のシミュレーションを行う前に、数値計算の精度と第10章 10.3 節で述べたエリアジングエラーについて調べておく。エリアジングエラーは波動関数の高波数成分から生じるので高波数成分が散逸されない $\gamma_0 = 0$ のときに最大となる。よってエリアジングエラーは $\gamma_0 = 0$ の場合のみ考えれば良い。エリアジングエラーは波数領域のより広い場合における数値計算を行い、それを元の数値計算と比較することによって見積もることができる。そのようなより広い波数領域は、より多くの格子点 $N_{\text{grid}} = 512^3$ ($\Delta x = 0.0625$) を用意することによって得られる。ここで我々は比較対象として全エネルギー $E(t)$ 、相互作用エネルギー $E_{\text{int}}(t)$ 、

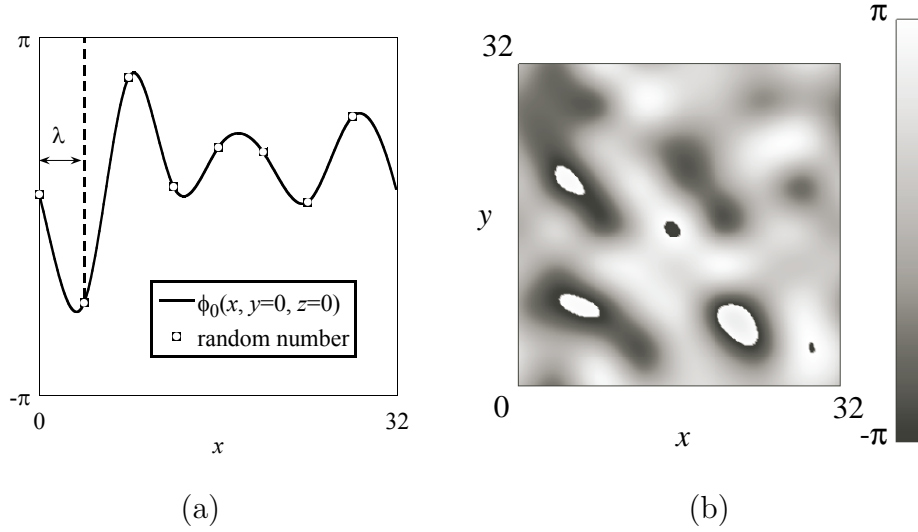


図 12.1: (a) : 1次元方向におけるランダムな位相の作成手順の例 ($\lambda = 4$)。ランダムな位相の断面 $\phi_0(x, y, 0)$ の例

量子エネルギー $E_q(t)$ 、運動エネルギー $E_{\text{kin}}(t)$ を選ぶ。それぞれ

$$E(t) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{x} \Phi^*(\mathbf{x}, t) \left[-\nabla^2 + \frac{g}{2} f(\mathbf{x}, t)^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (12.1a)$$

$$E_{\text{int}}(t) = \frac{g}{2N} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, t)^4 \quad (12.1b)$$

$$E_q(t) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{x} [\nabla f(\mathbf{x}, t)]^2 \quad (12.1c)$$

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{x} [f(\mathbf{x}, t) \nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2 \quad (12.1d)$$

で与えられる。エリアジングエラーの他に Runge-Kutta-Verner 法による時間発展の精度も確かめる。これはより小さな時間ステップ幅 $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ を与えることによって得られる。比較のために $t = 14$ における相対誤差 $F_{12}(A) = |(\langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2) / \langle A \rangle_1|$ 、 $F_{13}(A) = |(\langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_3) / \langle A \rangle_1|$ を定義する。ここで $A = E(t)$ 、 $E_{\text{int}}(t)$ 、 $E_q(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ である。 $\langle \rangle_1$ 、 $\langle \rangle_2$ 、 $\langle \rangle_3$ は

1. $\langle \rangle_1$: $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ 、 256^3 格子点。
2. $\langle \rangle_2$: $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ 、 256^3 格子点。
3. $\langle \rangle_3$: $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ 、 512^3 格子点。

における計算を意味する。表 12.1 は、前節のランダムな位相を初期状態として時間発展させたシミュレーションから得られた相対誤差の結果である。相対誤差は極端

に小さく、これはエリアジングエラーが非常に小さいことと、Runge-Kutta-Verner法で得られる時間発展の精度が極めて高いことを意味しており、我々が以後用いる $\langle \rangle_1$ の計算が十分な精度を持っていることを保証する。 $\langle \rangle_1$ において全エネルギー $E(t)$ は $[E(t=14) - E(0)]/E(0) = 10^{-10}$ のオーダーで保存しており、この結果も我々の計算が高精度であることを保証している。

	$F_{12}(A)$	$F_{13}(A)$
$A = E(t)$	2.5×10^{-12}	6.5×10^{-10}
$A = E_{\text{int}}(t)$	3.9×10^{-12}	9.0×10^{-10}
$A = E_{\text{q}}(t)$	2.6×10^{-12}	7.1×10^{-10}
$A = E_{\text{kin}}(t)$	5.2×10^{-12}	9.7×10^{-10}

表 12.1: F_{12} と F_{13} の $E(t)$ 、 $E_{\text{int}}(t)$ 、 $E_{\text{q}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 依存性。

12.3 減衰乱流のシミュレーション

さて、いよいよ $\gamma_0 = 1$ における減衰乱流のシミュレーションを行う。まずは散逸項 $\gamma(\boldsymbol{x}, t)$ の、短波長圧縮性素励起への影響を調べる。そのために運動エネルギー $E_{\text{kin}}(t)$ を圧縮性部分 $E_{\text{kin}}^c(t)$ と非圧縮性部分 $E_{\text{kin}}^i(t)$ に分ける。これは次のようにして求められる。

$$E_{\text{kin}}(t) = E_{\text{kin}}^c(t) + E_{\text{kin}}^i(t) \quad (12.2a)$$

$$E_{\text{kin}}^c(t) = \int d\boldsymbol{x} [\{f(\boldsymbol{x}, t)\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)\}^c]^2/N \quad (12.2b)$$

$$E_{\text{kin}}^i(t) = \int d\boldsymbol{x} [\{f(\boldsymbol{x}, t)\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)\}^i]^2/N \quad (12.2c)$$

圧縮性部分 $E_{\text{kin}}^c(t)$ は圧縮性素励起の運動エネルギー、非圧縮性部分 $E_{\text{kin}}^i(t)$ は渦の運動エネルギーを表している。ここで $\{\dots\}^c$ 、 $\{\dots\}^i$ はそれぞれ圧縮性部分 $\nabla \times \{\dots\}^c = 0$ 、非圧縮性部分 $\nabla \cdot \{\dots\}^i = 0$ を意味している。任意のベクトル場 $A(\boldsymbol{x})$ における圧縮性部分 $A^c(\boldsymbol{x})$ と非圧縮性部分 $A^i(\boldsymbol{x})$ は

$$A^c(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{k} \cdot A(\boldsymbol{k})}{k^2} \boldsymbol{k} \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) \quad (12.3a)$$

$$A^i(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) - A^c(\boldsymbol{x}) \quad (12.3b)$$

から数値的に求めることができる。ここで $A(\boldsymbol{k})$ は $A(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換である。図 12.2 は $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ の $\gamma_0 = 0$ (a)、 $\gamma_0 = 1$ (b) における時間変

化である。散逸がない ($\gamma_0 = 0$) ときには全エネルギー $E(t)$ が保存するものの、運動エネルギーの圧縮性部分 $E_{\text{kin}}^c(t)$ が増加し続ける。これは Nore 達によって得られた結果 [97, 98] とよく似ている (図 12.2(a))。一方散逸がある ($\gamma_0 = 1$) ときには $E_{\text{kin}}^c(t)$ が抑制され、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ が運動エネルギー $E_{\text{kin}}(t)$ の主要な部分となっている (図 12.2(b))。このことから散逸は渦には働かず、 ξ 以下のスケールにおける短波長圧縮性素励起のみを散逸させていることが分かる。 ξ より大きなスケールでは散逸が働かないので、 $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ の波数領域を量子乱流の慣性領域として定義できる。

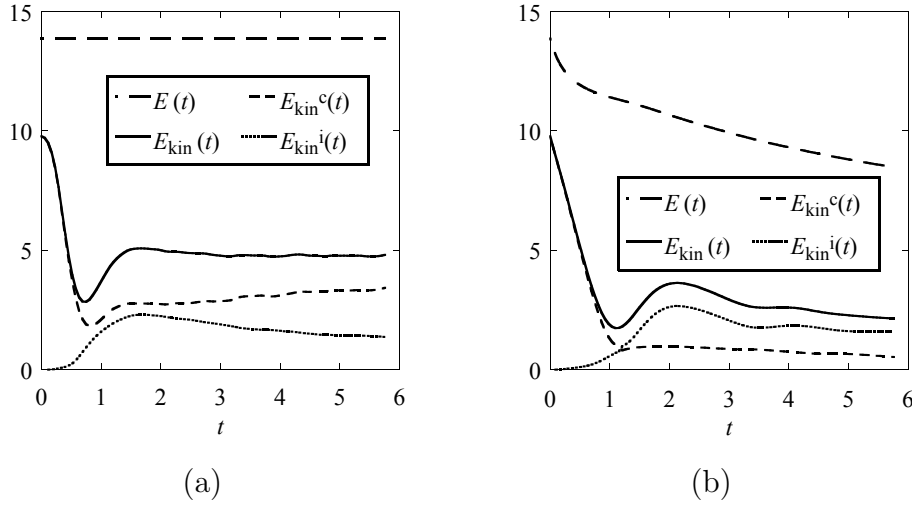


図 12.2: $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ の時間変化。(a) : $\gamma_0 = 0$ 。(b) : $\gamma_0 = 1$ 。

得られた量子乱流がコルモゴロフ則を示すのかどうかを調べるため、 $E_{\text{kin}}^i(t) = \int dk E_{\text{kin}}^i(k, t)$ で定義される非圧縮性運動エネルギーのスペクトル $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ を計算する。エネルギー Spektral は系が十分大きく、波数が連続的な場合は、解析的に

$$E_{\text{kin}}^i(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} E_{\text{kin}}^i(\mathbf{k}, t) = \int dk E_{\text{kin}}^i(k, t)$$

$$E_{\text{kin}}^i(k, t) = \frac{k^2}{2\pi^2} E_{\text{kin}}^i(|\mathbf{k}| = k, t) \quad (12.4)$$

から与えられるが、数値計算において波数が離散的な場合には

$$E_{\text{kin}}^i(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} E_{\text{kin}}^i(\mathbf{k}, t) = \sum_j \Delta k_j E_{\text{kin}}^i(k_j, t)$$

$$E_{\text{kin}}^i(k_j, t) = \frac{1}{V \Delta k_j} \sum_{|\mathbf{k}|=k_j} E_{\text{kin}}^i(\mathbf{k}, t) \quad (\Delta k_j = k_{j+1} - k_j) \quad (12.5)$$

から計算できる。時間発展の初期段階では $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ は波数のべき乗からは著しくずれるが、時間が経過し、乱流が発達すると $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ は波数のべき乗に近づいてゆく。慣性領域 $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ のみにおいて $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ が $k^{-\eta}$ に比例すると仮定し、各時刻におけるエネルギースペクトルの指数 η を両対数グラフの直線フィッティングによって求める。その結果、指数 η の時間依存性は図 12.3(a) のようになり、 $4 \lesssim t \lesssim 10$ においてエネルギースペクトルとコルモゴロフ則との一致 $E_{\text{kin}}^i(k, t) \propto k^{-5/3}$ は非常に良い。また、エネルギー散逸率 $\varepsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i(t)/\partial t$ を計算すると図 12.3(c) のようになり、 $\eta = 5/3$ を与える $4 \lesssim t \lesssim 10$ において ε もまたほぼ一定となる。これは $4 \lesssim t \lesssim 10$ において乱流が非常に発達することで準定常状態にあり、一定のエネルギースペクトル $\varepsilon^{2/3} k^{-\eta}$ を与えることを意味している。

散逸がない ($\gamma_0 = 0$) ときにはエネルギースペクトルとコルモゴロフ則の一致は非常に悪くなる。これは量子乱流において短波長圧縮性素励起を散逸させることが非常に重要であることを意味している。図 12.3(b) は $\gamma_0 = 0$ における η の時間発展であり、 η がコルモゴロフ則 $\eta = 5/3$ を与える時間は $4 \lesssim t \lesssim 7$ と短くなる。これは $t \gtrsim 7$ において量子渦のダイナミクスが短波長圧縮性素励起に強く影響されていることを意味する。これはエネルギー散逸率 ε の時間発展 (図 12.3(d)) から明らかである。図 12.3(c) と比較すると ε は $\gamma_0 = 1$ の場合に比べて小さく、また非定常的であり、負の値をとることもある。これは短波長圧縮性素励起のエネルギーが渦へと逆流していることを表しており、 $t \gtrsim 7$ においてエネルギースペクトルがコルモゴロフ則を満たさなくなる原因である。この結果は Nore 達によって得られたものとよく似ている (図 9.4(b) と比較)。

しかしながら図 12.3(a) から明らかなように短波長圧縮性素励起を散逸させた場合でも $t \gtrsim 10$ においてエネルギースペクトルとコルモゴロフ則との一致は悪くなる。これは次のような理由によるものである。 $4 \lesssim t \lesssim 10$ ではエネルギー散逸率はほとんど一定の値をとっており量子渦のリチャードソンカスケードが起きているが、 $t \gtrsim 10$ ではリチャードソンカスケードを起こすような大きな渦がなくなり、小さな渦のみが残って量子渦の再結合はほとんど起こらなくなる。したがってエネルギー散逸率は $4 \lesssim t \lesssim 10$ のときより小さくなる。この状態はもはや乱流状態ではなく、エネルギースペクトルはコルモゴロフ則 $\eta = 5/3$ と一致しなくなる。我々は次章でエネルギー注入を導入した定常乱流を実現することにより、この状態を回避する。

次に系が発達した定常乱流の状態であることを確かめるため、渦の可視化を試みる。グロス・ピタエフスキー方程式における渦は渦糸近似によるものとは異なり、直接に渦のダイナミクスを計算するのではないため、その可視化が困難である。しかし渦の可視化は次のような2つの方法によって可能となる。1つは渦芯が

理論上、無限大の渦度を持つことを利用し、系の渦度 $|\omega(x, t)|$ を計算して渦度の集中部分を探索する方法である。もう1つの方法はより直接的な方法で、位相がその周りで 2π だけずれている点を探索する方法である。簡単のため $x-y$ 平面に垂直な渦を考える。渦芯が点 (x, y, z) にあったとすると、 $x-y$ 平面内の周囲の4点 $(x + \Delta x, y, z)$ 、 $(x, y + \Delta x, z)$ 、 $(x - \Delta x, y, z)$ 、 $(x, y - \Delta x, z)$ において位相が 2π だけずれることになり、この点を探索すればよい。これを $y-z$ 平面、 $z-x$ 平面にも拡張することで全ての量子渦の点を探索することができる。この2つの方法は完全に等価であり、これは量子渦が古典流体における渦とは異なって一意的に求まる位相欠陥であることを表している。図 12.4(a) は乱流状態 ($t = 6$) に対する量子渦の可視化であり、渦のタングル状態が確認される。また図 12.4(b) は $t = 6$ に対するエネルギースペクトル $\varepsilon^{2/3} k^{-\eta}$ であり、コルモゴロフ則との一致は明瞭である。最終的に我々は準定常状態にある量子乱流が古典乱流と同じ統計則を与えることが結論づけられる。最後に慣性領域 $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ はおよそ $0.2 \lesssim k \lesssim 6.3$ であり、これは荒木達 [96] や Nore 達 [97, 98] のものより若干広いことを付け加えておく。

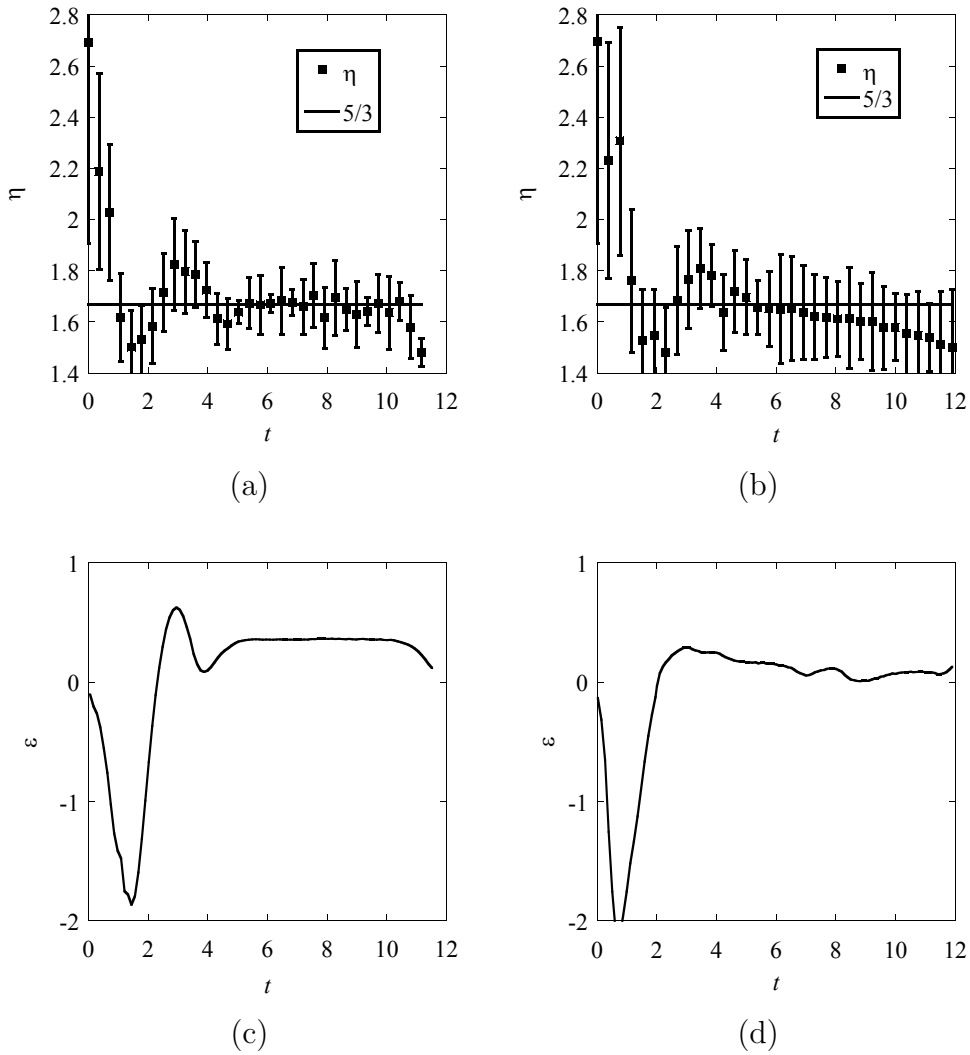


図 12.3: エネルギー Spektral の指数 η とエネルギー散逸率 ε の時間依存性。(a): $\gamma_0 = 1$ における η 。(b): $\gamma_0 = 0$ における η 。(c): $\gamma_0 = 1$ における ε 。(d): $\gamma_0 = 0$ における ε 。(a) と (b) における誤差棒はエネルギー Spektral の直線フィッティングを行ったときの標準偏差である。

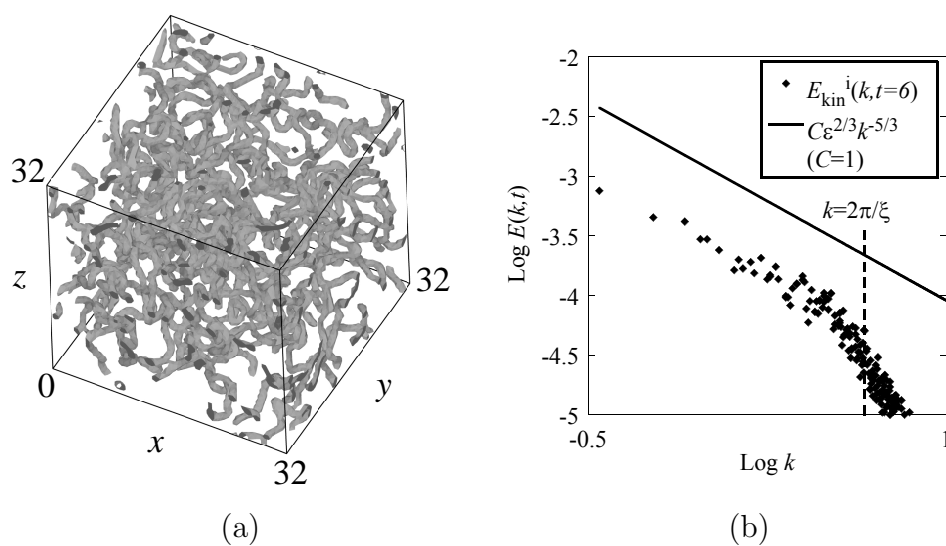


図 12.4: (a) : $t = 6$ における渦の可視化。(b) : $t = 6$ におけるエネルギースペクトル。20個の初期状態に対してアンサンブル平均をとっている。直線は式 (8.5) で与えられるコルモゴロフ則である。

第13章 定常乱流

本章ではグロス・ピタエフスキー方程式に時間依存ランダムポテンシャルによるエネルギー注入を導入し、定常乱流を実現する。このような定常乱流は古典乱流との、より明確な対応を与える。なぜならコルモゴロフ則は定常な古典乱流に対して成立する統計則であるからである。我々はこの定常乱流が量子乱流のエネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域の明確な定義を与えることを明らかにし、慣性領域において波数に依存しないエネルギー流束が存在することを発見した。最終的に我々は図 13.2 で示されるような、量子渦と短波長圧縮性素励起が展開するカスケードプロセスの全容を明らかにすることに成功した。

13.1 時間依存ランダムポテンシャルによるエネルギー注入

定常乱流を実現させるためには大きなスケールからエネルギーを注入しなければならず、これを行うために時間依存ランダムポテンシャル $U(\mathbf{x}, t)$ を次のように導入する。

$$[i - \gamma(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu(t) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + U(\mathbf{x}, t)]\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (13.1)$$

このグロス・ピタエフスキー方程式は式 (10.28) の $h(\mathbf{k}, t)$ を $h(\mathbf{x}, t) = [g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + U(\mathbf{x}, t)]\Phi(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換で置き換えることによって数値的に解くことができる。時間依存ランダムポテンシャル $U(\mathbf{x}, t)$ は前章の減衰乱流において、初期状態のランダムな位相 $\phi_0(\mathbf{x})$ を作る方法とほぼ同じ方法で作ることができる。つまり時空 (\mathbf{x}, t) 上に距離 X_0 、時間 T_0 ごとに 0 から V_0 間での一様乱数を与え、空間に対しては 3 次元周期的、時間に対しては自然な双スプライン補間 [115] を用いて滑らかにつなぐことで $U(\mathbf{x}, t)$ が与えられる。このとき時間依存ランダムポテンシャルは

$$\langle U(\mathbf{x}, t)U(\mathbf{x}', t') \rangle = V_0^2 \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2X_0^2} - \frac{(t - t')^2}{2T_0^2} \right] \quad (13.2)$$

のような相関を持つ。この時間依存ランダムポテンシャルは特徴的な空間スケール X_0 を持っており、 V_0 が十分強いときには、半径 X_0 の渦輪を生成する。従ってエネルギー保有領域と慣性領域の境界を $2\pi/X_0$ とすることができる。慣性領域とエネルギー散逸領域との境界は前章の減衰乱流の時と同様、 $2\pi/\xi$ とすることができるので、この定常乱流は $k < 2\pi/X_0$ のエネルギー保有領域、 $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$ の慣性領域、 $2\pi/\xi < k$ のエネルギー散逸領域を持っていることが明らかになる。

数値計算のパラメーターとして $V_0 = 50$ 、 $X_0 = 4$ 、 $T_0 = 6.4 \times 10^{-2}$ を与え、一様な状態 $\Phi(\mathbf{x}, t=0) = f_0 = 1$ から出発して、式 (13.1) を数値的に解く。図 13.1 は $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ の時間発展である。どちらの図からも運動エネルギーの非圧縮成分 $E_{\text{kin}}^i(t)$ が全運動エネルギー $E_{\text{kin}}(t)$ の中で支配的なことが分かる。これは時間依存ランダムポテンシャルが圧縮性の音波よりもむしろ、渦を生成していることを意味している。また図 13.1(b) から明らかなように、全てのエネルギーが $t \gtrsim 25$ においてほとんど一定となり、よって $t \simeq 25$ から後を定常乱流の状態として扱う。渦の分布は、減衰乱流における図 12.4(a) のものとよく似ており、量子渦のタンゲル状態が観測される。

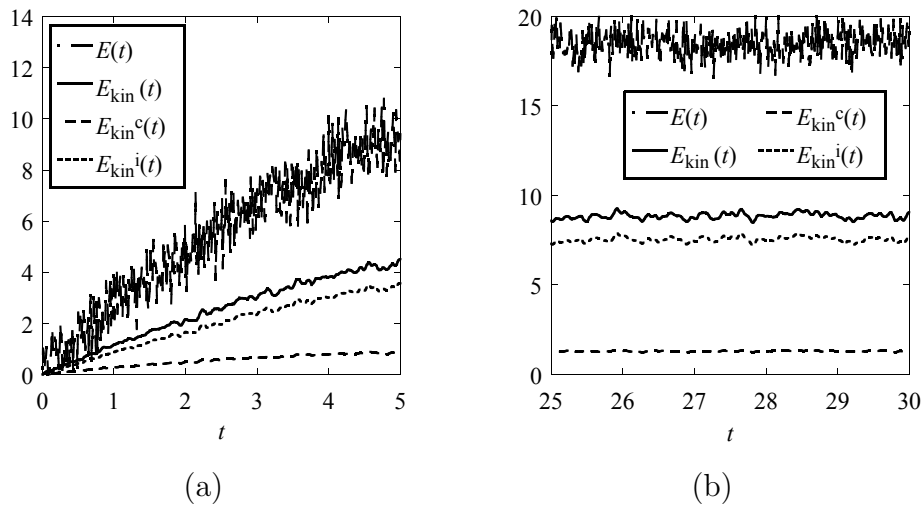


図 13.1: $E(t)$ 、 $E_{\text{kin}}(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^c(t)$ 、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ の時間発展。(a) : 初期過程 $0 \leq t \leq 5$ 。(b) : 定常過程 $25 \leq t \leq 30$ 。

13.2 定常乱流の慣性領域

この定常乱流は時間依存ランダムポテンシャルによるエネルギー注入と、散逸項によるエネルギー散逸との釣り合いによって引き起こされており、量子渦の定

常的な分布が実現されている。定常乱流における波数空間中のエネルギーの流れは図 13.2 のようになると考えられる。ここで図の上部は渦のエネルギー $E_{\text{kin}}^i(t)$ 、下部は圧縮性素励起のエネルギー $E_{\text{kin}}^c(t)$ に関するものである。この図は以下のようなシナリオである。エネルギー保有領域 $k < 2\pi/X_0$ では、時間依存ランダムポテンシャル $U(x, t)$ によって系に非圧縮性のエネルギーが注入され、大きな渦が生成される。慣性領域 $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$ においてリチャードソンカスケードにより渦が分裂し、エネルギーが小さな k から大きな k へと流れてゆく。エネルギー散逸領域 $2\pi/\xi < k$ では、非圧縮性の運動エネルギーが渦の再結合や小さな渦輪の消滅により圧縮性の運動エネルギーへと転化し、最終的に散逸項 $\gamma(x, t)$ によって散逸する。時間依存ランダムポテンシャル $U(x, t)$ はまた長波長の音波を生成し、量子渦との相互作用を生み出す可能性がある。しかしそのような相互作用は弱い。なぜなら図 13.1 が示すように、 $E_{\text{kin}}^i(t)$ は $E_{\text{kin}}^c(t)$ に比べて圧倒的に大きいためである。また長波長の音波と ξ のスケールを持つ渦芯との散乱断面積は小さいと考えられ、よって渦と音波との相互作用は弱い。

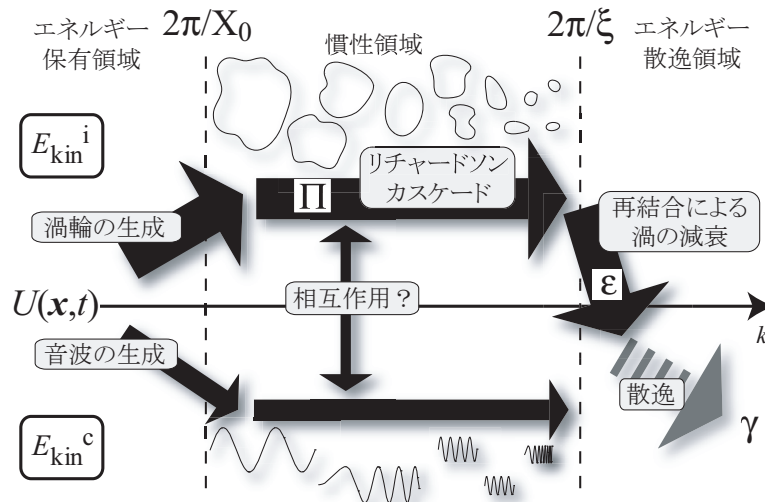


図 13.2: 非圧縮性運動エネルギー $E_{\text{kin}}^i(t)$ (図の上部) と圧縮性運動エネルギー $E_{\text{kin}}^c(t)$ (図の下部) の波数空間上での流れ。

本研究とは直接関係しないが、この音波による乱流状態の存在が近年、幾つかのグループによって指摘されている [122, 123]。このような乱流は波動乱流と呼ばれており、例えばこの系では時間依存ランダムポテンシャルの強度が、渦を生成できないほど弱いときに実現されると考えられる。波動乱流中において音波の自

己相似性やカスケード過程などが発見されており、非常に興味深い。

図 13.2 で示されるようなシナリオを確認するため図中に表示される $E_{\text{kin}}^i(t)$ の散逸率 ε と、慣性領域中のリチャードソンカスケードによるエネルギー流束 $\Pi(k, t)$ を計算する。定常乱流におけるエネルギー散逸率 ε は時間依存ランダムポテンシャルを切った後の $\varepsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i(t)/\partial t$ で与えられる。なぜなら非圧縮性運動エネルギー E_{kin}^i はもはや圧縮性運動エネルギーへと転化するプロセスしか残っていないからである。Figure 13.3(a) は定常乱流の状態から時間依存ランダムポテンシャルを切った後の $E_{\text{kin}}^i(t)$ の時間変化である。切った初期の段階では $E_{\text{kin}}^i(t)$ は時間に対して線形に小さくなり、 $\varepsilon \simeq 12.5 \pm 2.3$ が得られる。一方慣性領域における非圧縮性運動エネルギーのエネルギー流束 $\Pi(k, t)$ は古典乱流と類似のエネルギー収支方程式を用いて計算される。この方程式を導出するために、式 (10.24) を考え、ここに時間依存ランダムポテンシャルを含める。

$$f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) [2\nabla f(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t)] + \nabla^2 f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t) [\nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2 - [gf(\mathbf{x}, t)^2 - \mu(t) + U(\mathbf{x}, t)] f(\mathbf{x}, t) \quad (13.3)$$

再び ξ よりも大きなスケールにおいて $\nabla f(\mathbf{x}, t)$ と $\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial t$ を無視する。新しい変数として $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ を導入すればこの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (13.4)$$

となる。ここで $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\nabla [gf(\mathbf{x}, t)^2 - \mu(t) + U(\mathbf{x}, t)] f(\mathbf{x}, t)$ である。つぎに任意の関数 $A(\mathbf{x})$ に対するローパスフィルタとハイパスフィルタ

$$A_k^<(\mathbf{x}) = \sum_{q \leq k} \tilde{A}(\mathbf{q}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}] \quad (13.5a)$$

$$A_k^>(\mathbf{x}) = \sum_{q > k} \tilde{A}(\mathbf{q}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}] \quad (13.5b)$$

を導入し、ローパスフィルタの演算子 $L_k : A(\mathbf{x}) \rightarrow A_k^<(\mathbf{x})$ を定義する。式 (13.4) に L_k を作用させ、 $\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t)$ とのスカラー積を取ることでより次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t)]^2 + \mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot L_k[\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \\ & = \gamma(\mathbf{x}, t) \mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla [\nabla \cdot \mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{F}_k^<(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (13.6)$$

式 (13.6) から非圧縮成分を抜き出し、空間積分を行うことでエネルギー収支方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(k, t) + \Pi(k, t) = -\Omega(k, t) + \mathcal{F}(k, t) \quad (13.7)$$

ここで $\mathcal{E}(k, t)$ は 0 から k までの累積非圧縮性運動エネルギーとなる。

$$\mathcal{E}(k, t) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{x} [\{\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t)\}^i]^2 \quad (13.8)$$

$\Omega(k, t)$ は累積エネルギー散逸

$$\Omega(k, t) = -\frac{2}{N} \int d\mathbf{x} \gamma(\mathbf{x}, t) \{\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla[\nabla \cdot \mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t)]\}^i \quad (13.9)$$

であり、 $\mathcal{F}(k, t)$ は累積エネルギー注入

$$\mathcal{F}(k, t) = \frac{2}{N} \int d\mathbf{x} \{\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot F_k^<(\mathbf{x}, t)\}^i \quad (13.10)$$

として定義される。最終的に波数 k における非圧縮性運動エネルギーのエネルギー流束は

$$\Pi(k, t) = \frac{2}{N} \int d\mathbf{x} \left[\{\mathbf{p}_k^<(\mathbf{x}, t) \cdot L_k[\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]\}^i \right] \quad (13.11)$$

で与えられる。エネルギー収支方程式 (13.7) は、スケール k における非圧縮性運動エネルギーの時間変化が、エネルギー注入 $\mathcal{F}(k, t)$ 、エネルギー散逸 $-\Omega(k, t)$ 、エネルギー流束 $-\Pi(k, t)$ の和に等しいということを表している。図 13.3(b) は計算されたエネルギー流束 $\Pi(k, t)$ の k 依存性であり、慣性領域においてほぼ一定の値 $\Pi(k, t) \simeq 11 \pm 1$ となる。この値は図 13.3(a) において得られたエネルギー散逸率 ε とも近く、この結果から非圧縮性運動エネルギーは波数空間において一定の割合 Π で大きな k へと流れ、最終的に散逸率 $\varepsilon \simeq \Pi$ で圧縮性素励起へと散逸するという描像を確かなものにする。この描像はまた図 13.2 で与えられているものと一致する。エネルギー流束 Π はエネルギー散逸率 ε より若干小さいが、これは量子渦と音波との弱い相互作用が原因の 1 つであると考えられる。

量子乱流の描像を完成させるため、定常乱流におけるエネルギースペクトル $E_{\text{kin}}^i(k)$ を計算する。図 13.4(a) がその結果である。減衰乱流の場合と同様、エネルギースペクトルは慣性領域 $2\pi/X_0 < k < 2\pi/\xi$ 、つまり $0.79 \lesssim k \lesssim 6.3$ においてコルモゴロフ則と良く一致している。ただし慣性領域はエネルギー保有領域の存在のために、減衰乱流のときより狭くなっている。また定常乱流における渦輪のサイズ分布 $n(l)$ を計算したのが図 13.4(b) である。 $n(l)$ は長さが l と $l+1$ の間にある渦輪の個数である。サイズ分布の計算は複雑を極めるので詳細は省くが、大きい渦よりも小さい渦の方が圧倒的に多く、また回復長よりも小さい渦輪は全く存在しない。またここには $n(l) \sim l^{-3/2}$ というべき乗がわずかながらに見えている。この渦輪のべき乗とコルモゴロフ則との関係は今のところ不明である [96, 124]。

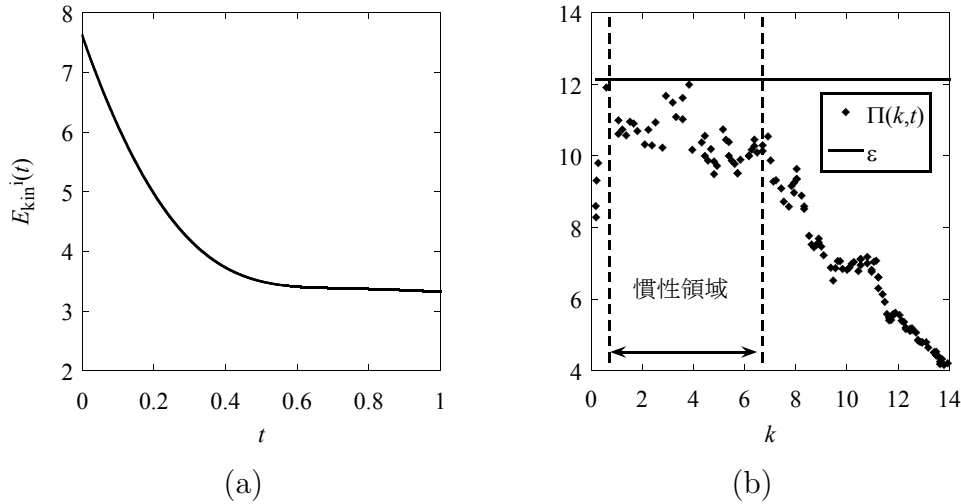


図 13.3: (a): 定常乱流において時間依存ランダムポテンシャルを切った後の $E_{\text{kin}}^i(t)$ の時間変化。(b): $\Pi(k,t)$ の k 依存性。 $\Pi(k,t)$ は $t > 25$ における任意の 50 個のサンプルにおいて計算し、アンサンブル平均をとっている。実線は図 (a) から求められたエネルギー散逸率 ε である。

今までコルモゴロフ則 (8.5) におけるコルモゴロフ定数 C については何も触れてこなかったが、本研究では減衰乱流において $C = 0.32 \pm 0.1$ 、定常乱流において $C = 0.55 \pm 0.07$ が得られている。また荒木達は渦糸近似におけるエネルギースペクトル (図 9.4) から $C = 0.7$ を報告している [96]。これらの値は古典乱流で観測される値 [79] $1.4 \lesssim C \lesssim 1.8$ よりも明らかに小さく、この小さなコルモゴロフ定数は量子乱流に特有のものであるのかも知れない。これを明らかにすることが我々の課題の 1 つである。

13.3 実験における量子乱流の観測

本章の最後に、実験における観測の可能性を議論する。超流動乱流や量子乱流は、超流動液体 ^4He でのみ実現されているが、グロス・ピタエフスキー方程式は粒子間相互作用に関して弱結合近似を行っているため、実験との定量的な比較は不可能である。そこで我々はグロス・ピタエフスキー方程式によって非常に良く記述される、トラップ中の原子気体ボース・アインシュタイン凝縮における量子乱流を提唱する。この系の詳細は [17] を参照していただくとするが、磁気トラップ中に ^{87}Rb 、 ^{23}Na 、 ^7Li といったボース粒子を閉じこめ、レーザー冷却と蒸発冷却を行うことによってボース・アインシュタイン凝縮が実現されている系であり、

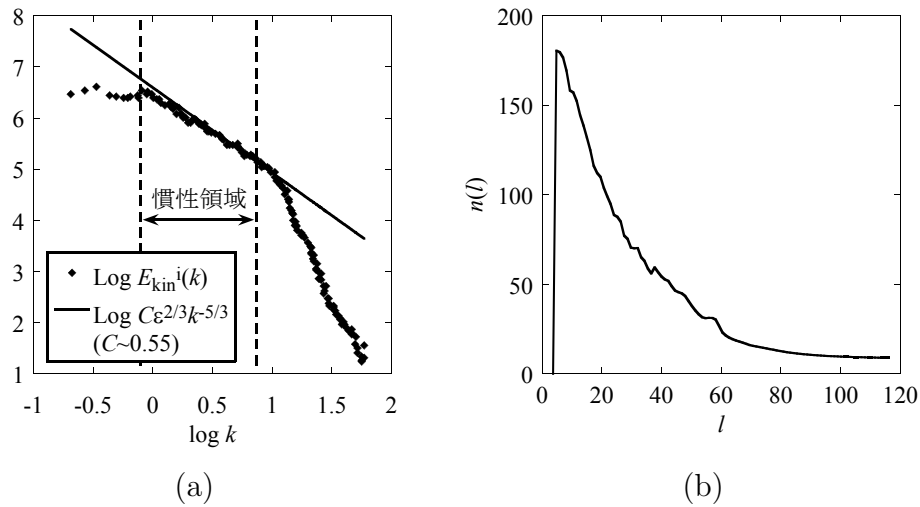


図 13.4: 定常乱流におけるエネルギースペクトル $E_{\text{kin}}^i(k, t)$ (a) と渦輪のサイズ分布 $n(l)$ (b)。両方とも $t > 25$ における任意の 50 個のサンプルにおいて計算し、アンサンプル平均をとっている。(a) において実線はコルモゴロフ則 $C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ である。

液体 ^4He とは異なって非常に希薄な系である。近年、この系にレーザーを注入することにより周期ポテンシャルを [43]、そしてレーザーを拡散ガラス（磨りガラス）に通すことによって図 13.5 のようなランダムポテンシャルを作ることに成功している [125, 126, 127, 128]。例えばレーザーを振動させる等によって、このようなランダムポテンシャルを動かすことができれば、我々が前節までで用いた時間依存ランダムポテンシャルに相当し、定常乱流を作り出すことができるであろう。この系は巨視的量子現象に関わる様々な現象を容易に可視化できる点が特徴であり、もし定常乱流の作成に成功すれば、エネルギースペクトルの直接の観測、そして我々の計算との定量的な比較が可能になるかもしれない。

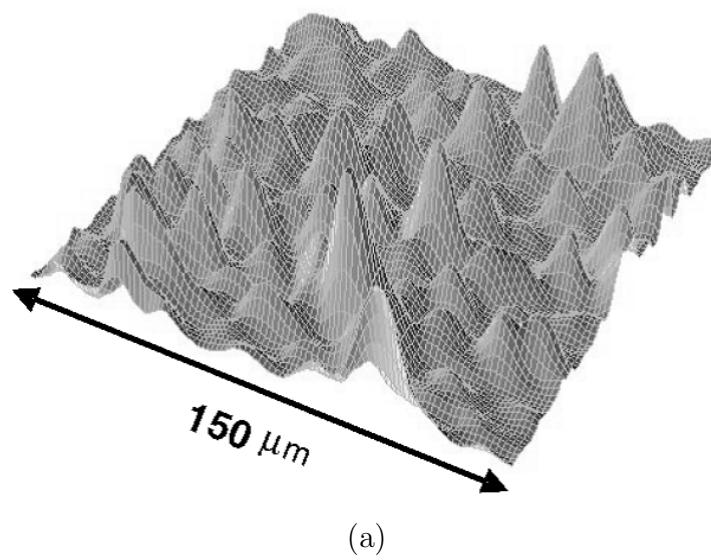


図 13.5: レーザーによって作られたランダムポテンシャルの例。文献 [125] より。

第14章 有限温度における量子渦のダイナミクス

第11章において、我々の導入した散逸項が、式(9.4)と式(11.4)で示されるように、常流体と量子渦との相互摩擦力と非常に良く似た形を持つものの、散逸項は波数依存性を持つため、相互摩擦力と違って量子渦に影響しないことを述べた。また、散逸が有効となるスケールを大きくすることで有限温度のシミュレーションが可能になるかも知れないことを説明した。しかしながらこの散逸項の波数依存性は我々が強制的に決めており、現実の系において、散逸構造がどのような形をしているのかは明らかではない。そこで本章ではもう1度散逸のないグロス・ピタエフスキー方程式に戻り、そこに揺らぎを導入することによって、揺らぎと結合したグロス・ピタエフスキー方程式を導出することを試み、量子渦に対する散逸の自然な導入を行う。

もう1度、3次元ボース流体のハミルトニアンである式(10.1)から出発し、場の演算子 $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ の時間発展である式(10.2)を考える。グロス・ピタエフスキー方程式を導く際にはBogoliubovの式(4.14)において揺らぎ $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ を無視したが、今度はこれを

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) + \hat{\zeta}(\mathbf{x}, t) & (14.1) \\ \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) &= O(1) \\ \hat{\zeta}(\mathbf{x}, t) &= O(1/\sqrt{N_0})\end{aligned}$$

と分割し、 $\hat{\zeta}(\mathbf{x}, t)$ のみを無視する(N_0 は凝縮体の粒子数であり、当然だが $\Phi(\mathbf{x}, t) = O(\sqrt{N_0})$ である)。これは高次の揺らぎのみを無視することに相当し、 N_0 が小さくなるような高温領域では使えない。式(14.1)を式(10.2)に代入し、無次元化を行えば次式となる(ここでも外場 $U(\mathbf{x})$ は考えない)。

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) &= [-\nabla^2 - \mu + g\{|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + 2\langle\hat{\chi}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\chi}(\mathbf{x}, t)\rangle\}]\Phi(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + g\langle\hat{\chi}(\mathbf{x}, t)\hat{\chi}(\mathbf{x}, t)\rangle\Phi^*(\mathbf{x}, t) & (14.2)\end{aligned}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\chi}(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]\hat{\chi}(\mathbf{x}, t) + g\Phi^2(\mathbf{x}, t)\hat{\chi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \quad (14.3)$$

ここで $\langle \rangle$ は統計平均である。第 1 式は拡張されたグロス・ピタエフスキー方程式であり、第 2 式は揺らぎの時間発展を表すボゴリューボフ方程式と呼ばれている [129, 130]。グロス・ピタエフスキー方程式の最後の項は、 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ に対するハミルトニアンを非エルミートにするため、凝縮体の全粒子数やエネルギーを保存させない。例えば凝縮体密度を $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、超流動速度場を $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ としたときに連続方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 2g \operatorname{Im}[\langle \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \rangle \Phi^*(\mathbf{x}, t)] \quad (14.4)$$

となり、凝縮体粒子が揺らぎへと転化していることが示される。式 (14.2) を式 (10.17)、式 (10.20) と比較することで、

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{Im} \left[g \frac{\langle \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) \rangle \Phi^*(\mathbf{x}, t)}{\Phi(\mathbf{x}, t)} \right] \quad (14.5)$$

が得られるが、この表式こそが揺らぎとの相互作用によって与えられる凝縮体の散逸構造の自然な形式である。

次にボゴリューボフ方程式を解くために、もう少し解析を進める。ボゴリューボフ方程式をボゴリューボフ変換

$$\hat{\chi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger] \quad (14.6)$$

を用いて対角化する。ここで $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ は相互作用がない $g = 0$ のときの固有関数であり、 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ は状態 \mathbf{k} における消滅演算子である。 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ 、 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger$ は準粒子ボゴロンの生成消滅演算子、 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ 、 $v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ はボゴリューボフ変換の係数である。ボゴリューボフ変換は凝縮体の揺らぎをボゴロンを用いて記述する正準変換である。さらにボゴロンは温度 T の熱浴と結合し、局所的な熱平衡状態にあることを仮定する。

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp[E_{\mathbf{k}}/T] - 1} \quad (14.7)$$

これは凝縮体の波動関数に音波や量子渦といったような励起構造が現れたとき、そのエネルギーがボゴロンの系へと散逸し、最終的にボゴロンと結合している熱浴へと散逸することを意味する (図 14.1)。対角化されたボゴリューボフ方程式は最

最終的に次のような一連の式となる

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + g\{|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 + 2n_e(\mathbf{x}, t)\}]\Phi(\mathbf{x}, t) + gm_e(\mathbf{x}, t)\Phi^*(\mathbf{x}, t) \quad (14.8a)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = [-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) - g\Phi^2(\mathbf{x}, t)v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \quad (14.8b)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = -[-\nabla^2 - \mu + 2g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2]v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + g\Phi^{*2}(\mathbf{x}, t)u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \quad (14.8c)$$

$$n_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} [|u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)|^2 N_{\mathbf{k}} + |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)|^2 (N_{\mathbf{k}} + 1)] \quad (14.8d)$$

$$m_e(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)(2N_{\mathbf{k}} + 1)] \quad (14.8e)$$

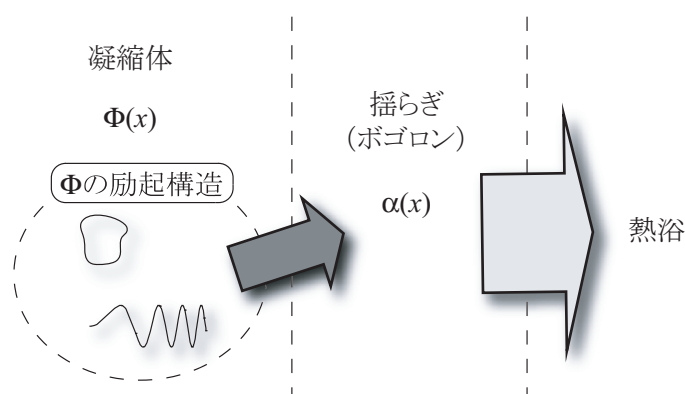


図 14.1: ボゴリューボフ方程式におけるエネルギーの流れ。

この方程式をパラメーター $N_{\text{grid}} = 16^3$ 、 $g = 1$ 、 $\Delta x = 0.25$ 、 $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ を用いて数値的に解くことを試みる。初期状態として、凝縮体の波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は前章で用いた時間依存ランダムポテンシャル中のグロス・ピタエフスキー方程式 (13.1) を用いて渦が少し発生した状態を用いる。 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, 0)$ 、 $v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, 0)$ 、 μ 、 $E_{\mathbf{k}}$ に関

しては一様なときの式 (14.8) の定常解

$$\mu = g[\tilde{f}^2 + 2n_e(0)] \quad (14.9a)$$

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{\frac{1}{2V} \frac{k^2 + g\tilde{f}^2}{E}} + 1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (14.9b)$$

$$v_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{\frac{1}{2V} \frac{k_j^2 + g\tilde{f}^2}{E}} - 1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (14.9c)$$

$$E_{\mathbf{k}} = k \sqrt{k + 2g\tilde{f}^2} \quad (14.9d)$$

$$(14.9e)$$

を用いる。今回は凝縮体の粒子数が保存しないのは自然であるので、 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ の規格化は行わずに化学ポテンシャル μ は一定のままである。初期状態からしばらく時間発展させ、式 (14.5) から $\gamma(\mathbf{x}, t)$ を求め、フーリエ変換を用いて散逸の波数依存性を計算した結果が図 14.2(a) である。ここで T_c は一様かつ $g = 0$ のときのボース・アインシュタイン凝縮の転移温度である。図から明らかなように、温度が低いときには低波数の領域に散逸が存在せず、温度 $T = 0.01T_c$ のときの散逸構造の形は式 (10.23) と良く合っている。つまり温度が低いときには渦は揺らぎによっては散逸されず、渦との再結合を通して発生した短波長圧縮性素励起のみが散逸されていることを表している。また温度が高いときには低波数の領域にも散逸が存在し、渦が散逸されていることが分かる。これは $\gamma(\mathbf{x}, t)$ が高温において相互摩擦力に相当していることを表している。また渦が全くなく、音波のみが存在する場合において同様の計算を行ったところ、図 14.2(b) のような結果が得られた。図 14.2(a) に比べ、散逸は極端に小さいことが分かる。

本研究はまだ途中の状態であり、例えば式 (9.4) で示される相互摩擦力の係数 α 、 α' との関係や、有限温度における超流動乱流の計算など課題は多く残っている。

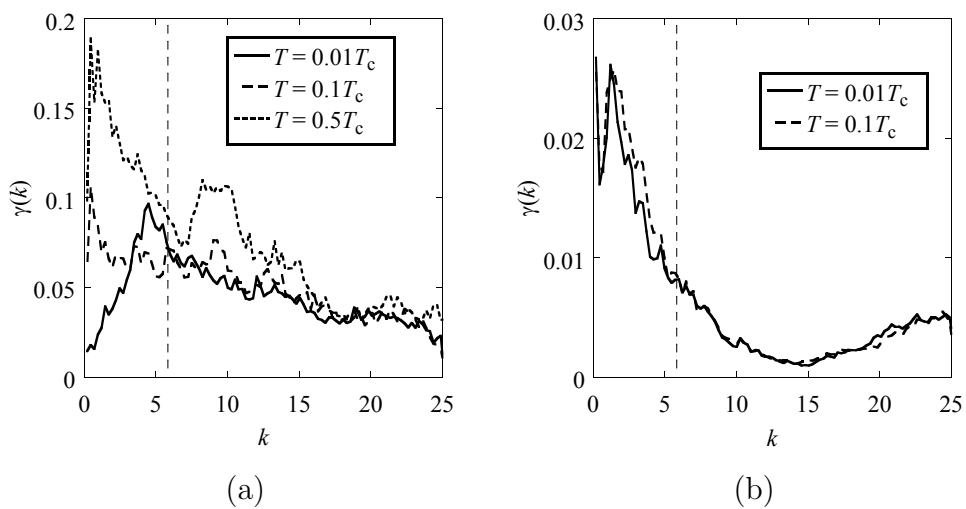


図 14.2: $t = 0.5$ における $\gamma(k)$ の波数依存性。(a) : 平均 3 本の量子渦があるとき。(b) : 渦が全くないとき。図中の破線は回復長に相当する波数 $2\pi/\xi$ である。

第15章 結論

第II部では流体力学最大の問題である乱流について注目し、明確に定義される量子渦を構成要素とする量子乱流が乱流を要素還元的に理解するための理想的なプロトタイプであると考えた、これを確かめるために、量子流体を記述するグロス・ピタエフスキー方程式を用いて量子乱流の数値シミュレーションを行い、古典乱流の統計則と比較するというを行った。しかしグロス・ピタエフスキー方程式は圧縮性流体の方程式であり、乱流のダイナミクスは短波長圧縮性素励起による影響を著しく受ける。これを克服するために、渦芯のサイズである回復長よりも短いスケールにのみ働く散逸項を導入し、乱流のシミュレーションを行った。以下に本研究で行った結果および今後の課題を述べる。

まず1本の渦のダイナミクスを調べることにより、我々の導入した散逸項が量子渦のダイナミクスには影響しないことを明らかにし、短波長圧縮性素励起に影響されない量子乱流をつくることを示した。

次にランダムな位相から出発した減衰乱流のシミュレーションを行った。ここでも散逸項が渦を散逸させず、さらに短波長圧縮性素励起を効果的に散逸させていることを明らかにした。そして渦によって担われる非圧縮性運動エネルギーのエネルギースペクトルが、古典乱流の最も重要な統計則であるコルモゴロフ則と一致することを発見した。

さらに我々は時間依存ランダムポテンシャルをエネルギー注入として導入することで、定常乱流のシミュレーションに成功した。散逸項があるために減衰乱流、定常乱流ともに非圧縮性運動エネルギーが全運動エネルギーの主な割合を占める。その非圧縮性運動エネルギーの波数空間におけるエネルギー流束が量子乱流の慣性領域においてほぼ一定の値をとり、またこれがエネルギー散逸領域におけるエネルギー散逸率と一致していることを明らかにした。また減衰乱流と同様、定常乱流のエネルギースペクトルも慣性領域においてコルモゴロフ則と一致することを発見した。これらの結果が量子乱流における図 13.2 のような描像をより明らかにする。

また、グロス・ピタエフスキー方程式に凝縮体の揺らぎを取り入れたボゴリューボフ方程式を数値的に解くことにより、凝縮体と揺らぎとの相互作用によって生

じる散逸機構が我々の導入した散逸項と低温において良く一致しており、さらに温度が高いときにはこの散逸が大きなスケールにも効いてくることから、常流体と量子渦との相互摩擦力に相当する可能性があることを明らかにした。しかし具体的な相互摩擦力との関係はまだよく分かっておらず、これは今後の課題である。

我々が得た結果は、量子乱流が古典乱流との類似性を持っており、乱流における慣性領域、コルモゴロフ則、リチャードソンカスケードの間の関係を要素還元的に理解するためのプロトタイプとなりうることを強く支持している。我々の得た結果が、量子乱流や古典乱流の垣根を越えた乱流の新しい分野へと導き、乱流の理解にブレイクスルーを生み出すことを期待する。

参考文献

- [1] F. London *Superfluids* vol. II (John Wiley and Sons, New York, 1954).
- [2] D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, 3rd ed. (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1990).
- [3] 山田一雄、大見哲夫：超流動（培風館 1995）
- [4] L. Tisza, *Nature* **141**, 913 (1938).
- [5] L. D. Landau, *J. Phys. (USSR)* **5**, 71 (1941).
- [6] L. D. Landau, *J. Phys. (USSR)* **11**, 91 (1947).
- [7] I. M. Khalatnikov, *Introduction to the Theory of Superfluidity*, (Benjamin, New York, 1965).
- [8] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [9] A. Einstein, *Sitzber. Kgl. Press. Akad. Wiss.* , (1924), p. 261; (1925), p. 3.
- [10] E. L. Andronikashvili, *J. Phys. (USSR)* **10**, 201 (1946).
- [11] Onsager, *Nuovo Cimento* **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
- [12] R. P. Feynman, in *Progress in Low-Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955), Vol. I, p. 17.
- [13] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc. A* **260**, 218 (1961).
- [14] G. W. Reyfield and F. Reif, *Phys. Rev.* **136** A1194 (1964).
- [15] D. G. Henshaw and A. D. B. Woods, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961).
- [16] P. E. Sokol, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), p. 51.

- [17] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [18] K. Huang, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), p. 31.
- [19] M. Kobayashi and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **66**, 174516 (2002).
- [20] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
- [21] D. J. Bishop and J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1727 (1978).
- [22] I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1454 (1978).
- [23] B. C. Crooker *et al.* , *Phys. Rev. Lett.* **51**, 666 (1983).
- [24] J. D. Reppy, *Physica B* **126**, 335 (1984).
- [25] P. A. Crowell, F. W. Van Keuls and J. D. Reppy, *Phys. Rev. B* **55**, 12620 (1997).
- [26] J. D. Reppy, *J. Low Temp. Phys.* **87**, 205 (1992).
- [27] O. Plantevin *et al.* , *Phys. Rev. B* **63**, 224508 (2001).
- [28] O. Plantevin *et al.* , *Phys. Rev. B* **65**, 224505 (2002).
- [29] K. Yamamoto *et al.* , *Phys. Rev. Lett.* **93**, 075302 (2004).
- [30] K. Huang and H. F. Meng, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 644 (1992).
- [31] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [32] J. S. Langer and T. Neal, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 984 (1966).
- [33] L. P. Gorkov, A. I. Larkin and D. E. Khmel'nitskii, *JETP Lett.* **30**, 248 (1979).
- [34] M. P. A. Fisher *et al.* , *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [35] M. Kobayashi and M. Tsubota, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 189 (2005).
- [36] M. Kobayashi and M. Tsubota, cond-mat/0510335.

- [37] K. Shirahama, private communication.
- [38] J. S. Langer and J. D. Reppy, in *Progress in Low-Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1970), Vol. VI, Chap. 1.
- [39] J. R. Clow and J. D. Reppy, *Phys. Rev. A* **5**, 427 (1972).
- [40] E. Kim and M. H. W. Chan, *Nature* **427**, 225 (2004).
- [41] E. Kim and M. H. W. Chan, *Science* **305**, 1941 (2004).
- [42] D. van Oosten, P. van der Straten and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **63**, 053601 (2001).
- [43] M. Greiner *et al.*, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [44] W. Krauth, N. Trivedi and D. Ceperley, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2307 (1991).
- [45] N. Trivedi, in *Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics V* (Springer, Berlin, 1993).
- [46] R. T. Scalettar, G. G. Batrouni and G. T. Zimanyi, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3144 (1991).
- [47] G. E. Astrakharchik *et al.*, *Phys. Rev. A* **66**, 023603 (2002).
- [48] K. G. Balabanyan, N. Prokof'ev and B. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 055701 (2005).
- [49] H. Gimperlein *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170401 (2005).
- [50] A. V. Lopatin and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 235503 (2002).
- [51] S. Giorgini, L. Pitaevskii and S. Stringari, *Phys. Rev. B* **49**, 12938 (1994).
- [52] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon Press, London, 1958).
- [53] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, 1987).
- [54] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).

- [55] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Englewood Cliffs, N. J. , Prentice-Hall, 1963).
- [56] V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (D. Reidel, Hingham, MA, 1983)
- [57] O. Penrose and L. Onsager, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
- [58] P. W. Anderson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 298 (1966).
- [59] P. W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics* (Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1984).
- [60] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (USSR)*, **11**, 23 (1947).
- [61] P. C. Hohenberg and P. C. Martin, *Ann. Phys. (N. Y.)* **34**, 291 (1965).
- [62] E. L. Pollock and D. M. Ceperley, *Phys. Rev. B* **36**, 8343 (1987).
- [63] N. M. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
- [64] J. Goldstone, *N. Cim.* **19**, 154 (1961).
- [65] S. Stringari, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), p. 86.
- [66] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, *Phys. Rev. ,* **84**, 1232 (1951).
- [67] H. Cho and G. A. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1562 (1995).
- [68] G. Baym *et al.* , *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1703 (1999).
- [69] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev and B. V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120402 (2001).
- [70] F. F. de Souza Cruz *et al.* , *Phys. Rev. A* **65**, 053613 (2002).
- [71] B. Kastening, *Phys. Rev. A* **69**, 043613 (2004).
- [72] T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn. ,* **74**, 1891 (2005).
- [73] R. A. Aziz, A. R. Janzen and M. R. Moldover, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1586 (1995).

- [74] Shang-Keng Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (W. A. Benjamin, Inc, New York, 1976).
- [75] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [76] 例えば、http://www.emicronano.com/effluids/gallery/leonard_vortices.html を参照
- [77] G. K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).
- [78] Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [79] 木田重雄、柳瀬真一郎：乱流力学（朝倉書房 1999）
- [80] G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A **151**, 421 (1935).
- [81] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 299 (1941) (reprinted in Proc. Roy. Soc. A **434**, 9 (1991)).
- [82] A. N. Kolmogorov: Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 16 (1941) (reprinted in Proc. Roy. Soc. A **434**, 15 (1991)).
- [83] M. Tanaka and S. Kida: Phys. Fluids A **5** (1993) 2079.
- [84] R. J. Donnelly: *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [85] W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **240**, 114 (1957).
- [86] W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **240**, 128 (1957).
- [87] W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **240**, 493 (1957).
- [88] J. T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955) Vol. VIII, P. 133.
- [89] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
- [90] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **38**, 2398 (1988).
- [91] J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998).

- [92] S. R. Stalp, L. Skrbek and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999).
- [93] W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000).
- [94] E. P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).
- [95] L. P. Pitaevskii, Soviet Phys. -JETP **13**, 451 (1961).
- [96] T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002).
- [97] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997).
- [98] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).
- [99] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005).
- [100] M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005).
- [101] 巽友正：流体力学（培風館 1982）
- [102] P. W. Karn, D. R. Starks and W. Zimmermann, Jr. , Phys. Rev. B **21**, 1797 (1980).
- [103] R. E. Packard and T. M. Sanders, Phys. Rev. Lett. **19**, 216 (1967).
- [104] E. J. Yarmchuck and R. E. Packard, J. Low Temp. Phys. **46**, 479 (1982).
- [105] D. R. Ladner, R. K. Childers and J. T. Tough, Phys. Rev. B **13**, 2918 (1976).
- [106] H. E. Hall and W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **238**, 204 (1956).
- [107] W. F. Vinen, M. Tsubota and A. Mitani, J. Low Temp. Phys. **134**, 457 (2004).
- [108] M. Leadbeater *et al.* , Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).
- [109] S. Ogawa, M. Tsubota and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 813 (2002).
- [110] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).
- [111] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **76**, 4745 (1996).

- [112] 彼らのグループは粘性がない非圧縮性古典流体の場合にも、エネルギースペクトルが一時的にコルモゴロフ則と一致することを、オイラー方程式の数値シミュレーションにより明らかにしている。C. Cichowlas, P. Bonaiti, F. Debbasch and M. Brachet, nlin.CD/0410064.
- [113] N. G. Berloff, Phys. Rev. A **69**, 053601 (2004).
- [114] N. G. Berloff and B. V. Svistunov, Phys. Rev. A **66**, 013603 (2002).
- [115] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes in Fortran 77* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [116] 笠松達が、トラップ中における原子気体のボース・アインシュタイン凝縮に対してグロス・ピタエフスキー方程式を解く際に、類似の散逸項を導入している。K. Kasamatsu, M. Tsubota and M. Ueda, Phys. Rev. A **67** (2003) 033610.
- [117] 大野豊、磯田和男：数値計算ハンドブック（オーム社 1990）
- [118] 石岡圭一：スペクトル法による数値計算入門（東京大学出版社 2004）
- [119] T. R. Taha and M. J. Ablowitz, J. Comp. Phys. **55**, 204 (1984).
- [120] 擬スペクトル法で最も計算に時間を要するのは高速フーリエ変換であるため、その選択には十分な注意を払う必要がある。本研究では、非常に高速かつ高精度で扱いやすい、京都大学数理解析研究所の大浦拓哉氏によって提供された高速フーリエ変換を用いた。
- [121] H. Fangohr, S. J. Cox and P. A. J. de Groot, Phys. Rev. B **64**, 064505 (2001).
- [122] S. Nazarenko and M. Onorato, nlin.CD/0507051.
- [123] S. Khlebnikov, Phys. Rev. A **66**, 063606 (2002).
- [124] A. Mitani, private communication.
- [125] J. E. Lye *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 070401 (2005).
- [126] D. Clément *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170409 (2005).
- [127] C. Fort *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170410 (2005).

- [128] T. Schulte *et al.* , Phys. Rev. Lett. **95**, 170411 (2005).
- [129] A. Griffin, Phys. Rev. B **53**, 9341 (1996).
- [130] E. Zaremba, T. Nikuni and A. Griffin, J. Low Temp. Phys, **116**, 277 (1999).